"Le secret de toute la nature
est en l'âme de l'enfant "
(Wordsworth)

L'ENFANT ET LE COMPTAGE

par Jean-Paul FISCHER

Ecole Normale d'Instituteurs
16 rue de la Victoire
57158 MONTIGNY-lès-METZ

REMERCIEMENTS

Beaucoup de personnes ont permis et favorisé la réalisation de cette étude.

Je remercie ici :

- tous les enfants interrogés, avec une pensée particulièrement émue pour Frédéric, l'un d'entre eux, arraché à la vie quelques semaines seulement après notre expérience;
- toutes les aide- maternelles, maîtresses, directrices et inspectrice (teur) des écoles maternelles dans lesquelles ont eu lieu les préexpériences et expérience ;
- toutes les personnes ayant facilité les recherches bibliographiques nécessitées par ce travail.

Je remercie également Claude Deschamps, Conseillère Pédagogique auprès de l'Ecole Normale de Montigny-lès-Metz, et François Pluvinage, Maître-assistant à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg, d'avoir bien voulu relire une grande partie de cette étude avant sa publication.

Vu sa longueur, je remercie enfin tout particulièrement, pour s'être occupés de la présentation matérielle de cette étude, Michèle Battisti et M. C. Bodo de l'IREM de Strasbourg, et bien entendu aussi, pour avoir accepté sa publication, François Pluvinage, Directeur de cet Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

Février 1982,

Jean-Paul FISCHER.

P.S. Le livre "The Child's Understanding of Number" étant directement à l'origine de certaines de nos procédures expérimentales, hypothèses,... il serait incorrect de ne pas remercier ici ses auteurs Rochel Gelman et C.R. Gallistel. Je prie, de plus, C.R. Gallistel de m'excuser de ne plus, par commodité, mentionner son nom par la suite.

P L A N

Chapitre I : Problématique introductive

" Pour compter ou dénombrer, on attache mentalement un objet différent de la collection envisagée à chacun des mots successifs de la phrase (ou suite) des nombres; le dernier nombre prononcé est le nombre de la collection".

H. Lebesgue, 1935.

I. Problématique introductive

1) Définitions initiales

a) Les principes du "Comment compter":

Le comptage un à un et finalisé (de n objets) repose essentiellement sur trois principes:

- le principe de bijection (pour n), noté Pbi(n): il consiste à assigner à chacun des n objets un et un seul mot, les n mots ainsi utilisés devant être 2 à 2 distincts;
- le principe de suite stable (pour n), noté $P_{ss}(n)$: il consiste à utiliser, au cours de $k \geqslant 2$ comptages, des suites Si, $i \in \{1\ldots,k\}$ de m_i mots telles que :
  - . d'une part, toutes les suites Si qui sont telles que $m_i \geqslant n$, et il en faut au moins 2, une fois tronquées à n, coïncident et sont formées de mots 2 à 2 distincts,
  - . d'autre part, toutes les suites, qui sont telles que $m_i < n$, coïncident avec les suites précédentes tronquées à m_i;
- le principe cardinal (pour $n > 1$), noté Pca(n): il consiste à conclure que le dernier mot de la suite (on exige que ce dernier mot soit unique dans la suite et que cette dernière ait au moins n termes) utilisée lors du comptage de n(>1) objets est le nombre d'objets.

Nous appellerons ces 3 principes les principes du "Comment compter" (Cf. GELMAN 1978). Nous dirons qu'un enfant sait compter n objets s'il utilise une (ou des) procédure(s) respectant à la fois Pbi(n) et Pss(n) et s'il connaît la règle cardinale (= règle découlant du Pca) pour n: dans ce cas, nous lui attribuons* les 3 principes du "Comment compter". Ces derniers étant définis indépendamment les uns des autres, nous pouvons bien entendu n'attribuer qu'un seul, ou deux, des principes à un enfant.

* Nous évitons de dire qu'un enfant applique les principes pour ne pas laisser sous-entendre qu'il connaît, ou même comprend, les principes généraux du comptage.

Donnons quelques exemples:

- pour le Pbi : le comptage "8, 9, 7, 3 et 4" de 5 jetons par Alexandra (4;8) respecte Pbi(5); celui "2, 1, b, f, e, i" par Ber* (3;3) ne respecte pas Pbi(5) car il y a un mot de trop. Le comptage "2, 1, 2'" de 3 jetons par le même Ber ne respecte pas non plus Pbi(3) car les mots ne sont pas 2 à 2 distincts.

Remarque:une bijection, même correcte, avec les doigts de la main ne permettait d'attribuer le Pbi que si l'enfant donnait aussi des noms (2 à 2 distincts et 1 et 1 seul à chacun) à ses doigts.

- pour le Pss: Pss(6) peut être attribué à Fra(3;5) qui a compté d'abord "1, 2, 3, 5, 6, 9" puis "1, 2, 3, 5, 6, 9, 11, 12"; par contre, Pss(1), et a fortiori Pss(2) ou Pss(3), ne peut être attribué à Alexandra (4;8) qui a compté d'abord "2, 7, 3", puis "3, 4, 5", puis encore "8, 9, 3".

Remarques: . on suppose pour ces 2 exemples qu'il n'y a pas eu d'autres comptages;

$$. \forall m \leqslant n, \quad Pss(n) \Rightarrow Pss(m).$$

- pour le Pca:Far (5;1) et Ala(5;0) qui ont respectivement compté "1, 2, 3, 4, 5 - 5" et "1, 2, 3, 4, 10 - 10 il y en a" pour 5 connaissent la règle cardinale pour 5. Ala la connaît aussi pour 6 et 7 puisqu'il a compté respectivement "1, 2, 3, 4, 5, 12 - 12 il y en a" pour 6 et "1, 2, 3, 4, 9, 16, 8 - 8 il y en a" pour 7. Par contre, Mau (4;1) qui compte "2, 3, 4" sans conclure qu'il y en a 4, Cél (3;8) qui compte "1, 2, 3" sans conclure qu'il y en a 3, ne prouvent pas qu'elles connaissent la règle cardinale (pour 3).

b) Autres principes du comptage

Gelman introduit encore 2 autres principes

α) le principe d'ordre quelconque (pour n), noté Poq(n):il consiste à savoir que le résultat d'un comptage de n objets, c'est-à-dire le cardinal de la collection comptée, ne dépend pas de l'ordre dans lequel ont été comptés les objets, en particulier, on peut commencer le comptage par n'importe lequel des objets.

---

* les noms d'enfants réduits à 3 lettres sont ceux des sujets de l'expérience : on pourra les retrouver dans les tableaux des réponses individuelles du IV. Les noms entièrement écrits sont ceux des sujets des préexpériences.

β) <u>Le principe d'abstraction, noté Pab</u>:
il consiste à faire abstraction des différences qualitatives des objets que l'on compte.

2) <u>Objectifs de l'étude expérimentale</u>

a) <u>Formulation</u>:

nous voulions étudier, de manière précise,

α) le développement du comptage (connaissance de la suite des nombres et respect des principes) chez l'enfant;

β) la résolution des premiers problèmes arithmétiques par l'enfant, en particulier l'influence de certains facteurs comme la nature du problème (addition ou soustraction, dynamique ou statique, verbal ou concret, ...), la taille des données, l'ordre des données;

γ) le rôle du comptage dans la dénomination des nombres et dans la résolution des problèmes.

Le but le plus général était d'arriver à préciser, grâce à ces études, la représentation, qu'a le jeune enfant, du nombre et des situations problématiques de type additif.

b) <u>Justifications du choix des objectifs</u>:

α) il existe peu d'études récentes sur le développement du comptage chez l'enfant, et les connaissances sur les possibilités numériques du jeune enfant reposent souvent sur des travaux anciens, en particulier, DESCOEUDRES 1921, BECKMANN 1923 et, à un titre moindre, FILBIG 1923.

Or l'environnement, aussi bien scolaire qu'extra-scolaire, de l'enfant, change constamment. Illustrons ces changements par 2 exemples:

- le premier concerne l'environnement scolaire: les Instructions Officielles pour les maternelles de 1977 ne font plus allusion à des activités spécifiquement numériques, alors que les Instructions Officielles antérieures demandaient déjà

  - chez les 2 à 5 ans, le comptage jusqu'à 10, d'objets semblables;
  - chez les 5 à 6 ans, des groupements d'objets jusqu'à 50 (voir Annexe 14);

- le second, plus anecdotique, concerne l'environnement extra-scolaire: Cin (3;6) à qui l'on a demandé de compter dit "un 3" après qu'on lui a dit 1, 2. Et après ? "un e". Et puis après ? "un doublé, un r, un i, 5, un s et puis un i". Explication: elle regarde l'émission de télévision "Des chiffres et des lettres".

Comme l'influence de l'environnement sur le développement du comptage ne peut être niée, il faut donc s'interroger sur la validité actuelle de résultats anciens.

β) les travaux de Gelman sur le développement et le rôle du comptage débouchent sur des conclusions ou hypothèses importantes, et parfois étonnantes, qui méritent confirmation (ou infirmation).

Exemples:

- à 2 ans, la plupart des enfants possèdent les rudiments du comptage;
- l'appréhension rapide du nombre (correspondant* français de "subitizing") ne serait qu'un comptage très rapide.

γ) la nécessité d'élargir l'étude du champ conceptuel des structures additives. En effet, les jeunes enfants arrivent très tôt à résoudre certains problèmes de type additif; il est donc raisonnable de penser que les procédures initiales utilisées par eux influenceront leurs procédures ultérieures et de ce fait pourront expliquer, au moins partiellement, certaines hiérarchies de difficulté constatées chez des enfants plus âgés.

δ) l'application pédagogique des travaux de Piaget a conduit certains "pédagogues" à considérer des activités très générales, telles les sériations ou les classifications, comme (presque) suffisantes pour faire "construire le nombre" à l'enfant. Or, aussi bien J. Brun, dans BRUN 1979, lorsqu'il écrit: " Comme pour Piaget en effet, du point de vue épistémologique, les connaissances mathématiques ont leur origine dans les coordinations d'actions, puis les opérations du sujet, qu'elles prolongent sans en être dissociées, on pourrait croire qu'un enseignement systématique de ces opérations, prises isolément (classification, sériation par exemple), fournirait des contenus d'enseignement garantissant l'acquisition par l'enfant des

---

* voir notre discussion du IX, A, 1, d, et e .

connaissances spécifiques qui forment la discipline mathématique. Cette interprétation est beaucoup trop limitative, les opérations étant insuffisantes par elles-mêmes pour assurer l'acquisition de ces connaissances", que P. Gréco, dans GRECO 1980 b, lorsqu'il juge bon de rappeler que "les enfants vont aussi à l'école pour apprendre des contenus " nous mettent en garde contre de telles applications de l'oeuvre de Piaget. Notre travail, en mettant l'accent sur des activités plus spécifiques, et en précisant en quoi et dans quelle mesure elles sont nécessaires ou utiles pour les premiers apprentissages numériques de l'enfant, devrait donc élargir les bases de toute réflexion didactique sur ce dernier sujet.

3) Partie non expérimentale

Sans vouloir annoncer prématurément les conclusions de notre étude expérimentale, il nous faut dire ici que nous avons été quelque peu surpris par l'importance chez l'enfant du phénomène du comptage. Ceci nous a conduit à réfléchir de manière plus générale sur ce dernier (chapitre X), en particulier à analyser, d'une manière historico-critique, sa didactique (chapitre XI).

Chapitre II : Description de l'expérience

" La didactique des mathématiques est parvenue à un point où ce ne sont pas les opinions qui lui manquent. Il s'agit surtout de mettre en oeuvre des vérifications et des expériences "

G. Glaeser, 1979.

II.- Description de l'expérience

A. La population

L'expérience porte sur 224 enfants dont 223 issus de 7 écoles maternelles différentes de Metz et de sa banlieue; 1 appartient à notre entourage. Ces enfants fréquentent les différentes sections de l'école maternelle, mais nous n'en tiendrons pas compte et appellerons :

grands , les enfants de $5;0^+$ à $6;6^-$ ans
moyens , " " " $4;0^+$ à $5;0^-$ ans
petits , " " " $3;0^+$ à $4;0^-$ ans

les âges étant pris au moment de l'entretien et arrondis au mois le plus proche.

Ces enfants se répartissent en 7 G.A. (= groupe d'âge) de 32 enfants chacun.

le G.A. 6;3 comprend les enfants de $6;0^+$ à $6;6^-$
⋮
le G.A. 3;3 " " " " $3;0^+$ à $3;6^-$

Un ajustement en fin d'expérience a permis d'avoir des moyennes d'âge, à un 1/2 mois près, respectivement de 6;3, 5;9, ... , 3;3 pour les différents G.A. Signalons la seule entorse à cette description de notre population: 2 enfants de moins de 3 ans figurent dans le G.A. 3;3.

Dans l'ensemble, le milieu socio-culturel d'origine des enfants est moyen, mais il varie suivant les G.A.: nous donnons une répartition en couches sociales assez grossière en Annexe 1. On peut en conclure de manière approximative et par référence à la répartition en catégories socio-professionnelles de la population active française, que:

- pour les G.A. 3;3 et 3;9, le milieu est favorisé;
- " " " 4;3, 4;9, 5;3, le milieu est modeste ou très modeste;
- " " " 5;9, 6;3, le milieu est moyen.

B. Les épreuves: formulation des questions

1) Epreuve 1: Récitation de la suite des nombres

On demande à l'enfant s'il sait compter, jusqu'à combien et, le cas échéant, de le montrer. S'il ne récite pas ou mal (sans commencer par 1,2), on amorce la récitation: "1, 2, comme ça". S'il s'arrête sans s'être trompé, on l'incite à continuer: "Et après ?" On arrête la récitation systématique après 30.

2) Epreuve 2: Dénomination des nombres

On présente à l'enfant des jetons en bois non peint (matériel homogène) dans une boîte circulaire et dans des configurations déterminées (approximativement car l'expérimentateur reconstitue rapidement la configuration pour chaque question) qui sont données en Annexe 2.

Les nombres de jetons et l'ordre de présentation sont les suivants:
- pour les grands : 7, 5, 3, 6, 4.
- pour les moyens : 5, 3, (1), 4, 2. (1: facultatif)
- pour les petits : 3, 1, 4, 2.

La question initiale est: "Combien est-ce qu'il y a de jetons dans la boîte ?" (jetons = sous, ronds, pièces, ... selon le vocabulaire utilisé par l'enfant).

Puis on se contente de : "C'est combien ?", "Combien maintenant ?", "Et maintenant ?", ...

Si l'enfant se trompe, on lui demande s'il est sûr et on l'encourage, si on a l'impression que l'échec est accidentel (par ex: erreur de comptage), à reconsidérer sa réponse. On évite dans tous les cas de suggérer de compter à un enfant qui n'en a pas spontanément l'idée.

3) Epreuve 3: Résolution de problèmes

a) les jeux:

Dans le jeu noté Jeu(a, b), l'expérimentateur a a jetons dans sa main droite (disposés approximativement dans la même configuration que pour l'épreuve 2) et les présente à l'enfant, en l'encourageant à bien les regarder. Il répartit ensuite, derrière son dos ou sous la table, les jetons dans ses 2 mains en laissant b jetons dans la main droite et présente les 2 mains fermées à l'enfant, puis ouvre la main droite et demande à l'enfant: "combien j'en ai cachés dans l'autre main ?"

Pour le premier jeu, on donne quelques explications verbales à l'enfant après la présentation des a jetons: "Regarde bien parce que je vais les cacher dans mes mains et puis je vais te montrer une des mains et toi, il faudra que tu trouves combien j'en ai cachés dans l'autre main". On ne s'assure pas que l'enfant a compris ces explications.
Les couples (a, b) choisis sont:

- pour les petits et les moyens: (3,1); (3,2); (4,3); (5,2).
- pour les grands : idem + (7,2).

b) <u>les problèmes verbaux.</u>

α) <u>pour les grands</u> :

<u>$Bon^-(a,b)$</u>: un petit garçon a a bonbons. Et puis il mange b des bonbons. Combien est-ce qu'il lui reste alors de bonbons ?
Valeurs du couple (a,b) choisies: (5,2); (7,2).

<u>$Bil^-(a,b)$</u>: un petit garçon a a billes et sa petite soeur elle en a b seulement. Combien le petit garçon a de billes de plus que sa soeur ?
Valeurs du couple (a,b) choisies : (3,1); (5,2).

<u>$Ani^+(a,b)$</u>: au cirque, dans une cage, il y a a lions et b tigres. Combien est-ce qu'il y a d'animaux dans la cage ?
Valeurs du couple (a,b) choisies: (4,2); (2,4).

<u>$Fru^+(a,b)$</u>:à la maison, sur la table, il y a a oranges et b pommes. Combien est-ce qu'il y a de fruits sur la table ?
Valeurs du couple (a,b) choisies: (4,2); (2,4).

β) <u>pour les moyens et les petits:</u>

<u>$Pou^+(2,1)$</u>: une petite fille a 2 poupées. Et puis, pour Noël, elle reçoit encore 1 poupée. Combien est-ce qu'elle a alors de poupées ?

<u>$Ani^+(2,1)$ et $Bon^-(3,1)$</u>: même formulation que pour les grands.

4) Epreuve 4 : comptage - pointage induit

On présente de nouveau à l'enfant la boîte avec les jetons (décrits dans 2) et on lui demande : "Tu sais compter comme çà ?" en pointant 2 des jetons avec l'index. S'il ne compte pas ou mal (c'est-à-dire s'il ne commence pas par 1, 2 ou s'il ne parle pas à haute voix), on recommence un comptage-pointage accompagné du langage, "1,2" (sans dépasser 2). En dernier recours, on guide même le doigt de l'enfant pour les 2 premiers jetons.

Si l'enfant a réussi avec beaucoup d'aide, on lui refait faire un comptage-pointage"tout seul".

Les nombres à compter sont:

- pour les grands : 7 et en cas d'échec, 5 ;
- pour les moyens : 5 et en cas d'échec, 3 ,
  en cas de réussite, 7 ;
- pour les petits : 3 et en cas de réussite, 5.

Test cardinal: Si l'enfant ne conclut pas spontanément son comptage-pointage soit en répétant le dernier nombre-mot (ex: "1,2, 3, 4, 5 : 5" ou en rajoutant "il y en a x" (ex: "1, 2, 3, 4, 5 : il y en a 5), on le soumet à ce que nous appellerons le test cardinal et qui consiste à cacher les jetons aussitôt que l'enfant a terminé de les compter (l'expérimentateur pose simplement sa main sur la boîte) en lui demandant: "Alors, combien(il y en a) ?"

Cette technique est due à Schaeffer, Eggleston et Scott (cf. SCHAEFFER 1974).

Test d'ordre quelconque: Certains enfants (tous les grands) qui savent compter sont de plus soumis au test d'ordre quelconque:

à l'issue du comptage-pointage conclu , on demande à l'enfant: "Tu as commencé par compter lequel(en premier) ?"- L'enfant montre alors du doigt le jeton par lequel il a commencé son comptage (l'enfant se souvient pratiquement toujours; sinon on lui montre) "Et tu as trouvé combien ?".L'enfant indique le résultat trouvé (s'il ne se souvient plus ou mal, on le lui rappelle). "Et si tu commençais à compter celui-là (en montrant un autre jeton, si possible diamétralement opposé à l'autre) en premier (à cet instant, l'expérimentateur recouvre la boîte avec sa main), combien tu trouverais ?". On demande de plus, en cas de réussite, à l'enfant de justifier sa réponse: "Pourquoi tu dis x ?"

5) Questions annexes et complémentaires

a) questions annexes : Entre l'épreuve 1 et l'épreuve 2, entre autres, pour que la première n'induise pas par trop le comptage lors de la seconde, on pose une question annexe:

α) aux enfants des G.A 6;3 et 5;9, on demande le nombre de grands frères et grandes soeurs;

β) aux autres (sauf à quelques uns qui n'ont presque rien récité), on demande le nombre préféré.

b) questions complémentaires: Afin de faciliter l'interprétation ultérieure, on a parfois, en fin d'épreuve ou d'entretien, posé quelques questions complémentaires à certains enfants. Exemple: aux petits et moyens qui répondaient systématiquement 2 aux problèmes verbaux, et réussissaient donc Bon^- (3,1), on a souvent posé le problème Bon^-(2,1).

C. L'ordre de passation

Les épreuves 1, 2, 3 et 4 sont toujours passées dans cet ordre. Si les épreuves 1, 2 et 4 ne changent pas d'un enfant à l'autre, on a par contre procédé, en fonction des comparaisons visées et pour éviter ou détecter certains effets expérimentaux, à une variation contrôlée de l'ordre de présentation des problèmes verbaux et des jeux. Ainsi:

- chez les petits et moyens, les 4 jeux, qui restent toujours regroupés, sont posés avant les 3 problèmes verbaux. A l'intérieur de ces 2 groupes, on procède à certaines permutations qui conduisent finalement à 8 suites différentes de problèmes décrites en Annexe 3;
- chez les grands, les 5 jeux, qui restent toujours regroupés, sont intercalés entre les 3 premiers et les 3 derniers problèmes verbaux*. Certaines permutations à l'intérieur des problèmes verbaux ou des jeux conduisent finalement à 3 suites différentes de problèmes décrites en Annexe 4.

---

* Remarque : Dans B,3 nous avons mentionné 8 problèmes verbaux. Mais, pour des raisons d'induction mutuelle évidentes, nous ne posons jamais tous les 4 problèmes, Ani^+(4,2), Ani^+(2,4), Fru^+(4,2) et Fru^+(2,4) à un même enfant. Un enfant répond soit à Ani^+(4,2) et Fru^+(2,4), soit à Fru^+(4,2) et Ani^+(2,4). Nous noterons Pro^+(a,b) le problème additif avec données (a,b) auquel a répondu un enfant. Ani^+(a,b) et Fru^+(a,b) seront appelés des formulations du problème Pro^+(a,b)

D. L'application du plan expérimental

1) L'expérimentateur

Le même expérimentateur a interrogé tous les enfants. Il ne disposait d'aucun moyen d'enregistrement, mais était bien entraîné à ce type d'entretien. Près de 150 enfants ont en effet été interrogés par lui lors des préexpériences. De plus, il avait mené une expérience analogue sur certains points, l'année précédente (cf. FISCHER 1979).

2) La durée de l'entretien

Chez les grands, environ 20 minutes.

Chez les petits et moyens, la passation des épreuves ne prend guère plus de 10 minutes, mais certains entretiens ont été allongés par une longue phase initiale de mise en confiance, par les questions complémentaires, ...

3) Le lieu de l'entretien

Il est variable suivant les écoles et les classes; on a évidemment essayé de choisir des endroits où l'enfant était relativement familier (la salle de repos, par exemple) tout en étant isolé de ses camarades.

4) Les enfants

De manière schématique on peut dire que l'on s'est efforcé d'interroger tous les enfants d'une classe (sauf évidemment pour terminer les G.A. auquel cas le choix s'est fait exclusivement sur des critères d'âge) mais que, si tous les grands sont volontaires* (un des enfants, qui ne fréquentait l'école que très épisodiquement en temps ordinaire, se mit à venir régulièrement à compter du jour où il a su qu'il avait le droit d'aller chez l'expérimentateur: il ne voulait pas rater son tour!) et si les moyens ne font pas non plus (à 1 ou 2 exceptions près que l'on n'a pas interrogé) de difficultés pour venir avec l'expérimentateur, les petits enfants refusent (ou font des caprices) parfois. De ce fait, environ le tiers des enfants qui auraient dû "normalement" passer l'entretien chez les petits ne l'ont pas fait (d'après les maîtresses, il ne s'agit pas spécifiquement d'enfants faibles). De plus, quelques enfants, très proches des 3 ans en général, qui avaient accepté de venir ont "abandonné" ou n'ont pas été interrogés (car ils ne répondaient pas, ou pas distinctement, aux questions posées).

---

* Mais 2 ou 3 d'entre eux, "à problèmes", n'ont pas été retenus(le lecteur devra s'en souvenir en lisant nos résultats statistiques).

5) Les écarts par rapport au plan expérimental décrit

a) un contretemps initial a fait que l'épreuve 4 n'avait pas été posée à une trentaine d'enfants (moyens et petits). En conséquence, nous avons fait passer cette épreuve environ 14 jours après à une vingtaine d'entre eux. Pour quelques autres, nous avons pu attribuer les principes du comptage sur d'autres critères (voir codage) et, enfin, pour les derniers, les entretiens ont été annulés.

b) nous n'avons pas posé, volontairement, les problèmes verbaux ou/et les jeux à quelques enfants qui, d'après le début de l'entretien, nous paraissaient trop faibles ou inattentifs (si seulement l'un ou l'autre problème a été posé, on a annulé l'ensemble des problèmes verbaux ou l'ensemble des jeux).

Le test cardinal n'a pas été posé non plus à 2 ou 3 enfants.

c) nous avons toléré ou même provoqué certains écarts par rapport aux questions standardisées lorsqu'ils ne nous ont pas paru contraires aux objectifs de l'expérience. Exemples:

- lorsque l'enfant, il s'agit des plus jeunes évidemment, n'était pas très coopératif, nous utilisions la technique de la poupée (signalée par Gelman); l'enfant devait montrer à la poupée (ou au lapin) comment il sait compter, ou encore devait montrer comment la poupée sait compter (après que l'expérimentateur lui ait montré , pas trop bien sûr, comment le lapin sait compter);
- la récitation initiale pouvait être un comptage pointage: certains enfants comptaient les doigts, d'autres des points imaginaires sur la table ou sur la feuille de l'expérimentateur, une autre les lits de la salle de repos,...
- certains énoncés de problèmes verbaux ont parfois été personnalisés: "Toi tu as ..." ou "Ton frère a..." au lieu de "Un petit garçon a...";
- dans les problèmes Bil$^-$, on posait souvent la question intermédiaire: "Qui en a le plus?" avant de poser "Combien de plus ?"

CHAPITRE III : Remarques sur le choix de la méthode et des épreuves

"On n'a jamais fini, en psychologie génétique plus qu'ailleurs sans doute (puisque la genèse elle-même n'est pas observable et qu'on en infère le décours et les processus à partir de performances hiérarchisées ou hiérarchisables), de questionner la méthode, ..."

P. Gréco, 1980a.

III.- Remarques sur les choix de la méthode et des épreuves

A. La formulation des problèmes verbaux

0) Introduction

Pour affirmer qu'un type de problème, par exemple le type ETE_F* (voir exemple ci-après) est plus facile qu'un autre type de problème, par exemple le type EEE (voir également exemple ci-après), il ne suffit pas de vérifier qu'un problème donné du 1er type soit plus facile qu'un problème déterminé du 2e type: il faut encore avoir quelques garanties que les "habillages" des 2 problèmes soient source de difficultés psycho-linguistiques comparables. Or une manière simple pour arriver à ce dernier résultat est de supprimer ces difficultés! Une première précaution que nous avons donc essayé de prendre est d'éviter au maximum les difficultés d'ordre psycho-linguistique. Ainsi, par rapport aux formulations:

> Denis joue une partie de billes. Avant la partie il avait a billes. Durant la partie il perd b billes. Combien de billes a-t-il après la partie?

pour le problème ETE_F^- (a,b), et

> Isabelle a des billes dans sa main gauche et dans sa main droite. En tout, elle a a billes dans ses mains. Dans sa main gauche, elle a b billes. Combien de billes a-t-elle dans sa main droite?

pour le problème EEE^-(a,b), que nous avions utilisées dans un travail antérieur (cf. FISCHER 1979), nous avons procédé principalement aux modifications suivantes**:

1) Modification de la nature des objets et des actions impliqués :
- billes → bonbons, animaux, lions, ... (sauf bien entendu dans les problèmes Bil^- posés exclusivement aux grands);
- perdre → manger, recevoir.

2) Modification des indicateurs temporels dans les problèmes ETE_F

E. Ferreiro (cf. FERREIRO 1971) a mis en évidence les faits (nous ne retenons que ceux qui intéressent directement notre propos) que l'enfant

---

* pour les notations des types de problèmes on renvoie à VERGNAUD 1976 et FISCHER 1979;

** nous ne parlons évidemment que des modifications de "surface".

- jusque vers 4;6, néglige les indicateurs temporels autres que l'ordre d'énonciation;
- vers 5 ans, semble considérer que
  a) l'ordre d'énonciation correspond à l'ordre de succession des événements;
  b) un indicateur de temps à valeur sémantique "pleine" placé en tête de l'énoncé (exemple: "Avant" dans la formulation de $ETE_F^-(a,b)$) est un signal de renversement de l'ordre et trouve donc anormal qu'on commence par donner un signal temporel fort dans les cas où l'ordre d'énonciation se suffirait à lui-même pour indiquer la succession des événements;
- vers 7 ans, commence seulement à prendre en compte les temps des verbes comme indicateurs temporels.

En conséquence, nous avons toujours fait coïncider ordre d'énonciation et ordre de succession des événements, éliminé les indicateurs de temps à valeur sémantique "pleine" (en particulier en début d'énoncé), gardé tous les verbes au même temps.
Ajoutons également que, toujours par souci d'être bien compris par les plus jeunes enfants, nous avons eu recours, pour lier les 2 propositions initiales des problèmes, à la liaison "et pis" typiquement utilisée par l'enfant dans ses expositions spontanées, bien que dans une telle exposition spontanée elle ne marque pas pour lui, selon Piaget (cf. PIAGET 1923), un rapport de temps mais simplement une liaison toute personnelle entre les idées qui surgissent dans son esprit.

3) <u>Suppression de l'expression "En tout" et introduction du verbe "rester":</u>

a) la suppression de l'expression "En tout" a été motivée par sa non-compréhension par quelques enfants lors des préexpériences.
<u>Exemples:</u> l'une des enfants répond au problème Ani(2,1) formulé avec "En tout": "Il y a 2 lions et 1 tigre". Et combien d'animaux en tout? "Il n'y a pas d'animaux "entou"!; Nathalie (4;8) à $BP^+(2,1)$ (voir énoncé dans B) répond: "Il a 2 ballons bleus et puis il a 1 ballon rouge"(remarquons que "et puis", comme souligné ci-dessus, ne marque pas un rapport de temps). Ca fait combien en tout? Elle montre 2 doigts et dit "Les ballons bleus", 1 autre doigt "Le petit ballon rouge" et commente : "il en a pas tout".

Remarque: la suppression de l'expression "En tout" dans les problèmes EEE nous a conduit à réunir de façon "naturelle", dans une cage (pour animaux) ou sur la table (pour les fruits), les objets à compter ou ajouter ensemble.
b) le mot reste a été introduit car très souvent il est spontanément utilisé par les enfants et parce que, à ce niveau, aucun effet inducteur n'est à craindre.

B. La stabilité ou l'homogénéité des réussites aux problèmes verbaux

0) Introduction

Une autre précaution que l'on peut prendre pour garantir quelque généralité aux résultats des problèmes verbaux est de vérifier la stabilité ou l'homogénéité des réussites à ces derniers. Par stabilité des réussites (individuelles) nous entendons que 2 problèmes voisins conduisent à des réussites (individuelles) voisines; par homogénéité, que 2 problèmes conduisent à des réussites individuelles soit semblables, soit variables, mais avec des variations qui vont toutes dans le même sens. Pour vérifier cette stabilité des réussites individuelles, nous avons, au cours d'une préexpérience-double, ainsi qualifiée car les 32 enfants de 4;0 à 4;9 (moyenne: 4;6) ont été interrogés 2 fois à environ 14 jours d'intervalle (ceci pour éviter le phénomène d'induction mutuelle), posé quelques problèmes très voisins obtenus en procédant à de petites variations des énoncés. Voici ces variations et leur influence sur les réussites*

1) Variation de la "taille" de l'une des sortes d'objets (à 14 jours d'intervalle):

a) les problèmes comparés:

$BP^+(2,1)$: un petit garçon a 2 ballons bleus et 1 petit ballon rouge. Combien est-ce que le petit garçon a de ballons en tout ?

$BG^+(2,1)$: idem sauf 1 petit ballon rouge → 1 gros ballon rouge

b) Résultat:

		$BP^+(2,1)$ R	$BP^+(2,1)$ E	
$BG^+(2,1)$	R	8	5	13
	E	1	18	19
		9	23	32

* les problèmes ont été bien entendu posés dans une suite, mais nous avons pris les précautions élémentaires habituelles pour rendre les problèmes comparés comparables.

2) <u>Variation de la taille des 2 sortes d'objets</u> (au cours du même entretien)

a) <u>les problèmes comparés</u>:

$EgSp^+(2,1)$: un monsieur voit 2 gros éléphants et 1 petite souris. Combien le monsieur voit-il d'animaux en tout ?

$EpSg^+(2,1)$: idem sauf 2 gros éléphants → 2 petits éléphants
1 petite souris → 1 grosse souris

b) <u>résultat</u> :

$EpSg^+(2,1)$ \ $EgSp^+(2,1)$	R	E	
R	10	1	11
E	4	17	21
	14	18	32

3) <u>Variation de la nature de l'une des sortes d'objets</u> (à 14 jours d'intervalle):

a) <u>les problèmes comparés</u>:

$LE^+(2,1)$: un monsieur voit 2 lapins et 1 très gros éléphant. Combien est-ce que le monsieur il voit d'animaux en tout ?

$LS^+(2,1)$: idem sauf 1 très gros éléphant → 1 très petite souris

b) <u>résultat</u> :

$LS^+(2,1)$ \ $LE^+(2,1)$	R	E	
R	10	0	10
E	3	19	22
	13	19	32

4) <u>Variation de la taille des nombres</u>

a) <u>comparaison $Bon^-(3,1)$ et $Bon^-(3,2)$</u>, à 14 jours d'intervalle

α) énoncé : voir II, B, 3, b

β) résultat:

$Bon^-(3,2)$ \ $Bon^-(3,1)$	R	E	
R	10	2	12
E	2	18	20
	12	20	32

b) <u>comparaison $EEE^-(3,1)$ et $EEE^-(3,2)$</u> à 14 jours d'intervalle

α) <u>énoncé du problème $EEE^-(a,b)$</u>: voir le III,A avec main gauche → une des mains, main droite → autre main.

β) <u>résultat</u>:

$EEE^-(3,2)$ \ $EEE^-(3,1)$	R	E	
R	1	6	7
E	1	24	25
	2	30	32

5) <u>Etude, à titre comparatif, d'une "grande" variation des problèmes</u> (même entretien)

a) <u>les problèmes comparés:</u>

$Pou^+(2,1)$: voir énoncé dans II,B,3,b (+ en tout);

$EEE^+(2,1)$: un petit garçon a des billes dans ses mains. Dans l'une des mains, il a 2 billes; dans l'autre main il a 1 bille. Combien est-ce qu'il a de billes en tout ?

b) <u>résultat</u>:

$EEE^+(2,1)$ \ $Pou^+(2,1)$	R	E	
R	9	0	9
E	7	16	23
	16	16	32

6) <u>Conclusions</u>:

a) nous avons calculé, pour tous les tableaux, la probabilité exacte (loi hypergéométrique) d'obtenir, à marges constantes, un tel tableau ou un tableau meilleur (c'est-à-dire avec un nombre total de Réussite-Echecs et d'Echec-Réussites moindre). Ayant obtenu pour tous les tableaux, sauf celui de 4b, des probabilités inférieures à 0,05, nous en déduisons que les comportements de réussite des enfants à tous les problèmes comparés, sauf au problème EEE^-, sont homogènes;

b) pour ce qui concerne la stabilité, nous dirons que, pour tous les tableaux relatifs à de petites variations, sauf encore une fois le tableau du 4b, on a :

- un nombre total de Réussite-Echecs et d'Echec-Réussites inférieur à celui du tableau de 5),

- des déséquilibres entre Réussite-Echecs et Echec-Réussites toujours moindres que celui du tableau de 5);

c) même si la stabilité des réussites ne peut être confirmée statistiquement, nous pensons néanmoins que les résultats ci-dessus, le type EEE⁻ de problèmes une fois éliminé, ne contredisent pas l'hypothèse que certaines régularités très fortes, qui marqueraient l'acquisition de structures additives chez le jeune enfant, devraient trouver leur expression dans nos résultats statistiques. D'ailleurs, à propos de l'instabilité des réussites, nous voudrions souligner que, le jeune enfant étant, par nature, instable, on obtiendra toujours des données statistiques imprécises (au sens de: dire qu'un enfant a réussi n'est pas suffisant car il faudrait préciser toutes les conditions dans lesquelles il a réussi). Mais, et c'est là un des intérêts de la méthode statistique selon Benzécri (cf. BENZECRI 1975), si les données individuelles sont seulement imprécises, et non pas dénaturées, comme cela semble être le cas dans notre expérience, la synthèse d'un grand nombre de cas agissant comme un filtre, dégagera des tendances générales justes.
A propos de l'homogénéité, vérifiée statistiquement, de presque tous les comportements de réussite, on peut aussi dire qu'elle est une garantie contre une trop grande proportion de réussites accidentelles et de réponses au hasard.

C. L'intérêt de poser un ensemble d'épreuves

0) Introduction:

Vu l'ampleur du travail, on aurait très bien pu poser, avec d'éventuels aménagements (nécessités par exemple par le fait qu'il faut disposer de plusieurs comptages pour l'attribution du Pss), l'une ou l'autre des épreuves seulement. Mais on perdrait ainsi la possibilité d'arriver à des interprétations plus fines que celles auxquelles on arrive à partir des performances de l'enfant à une épreuve isolée. Illustrons ce propos avec les exemples suivants:

1) Exemple 1

Aud(3;7) a récité "1, 2, 6" lors de l'épreuve 1; elle a compté-pointé "1, 2, 6" également lors de l'épreuve 4, pour 3. Lors de l'épreuve

2, pour la dénomination de 3, elle pointe chacun des jetons une et une seule fois avec son doigt, sans compter à voix audible, et conclut "6". L'interprétation est évidente : elle a vraissemblablement utilisé la suite idiosyncrasique stable "1, 2, 6" lors de son comptage-pointage de l'épreuve 2 et conclu correctement, c'est-à-dire en appliquant la règle cardinale pour 3. Sans les épreuves 1 et 4 on aurait été tenté de conclure à une réponse "au hasard" pour la dénomination de 3.

2) Exemple 2 :

Lors de l'épreuve de dénomination Loïc (3;6) dit "3" pour 2. Dans les jeux, il dira encore 3 fois, et systématiquement, "3" pour 2. Lors des problèmes verbaux, il répond ensuite 1 à $Bon^-(3,1)$ en expliquant: "Parce qu'il a mangé l'autre".

Interprétation : il utilise vraisemblablement sa représentation erronée de 3, sous forme de 2, pour résoudre le problème $Bon^-(3,1)$. De plus, comme les deux autres problèmes, $Ani^+(2,1)$ et $Pou^+(2,1)$, sont résolus correctement, on peut penser qu'il s'appuie sur la suite des nombres pour résoudre ces 2 problèmes, suite qu'il a récitée correctement jusqu'à 4 lors de l'épreuve 1.

3) Exemple 3:

Fan (4;3) a récité correctement jusqu'à 6 à l'épreuve 1 (8 à l'épreuve 4) et compté-pointé correctement 5, mais pour 3 jetons elle dit systématiquement 4. En effet:

- lors de l'épreuve de dénomination
  - 5 → "6" Regarde bien: "4"
  - 3 → "Encore 4". Sûre ? Regarde bien ! "4: c'était 9 avant"
  - 4 → "6". Sûre? Elle approuve
  - 2 → "2"
- lors de l'épreuve des Jeu^-, elle dit en 3 occasions 4 pour les 3 jetons présentés par l'expérimentateur (et aucune autre dénomination pour 3 jetons)

On voit donc que si l'enfant utilise sa représentation de 4 (i.e.3) elle répondra 4 à $Pou^+(2,1)$ et $Ani^+(2,1)$. Et c'est ce qu'elle a fait effectivement. Toutefois, elle a répondu 4 aussi à $Bon^-(3,1)$ en 1ère réponse (ensuite 5). Ceci a provoqué un doute chez l'expérimentateur: l'enfant répondait-elle 4 assez systématiquement ?

Elle a donc, d'autant plus qu'elle n'était pas avare en paroles, été soumise aux questions complémentaires suivantes:

- à la fin de l'épreuve 3 (problèmes verbaux), $Bon^-(3,1)$ est reposé. Réponse: "5". Mais Sonia elle m'avait dit 2! "Elle s'est trompée".
- à la fin de l'entretien, on pose (avec des énoncés évidents):

  $Bon^-(4,1)$. Réponse: "2"

  $Ani^+(4,1)$. " : "Ca fait 5 avec le tigre"

  C'est combien (3 jetons)? "4"

  $Oeufs^-(4,1)$:"2" (elle montre 2 doigts en même temps)

  Pourquoi ? "Parce qu' elle en avait 4 et elle en a cassé pour faire un gâteau".

  $Oeufs^+(4,1)$:"Ca fait 5"

<u>Conclusions:</u>

Avec les réponses de Fan à $Pou^+(2,1)$, $Ani^+(2,1)$, $Bon^-(4,1)$ et $Oeuf^-(4,1)$, nous avons un ensemble de faits qui permettent de conclure que l'enfant a très vraissemblablement utilisé sa représentation de 4 (i.e 3) pour résoudre ces problèmes.

Mais l'enfant n'ayant dénommé 3 aucune collection, nous ne voyons pas comment elle a répondu 4 puis 5 à $Bon^-(3,1)$.

Enfin, pour $Ani^+(4,1)$ et $Oeufs^+(4,1)$ elle aurait dû, en utilisant sa représentation de 4(i.e 3), trouver 4 et répondre 6 parce que 4 a été dénommé (2 fois et jamais autrement) 6 par elle. Mais elle a répondu 5: peut-être ne voulait-elle que garder un peu de son mystère!

D. <u>Les contrôles statistiques</u>

Nous avons utilisé:

1) <u>Le test du χ^2</u>: (réf. FAVERGE 1950, LEON 1977)

   -calculé par la méthode usuelle, on le notera χ^2, resp. χ^2_c s'il y a eu correction pour effectifs insuffisants;

   -calculé par la méthode de Mac Nemar, on le notera χ^2_M, resp. χ^2_{MC} s'il y a eu correction pour effectifs insuffisants;

   -le seuil de 0,05 a été fixé une fois pour toutes: pour ce seuil, le χ^2 lu à un degré de liberté est égal à 3,84.

2) <u>Le test d'implication de Gras</u> (réf. GRAS 1980)

   - on notera i.i l'indice d'implication
   - si $i.i < -1,64$, l'implication est admissible au seuil de 5%

- dans ce dernier cas, nous noterons $\underset{q}{\Rightarrow}$ pour montrer qu'il s'agit d'une quasi-implication

3) <u>la loi hypergéométrique</u> (réf. SIEGEL 1956)

<u>Remarque</u>: Nous utiliserons les abréviations suivantes:

s. = significatif
n.s. = non significatif
n.c. = non calculable

R E S U L T A T S   E T   C O M M E N T A I R E S

Chapitre IV : Tableaux des performances individuelles

" Il est toujours utile, même pour un débat dont l'enjeu épistémologique est capital, de s'accrocher à des résultats vérifiables ou réfutables".

P.Gréco, 1980 a.

IV. Tableaux des performances individuelles

A) Le codage

1) Connaissance de la suite conventionnelle des nombres-mots:

On retient le nombre n maximal tel que la suite 1, 2, ..., n "récitée" par l'enfant, au cours de l'épreuve 1 ou au cours d'un comptage en cours d'entretien, est parfaite.

2) Dénomination des nombres.

a) Réussite: on considère qu'un enfant a dénommé correctement un nombre n d'objets,

α) s'il a répondu, en 1ère ou 2e réponse, le nombre-mot n, éventuellement en conclusion d'un comptage à haute voix;

β) ou bien, toujours en 1ère ou 2e réponse, s'il a compté à haute voix 1, 2, ..., n sans conclure nettement (ou même faussement sur question de l'expérimentateur), c'est-à-dire sans reprendre le nombre-mot n tout seul, mais s'est, par ailleurs, vu attribuer selon les critères décrits en 5), le Pca(n)[ou Pca(k), $\forall$ k > n].

b) Echec = non-réussite:

Si l'enfant a répondu un nombre-mot simple, on indique ce nombre-mot dans le tableau des réponses. Toute autre dénomination, par exemple une suite de nombres (qui ne rentre pas dans le cas aβ))ou une décomposition additive du type (n-m) et (m), ou encore la réponse "Je sais pas", sera codée Non-Réponse.

Remarque : les enfants ayant échoué à une épreuve peuvent avoir donné 2 réponses erronées différentes. En général, on reporte alors la 1ère dans le tableau sauf si la 2e"améliore " la 1ère (on ne donne pas de définition rigoureuse d'une amélioration: cela serait bien trop compliqué; on préfère dans les passages délicats distinguer 1ère et 2e réponse).

3) Problèmes verbaux

a) Réussite: on considère qu'un enfant a résolu correctement un problème verbal dont la réponse est n α) s'il a répondu, en 1ère ou 2e réponse, le nombre-mot n, éventuellement au terme d'un comptage à haute voix;

β) ou bien, toujours en 1ère ou 2e réponse, s'il a compté à haute voix 1, 2, ..., n, même s'il n'a pas conclu nettement (ou même conclu faussement sur question).

b)Echec = non réussite (précisions analogues à celles du 2b).

4) Jeux

a)Réussite : si a - b = n, on considère qu'un enfant a réussi $Jeu^{-}(a,b)$,

α) s'il a répondu le nombre-mot n;

β) ou bien s'il a compté à haute voix 1, 2, ...,n (même s'il n'a pas conclu nettement);

γ) ou bien s'il a montré n doigts (même s'il n'a pas su indiquer correctement le nombre de doigts);

δ) ou bien encore s'il a répondu par une décomposition additive, du type [(n-m) et (m)] où $m < n$ et où (n-m) et (m) désignent évidemment chacune un nombre- mot.

b)Echec = non réussite (précisions analogues à celles du 2b, sauf que les questions n'ont pas été reposées).

5) Attributions des principes du "comment compter" pour n($n > 1$)

a) Introduction : considérant qu'un enfant peut avoir une méthode de comptage et/ou une suite idiosyncrasique qui ne correspondent pas nécessairement au comptage-pointage du doigt que l'on induit lors de l'épreuve 4, il a paru souhaitable, et c'était de toute façon nécessaire pour le Pss, de tenir compte d'autres comptages que ceux de l'épreuve 4, en distinguant autant que possible les comptages spontanés (= comptages au cours des épreuves 2 et des jeux) des comptages ou de la récitation induits.

b) Nous attribuons le Pbi(n) [resp. Pca(n)] à tout enfant qui a satisfait au moins l'une des deux conditions suivantes:

α) sa procédure de comptage respecte le Pbi(n) [resp. Pca(n)] lors de l'épreuve 4;

β) ses procédures de comptages respectent le Pbi(n) [resp. Pca(n)] lors des différents comptages spontanés de n (et des nombres supérieurs à n si c'est favorable à l'enfant) dans une majorité de cas et lors des différents comptages de nombres inférieurs à n, dans une majorité de cas également.

c) Nous attribuons le Pss(n) à tout enfant ayant satisfait les 2 conditions hiérarchiques suivantes:

α) le nombre maximum α de suites, dont le nombre de termes est $\geqslant n$ (les n premiers termes étant 2 à 2 distincts) et dont les n premiers termes sont respectivement identiques d'une suite à l'autre, qu'a utilisées l'enfant, lors des différents comptages et lors de la récitation, est $\geqslant 2$;

β) il n'a pas utilisé plus de $[\frac{\alpha}{2}]$ fois, lors des différents comptages et lors de la récitation, une suite dont l'un des n premiers termes, ou des m ($m < n$) premiers si elle n'a que m termes, au moins diffère du terme correspondant de "la" suite restreinte de n termes définie de manière implicite dans α).

(si α) détermine plusieurs suites, on choisit évidemment celle qui est la plus favorable à la vérification de β)).

6) Exemple

α) Résumé de l'entretien avec Mau(4;1):

Epreuve 1: elle récite "1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9"

Epreuve 2: 5 → elle compte à haute voix sans pointer "3, 4, 5, 6, 7, 8, ..., 13", puis elle pointe visuellement et en comptant: "1, 2, 3, 4, 5, 6, 7"

3 → "3" directement en montrant en même temps 3 doigts

4 → "3, 4, 5, 6, 7". Alors combien ? "comme ça"(vague geste de la main)

2 → "2" directement

Epreuve 3:

- Jeu$^-$(3,1): elle compte les 3 jetons :"4, 5, 6", puis répond au problème:"Je crois qu'il y en a 2". A l'ouverture de la main, elle commente:"J'ai trouvé!"
- Jeu$^-$(3,2): elle compte les 3 jetons: "1,2,3", puis répond "1" au problème.
- Jeu$^-$(5,2): elle compte les 5 jetons:"1, 2, 3, 4, 5" pour 2 elle dit "2" directement, puis répond: "3,4,5,6,7"*
- Jeu$^-$(4,3): compte les 4 : "2,3,4,5", puis les 3: "2,3,4" et répond:"Je crois qu'il y en a 1"

. Ani^{+} (2,1):"il y a 1 lion et 3,4 tigres". Après répétition, elle ne répond toujours pas de nombre précis, ni des données exactes.

. Bon^{-}(3,1): "Et ben 2"

. Pou^{+}(2,1): "2". Maintient après répétition

Epreuve 4: 5 → "1,2,3,4,5,6" (elle a compté 1 des jetons deux fois). Alors combien (cache) ?
"2,3,4,5,6,7,8"*
3 → "2,3,4" Alors combien (cache)? "2,3,4"*

β) Codage :

- connaissance de la suite des nombres: jusqu'à 7, puisqu'au cours de l'épreuve 2 elle a amélioré la récitation initiale (lorsqu'elle dépasse 7, elle n'a pas commencé à 1)
- dénomination des collections
- problèmes verbaux
- jeux
- Principes du "comment compter":

(pas de difficultés particulières: voir tableau p.36)

  . Pbi(5) n'est pas attribué puisque ni la condition α n'est satisfaite (elle a compté deux fois l'un des jetons au cours de l'épreuve 4), ni la condition β puisque si elle a essayé 3 fois spontanément de compter 5, elle n'a respecté qu'une fois sur les trois [au cours du Jeu^{-}(5,2)] le Pbi(5);
  . Pca(5) n'est pas attribué puisque ni α (épreuve 4), ni β (aucune conclusion à la suite d'un comptage spontané)n'est satisfaite ;
  . Pss(5): si l'on respecte*, elle a utilisé 6 suites d'au moins 5 termes, à partir desquelles on voit qu'elle vérifie la condition α) avec α = 4, la suite définie étant 1, 2, 3, 4, 5. Pour voir maintenant si elle vérifie la condition β), il faut aussi regarder les 5 suites de moins de 5 termes: il faudrait que sur les 11 suites recensées au total pas plus de $[\frac{\alpha}{2}] = [\frac{4}{2}] = 2$ ne "s'écartent" de la suite 1,2,3,4,5 : or, il y en a 6 (celles qui ne commencent pas par 1), donc Pss(5) n'est pas attribué;
  . Pbi(3) est attribué puisque α) (et aussi β d'ailleurs) est satisfaite
  Pca(3) n'est pas attribué
  Pss(3) " " " non plus: cette fois-ci α = 5, la suite définie est "1,2,3" mais il y a toujours les mêmes 6 suites qui s'en écartent

---

* Pour l'attribution du Pss on ne tiendra pas compte de ces 3 suites car elles n'accompagnent pas un comptage explicite.

alors que seulement $[\frac{5}{2}] = 2$ sont tolérées.

B) Les tableaux:

1) Lecture: De gauche à droite, on trouve successivement les colonnes:

Nom : il s'agit du prénom réduit à ses 3 premières (en général) lettres.

Les enfants sont rangés suivant le nombre de réussites total aux problèmes verbaux, jeux et à l'épreuve de dénomination. En cas d'égalité intervient le nombre de principes du comptage et, en dernier recours, la connaissance de la suite des nombres.

Age : 3;4 = 3ans 4 mois $\pm$ 15 jours

Sexe : g = garçon; f = fille

C.sociale: couche sociale (voir IIA et Annexe 1)

Suite problèmes: il s'agit de l'ordre dans lequel les problèmes ont été posés (voir IIC, Annexe 3 et Annexe 4)

Connaissance suite nombres : le nombre noté est n maximal du IV,A,1
30^+ = plus de 30

Colonnes des problèmes: X = réussite (voir IV,A,3et 4)
N-R = non-réponse (" " " " 4)
//// = problème non posé (" II,D, 5,b)

Colonnes dénomination: X = réussite (voir IV,A,2)
N-R = Non Réponse (voir IV,A,2)

Colonnes Principes du comptage : 0 = oui (voir IV,5)
\\\\ = pas de décision (voir II,D,5,b)

2) Tableaux

voir ci-après

Groupe d'Age : 6;3

Nom	Age	Sexe	C. sociale	Suite pbs	Connais. suite nbs	$Bon^-(5,2)$	$Bon^-(7,2)$	$Pro^+(4,2)$	$Pro^+(2,4)$	$Bil^-(3,1)$	$Bil^-(5,2)$	$Jeu^-(3,1)$	$Jeu^-(3,2)$	$Jeu^-(4,3)$	$Jeu^-(5,2)$	$Jeu^-(7,2)$	Dénomination 3	4	5	6	7	Principes du comptage 7 P_{bi}	P_{ss}	P_{ca}
Oli	6;2	g	B	7	30+	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Sté	6;0+	g	B	27	18	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Ali	6;1	F	C	22	30+	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Cor	6;1	F	C	17	28	X	X	X	X	X	4	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Sté	6;3	g	C	19	30+	X	X	X	X	4	4	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Sté	6;2	g	A	2	30+	X	X	X	X	3	6	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
oli	6;3	g	B	15	30+	X	X	X	X	4	7	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Emm	6;4	g	A	28	12	X	X	X	X	5	5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Gér	6;2	F	A	24	30+	X	X	X	X	N-R	7	X	X	X	X	3	X	X	X	X	X	o	o	o
Nel	6;4	F	A	23	19	X	X	X	X	N-R	N-R	X	X	X	X	3	X	X	X	X	X	o	o	o
Vér	6;5	F	B	13	19	X	X	X	X	N-R	5	X	X	X	X	7	X	X	X	X	X	o	o	o
Bru	6;1	g	B	30	14	X	6	X	X	3	5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Sop	6;5	F	A	20	30+	X	3	X	X	N-R	N-R	X	X	X	4	X	X	X	X	X	X	o	o	o
San	6;1	F	A	26	28	X	3	X	X	3	6	X	X	X	X	6	X	X	X	X	X	o	o	o
Del	6;3	F	A	31	19	X	X	X	N-R	4	4	X	X	X	4	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Ric	6;5	g	B	4	15	X	X	7	X	3	N-R	X	X	X	X	6	X	X	X	X	X	o	o	o
Cyr	6;5	g	A	25	30+	X	X	X	X	3	N-R	X	X	2	4	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Sta	6;4	F	A	8	28	X	10	X	4	4	5	X	X	X	X	6	X	X	X	X	X	o	o	o
Rém	6;3	g	B	11	28	X	X	X	X	3	5	X	X	2	4	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Hug	6;4	g	C	12	15	X	6	X	X	X	2	X	X	2	X	4	X	X	X	X	6	o	o	o
Sté	6;4	g	A	32	14	X	3	X	4	N-R	N-R	X	X	X	X	6	X	X	X	X	X	o	o	o
Nat	6;3	F	A	10	8	X	N-R	5	5	N-R	N-R	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Kat	6;5	F	B	29	30+	X	X	5	5	3	7	X	X	2	X	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Fré	6;5	g	A	3	30+	X	2	5	7	6	6	X	X	X	X	X	X	X	X	X	8	o	o	o
Aïc	6;1	g	A	5	19	X	6	X	7	3	5	X	X	2	X	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Nad	6;3	F	A	21	13	X	X	7	X	N-R	N-R	X	X	2	4	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Isa	6;3	F	B	9	24	X	3	3	5	4	N-R	X	X	2	X	6	X	X	X	X	X	o	o	o
Sta	6;2	F	A	14	14	X	6	X	4	3	5	3	2	X	X	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Den	6;4	F	A	1	7	X	X	5	X	3	N-R	X	X	X	X	3	X	X	4	5	5	o	o	o
Mou	6;3	g	A	16	9	X	1	3	N-R	N-R	N-R	N-R	X	N-R	N-R	7	X	X	X	X	X	o	o	o
Val	6;3	F	A	6	6	X	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R	X	2	X	X	4	4	14	3	4	4			
Moh	6;2	g	A	18	5							X	X	2	1	2	1	5	4	5	5			
Total réussites →						31	18	22	20	5	3	30	30	23	25	12	30	30	29	29	27	30	30	30

GRANDS

Groupe d'Age : 6;3

Nom	Age	Sexe	C. sociale	Suite nbs	Connais. suite nbs	$Bon^-(3,2)$	$Bon^-(7,2)$	$Pro^+(4,2)$	$Pro^+(2,4)$	$Bil^-(3,1)$	$Bil^-(3,2)$	$Jeu^-(3,1)$	$Jeu^-(3,2)$	$Jeu^-(4,3)$	$Jeu^-(5,2)$	$Jeu^-(7,2)$	Dénomination 3	4	5	6	7	Principes du comptage 7: P_{bi}	P_{ss}	P_{ca}
Oli	6;2	g	B	7	30+	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Sté	6;0+	g	B	27	18	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Ali	6;1	F	C	22	30+	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Cor	6;1	F	C	17	28	X	X	X	X	X	4	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Sté	6;3	g	C	19	30+	X	X	X	X	4	4	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Sté	6;2	g	A	2	30+	X	X	X	X	3	6	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
oli	6;3	g	B	15	30+	X	X	X	X	4	7	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Emm	6;4	g	A	28	12	X	X	X	X	5	5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Gér	6;2	F	A	24	30+	X	X	X	X	N-R	7	X	X	X	X	3	X	X	X	X	X	o	o	o
Nel	6;4	F	A	23	19	X	X	X	X	N-R	N-R	X	X	X	X	3	X	X	X	X	X	o	o	o
Vér	6;5	F	B	13	19	X	X	X	X	N-R	5	X	X	X	X	7	X	X	X	X	X	o	o	o
Bru	6;1	g	B	30	14	X	6	X	X	3	5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Sop	6;5	F	A	20	30+	X	3	X	X	N-R	N-R	X	X	X	4	X	X	X	X	X	X	o	o	o
San	6;1	F	A	26	28	X	3	X	X	3	6	X	X	X	X	6	X	X	X	X	X	o	o	o
Del	6;3	F	A	31	19	X	X	X	N-R	4	4	X	X	X	4	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Ric	6;5	g	B	4	15	X	X	7	X	3	N-R	X	X	X	X	6	X	X	X	X	X	o	o	o
Cyr	6;5	g	A	25	30+	X	X	X	X	3	N-R	X	X	2	4	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Sta	6;4	F	A	8	28	X	10	X	4	4	5	X	X	X	X	6	X	X	X	X	X	o	o	o
Rém	6;3	g	B	11	28	X	X	X	X	3	5	X	X	2	4	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Hug	6;4	g	C	12	15	X	6	X	X	X	2	X	X	2	X	4	X	X	X	X	6	o	o	o
Sté	6;4	g	A	32	14	X	3	X	4	N-R	N-R	X	X	X	X	6	X	X	X	X	X	o	o	o
Nat	6;3	F	A	10	8	X	N-R	5	5	N-R	N-R	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Kat	6;5	F	B	29	30+	X	X	5	5	3	7	X	X	2	X	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Fré	6;5	g	A	3	30+	X	2	5	7	6	6	X	X	X	X	X	X	X	X	X	8	o	o	o
Aïc	6;1	g	A	5	19	X	6	X	7	3	5	X	X	2	X	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Nad	6;3	F	A	21	13	X	X	7	X	N-R	N-R	X	X	2	4	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Isa	6;3	F	B	9	24	X	3	3	5	4	N-R	X	X	2	X	6	X	X	X	X	X	o	o	o
Sta	6;2	F	A	14	14	X	6	X	4	3	5	3	2	X	X	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Den	6;4	F	A	1	7	X	X	5	X	3	N-R	X	X	X	X	3	X	X	4	5	5	o	o	o
Mou	6;3	g	A	16	9	X	1	3	N-R	N-R	N-R	N-R	X	N-R	N-R	7	X	X	X	X	X	o	o	o
Val	6;3	F	A	6	6	X	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R	X	2	X	X	4	4	14	3	4	4			
Moh	6;2	g	A	18	5							X	X	2	1	2	1	5	4	5	5			
Total réussites →						31	18	22	20	5	3	30	30	23	25	12	30	30	29	29	27	30	30	30

GRANDS

Groupe d'Age : 5;9

Nom	Age	Sexe	C. sociale	Suite pbs	Connais. suite nbs	$Box^-(5,2)$	$Box^-(7,2)$	$Pro^+(4,2)$	$Pro^+(2,4)$	$Bi^-(3,1)$	$Bi^-(5,2)$	$Jeu^-(3,1)$	$Jeu^-(3,2)$	$Jeu^-(4,3)$	$Jeu^-(5,2)$	$Jeu^-(7,2)$	Dénomination 3	4	5	6	7	Principes du comptage 7 P_{bi}	P_{ss}	P_{ca}
Pas	5;7	g	B	12	27	X	X	X	X	X	4	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0	0	0
Cyr	5;10	g	C	20	14	X	X	X	7	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0	0	0
Car	5;7	F	C	6	30+	X	X	X	X	3	5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0	0	0
Sté	5;11	g	A	32	30+	X	X	X	X	X	5	X	X	X	X	4	X	X	X	X	X	0	0	0
Mal	5;8	F	A	3	30+	X	X	X	7	3	5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0	0	0
Fab	5;11	g	A	7	19	X	X	X	X	3	5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	6	0	0	0
Sam	5;7	g	B	28	15	X	X	X	X	4	6	X	X	X	X	N-R	X	X	X	X	X	0	0	0
Cyr	5;11	g	A	21	30+	X	X	X	X	3	5	X	X	2	4	X	X	X	X	X	X	0	0	0
Jea	5;10	g	A	18	27	X	6	X	7	3	X	X	X	X	X	4	X	X	X	X	X	0	0	0
Pat	5;8	F	B	8	26	X	10	X	X	3	5	X	X	X	X	3	X	X	X	X	X	0	0	0
Ben	5;10	g	B	19	30+	X	6	5	X	3	N-R	X	X	0	X	X	X	X	X	X	X	0	0	0
Dan	5;10	g	C	25	24	X	X	8	5	N-R	X	X	X	X	2	3	X	X	X	X	X	0	0	0
Sab	5;9	F	A	27	15	X	X	X	5	3	6	5	X	X	X	X	X	X	X	X	6	0	0	0
Vir	5;10	F	B	22	13	X	X	N-R	N-R	N-R	N-R	X	X	2	X	X	X	X	X	X	X	0	0	0
San	5;10	F	A	14	29	X	6	5	7	3	5	X	X	X	X	4	X	X	X	X	6	0	0	0
Sta	5;11	F	B	31	11	4	6	N-R	N-R	3	N-R	X	X	X	X	4	X	X	X	X	X	0	0	0
Thi	5;11	g	A	17	8	X	X	X	X	N-R	5	3	X	X	2	3	X	X	X	7	8	0	0	0
Sti	5;11	F	A	24	7	4	4	7	3	3	5	X	X	X	X	4	X	X	X	X	X	0	0	0
Dav	5;9	g	A	9	7	X	9	5	5	9	N-R	3	X	X	X	X	X	X	X	5	6	0	0	0
Ald	5;8	g	A	15	24	5	7	4	N-R	3	N-R	X	X	X	X	3	X	X	X	X	6		0	0
Jac.	5;11	g	B	4	13	X	9	5	N-R	4	N-R	X	2	X	X	3	X	X	X	X	9		0	0
Mar	5;10	F	C	11	13	X	4	5	7	X	5	3	X	X	2	3	X	X	X	5	X		0	0
Jan	5;9	F	B	29	20	10	8	5	8	10	N-R	X	X	X	2	8	X	X	X	X	6	0	0	0
Cen	5;8	F	A	10	20	1	1	5	5	3	N-R	X	X	2	5	3	X	X	X	X	X	0	0	0
Sté	5;6+	F	A	2	18	X	3	3	3	1	N-R	3	3	2	5	X	X	X	X	X	X	0	0	0
Cat	5;7	F	B	26	18	1	3	4	5	N-R	N-R	X	X	X	4	4	X	X	X	X	9	0	0	0
Ano	5;8	g	A	5	4	X	4	N-R	N-R	3	1	X	X	X	X	4	X	X	4	7	6			
Ang	5;9	F	A	13	14	X	3	N-R	N-R	N-R	N-R	3	X	2	4	N-R	X	X	X	5	8	0	0	0
Jor	5;7	g	B	1	6	5	4	5	5	3	5	3	X	2	5	8	X	X	X	X	N-R	0	0	0
Ali	5;7	F	A	23	10	2	2	N-R	N-R	N-R	N-R	X	X	X	N-R	N-R	4	X	X	7	8		0	0
Chi	5;10	F	A	16	9	N-R	N-R	N-R	N-R	3	N-R	X	2	X	X	N-R	X	N-R	N-R	N-R	4	0		0
Phi	5;11	g	A	30	0	////	////	////	////	////	////	X	2	X	1	2	X	X	2	4	N-R	0		0
Total réussites →					2	22	12	12	9	4	3	25	28	25	20	11	31	31	29	24	17	27	29	31

GRANDS

Groupe d'Age : 5;9

Nom	Age	Sexe	C. sociale	Suite pbs	Connais. suite nbs	$Bon^-(3,2)$	$Bon^-(7,2)$	$P^+_{Pro}(4,2)$	$P^+_{Pro}(2,4)$	$Bi^-(3,1)$	$Bi^-(3,2)$	$Jeu^-(3,1)$	$Jeu^-(3,2)$	$Jeu^-(4,3)$	$Jeu^-(5,2)$	$Jeu^-(7,2)$	Dénomination 3	4	5	6	7	Principes du comptage 7 P_{bi}	P_{ss}	P_{ca}
Pas	5;7	g	B	12	27	X	X	X	X	X	4	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Cyr	5;10	g	C	20	14	X	X	X	7	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Car	5;7	F	C	6	30^+	X	X	X	X	3	5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Sté	5;11	g	A	32	30^+	X	X	X	X	X	5	X	X	X	X	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Mal	5;8	F	A	3	30^+	X	X	X	7	3	5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Fab	5;11	g	A	7	19	X	X	X	X	3	5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	6	o	o	o
Sam	5;7	g	B	28	15	X	X	X	X	4	6	X	X	X	X	N-R	X	X	X	X	X	o	o	o
Cyr	5;11	g	A	21	30^+	X	X	X	X	3	5	X	X	2	4	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Jea	5;10	g	A	18	27	X	6	X	7	3	X	X	X	X	X	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Pat	5;8	F	B	8	26	X	10	X	X	3	5	X	X	X	X	3	X	X	X	X	X	o	o	o
Ben	5;10	g	B	19	30^+	X	6	5	X	3	N-R	X	X	0	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Dan	5;10	g	C	25	24	X	X	8	5	N-R	X	X	X	X	2	3	X	X	X	X	X	o	o	o
Sab	5;9	F	A	27	15	X	X	X	5	3	6	5	X	X	X	X	X	X	X	X	6	o	o	o
Vir	5;10	F	B	22	13	X	X	N-R	N-R	N-R	N-R	X	X	2	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
San	5;10	F	A	14	29	X	6	5	7	3	5	X	X	X	X	4	X	X	X	X	6	o	o	o
Sta	5;11	F	B	31	11	4	6	N-R	N-R	3	N-R	X	X	X	X	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Thi	5;11	g	A	17	8	X	X	X	X	N-R	5	3	X	X	2	3	X	X	X	7	8	o	o	o
Sti	5;11	F	A	24	7	4	4	7	3	3	5	X	X	X	X	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Dav	5;9	g	A	9	7	X	9	5	5	9	N-R	3	X	X	X	X	X	X	X	5	6	o	o	o
Ald	5;8	g	A	15	24	5	7	4	N-R	3	N-R	X	X	X	X	3	X	X	X	X	6		o	o
Jac.	5;11	g	B	4	13	X	9	5	N-R	4	N-R	X	2	X	X	3	X	X	X	X	9		o	o
Mar	5;10	F	C	11	13	X	4	5	7	X	5	3	X	X	2	3	X	X	X	5	X		o	o
Jan	5;9	F	B	29	20	10	8	5	8	10	N-R	X	X	X	2	8	X	X	X	X	6	o	o	o
Cen	5;8	F	A	10	20	1	1	5	5	3	N-R	X	X	2	5	3	X	X	X	X	X	o	o	o
Sté	$5;6^+$	F	A	2	18	X	3	3	3	1	N-R	3	3	2	5	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Cat	5;7	F	B	26	18	1	3	4	5	N-R	N-R	X	X	X	4	4	X	X	X	X	9	o	o	o
Ano	5;8	g	A	5	4	X	4	N-R	N-R	3	1	X	X	X	X	4	X	X	4	7	6			
Ang	5;9	F	A	13	14	X	3	N-R	N-R	N-R	N-R	3	X	2	4	N-R	X	X	X	5	8	o	o	o
Jor	5;7	g	B	1	6	5	4	5	5	3	5	3	X	2	5	8	X	X	X	X	N-R	o	o	o
Ali	5;7	F	A	23	10	2	2	N-R	N-R	N-R	N-R	X	X	X	N-R	N-R	4	X	X	7	8		o	o
Chi	5;10	F	A	16	9	N-R	N-R	N-R	N-R	3	N-R	X	2	X	X	N-R	X	N-R	N-R	N-R	4	o		o
Phi	5;11	g	A	30	0							X	2	X	1	2	X	X	2	4	N-R	o		o
Total réussites →					2	22	12	12	9	4	3	25	28	15	20	11	31	31	29	24	17	27	29	31

GRANDS Groupe d'Age : 5;3

Nom	Age	Sexe	C. sociale	Suite pbs	Connais. suite nbs	$\text{Bon}^-(5,2)$	$\text{Bon}^-(7,2)$	$\text{Pro}^+(4,2)$	$\text{Pro}^+(2,4)$	$\text{Bil}^-(3,1)$	$\text{Bil}^-(5,2)$	$\text{Jeu}^-(3,1)$	$\text{Jeu}^-(3,2)$	$\text{Jeu}^-(4,3)$	$\text{Jeu}^-(5,2)$	$\text{Jeu}^-(7,2)$	Dénomination					Principes du comptage 7		
																	3	4	5	6	7	Pbi	Pss	Pca
Mat	$5;6^-$	g	C	17	30^+	X	X	X	X	3	5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Jea	5;2	g	B	5	30^+	X	X	X	X	X	N-R	X	X	X	X	6	X	X	X	X	X	o	o	o
Pie	$5;6^-$	g	B	32	28	X	X	X	X	X	4	X	X	X	X	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Aur	5;2	F	C	20	19	X	4	X	X	X	X	X	X	X	X	N-R	X	X	X	X	X	o	o	o
Car	$5;6^-$	F	A	14	19	X	4	5	X	X	X	X	X	2	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Aul	5;2	F	B	19	30^+	X	8	X	X	X	X	X	X	X	X	6	X	X	X	5	6	o	o	o
Man	5;5	g	A	24	12	X	3	N-R	5	N-R	N-R	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Cél	5;3	F	B	15	9	X	3	5	5	X	X	X	X	X	X	4	X	X	X	X	9		o	o
Aud	$5;6^-$	F	A	7	15	X	6	N-R	N-R	3	5	X	X	X	X	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Vér	$5;6^-$	F	A	1	14	X	3	X	5	N-R	6	4	X	2	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Séb	5;3	g	A	6	14	X	X	4	4	4	6	X	X	X	N-R	4	X	X	X	X	X	o	o	o
San	5;2	F	A	8	19	X	6	7	N-R	3	5	X	X	X	2	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Lau	5;1	F	A	9	14	5	8	5	5	X	X	X	X	2	X	X	X	X	X	N-R	6	o	o	o
Rob	$5;0^+$	F	A	28	12	X	4	5	4	N-R	N-R	X	X	2	4	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Fab	$5;0^+$	g	B	25	6	2	9	5	5	N-R	N-R	X	X	X	X	X	X	X	X	X	6	o	o	o
Her	5;1	g	B	30	6	X	3	5	5	5	X	X	X	X	X	4	X	X	X	13	13		o	o
Dav	5;3	g	A	22	18	X	3	N-R	N-R	N-R	N-R	X	3	X	X	X	X	X	X	N-R	6	o	o	o
Bén	5;3	F	A	23	7	2	2	N-R	4	N-R	N-R	X	X	X	4	3	X	X	X	X	X	o	o	o
Arn	5;0	g	B	4	15	5	7	4	2	1	N-R	X	2	X	2	6	X	X	X	X	X	o	o	o
Far	5;1	g	A	13	13	5	N-R	5	N-R	N-R	N-R	X	X	2	5	N-R	X	X	X	X	X	o	o	o
Dam	5;1	g	A	11	10	X	3	N-R	N-R	3	5	N-R	X	5	4	7	X	X	X	X	X	o	o	o
Ali	5;4	F	A	29	10	5	6	5	3	3	6	X	X	2	X	6	X	X	X	X	8		o	o
Sté	5;3	g	A	31	8	4	3	N-R	3	N-R	4	4	X	X	2	4	X	X	X	X	6	o	o	o
Lou	5;1	F	A	10	12	1	X	5	N-R	N-R	N-R	X	X	X	2	3	X	X	4	5	6	o	o	
Ala	$5;0^+$	g	A	27	7	X	3	5	8	3	4	X	X	X	2	2	X	X	10	12	8	o		o
Gae	5;3	F	A	2	7	2	N-R	2	N-R	N-R	N-R	X	X	X	N-R	N-R	X	X	X	5	5		o	
Ced	$5;6^-$	g	A	3	11	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R	X	X	X	N-R	3	X	X	X	N-R	N-R			
Oli	5;4	g	B	12	6	///	///	///	///	///	///	X	X	X	X	3	10	X	10	5	8			
Jér	5;3	g	A	26	5	2	2	N-R	3	N-R	2	X	X	X	2	3	X	3	3	3	4			
Jér	5;4	g	A	21	7	///	///	///	///	///	///	3	2	X	2	3	7	6	X	9	X	o		o
Sté	5;1	g	A	16	2	///	///	///	///	///	///	4	X	X	2	4	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R			
Son	5;3	F	A	18	2	2	3	N-R	N-R	3	5	5	3	3	X	3	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R			
Total réussites →						17	5	6	6	7	6	26	28	24	17	8	28	28	26	19	16	23	25	25

GRANDS

Groupe d'Age : 5;3

Nom	Age	Sexe	C. sociale	Suite pbs	Connais. suite nbs	$Bon^-(5,2)$	$Bon^-(7,2)$	$Pro^+(4,2)$	$Pro^+(2,4)$	$Bil^-(3,1)$	$Bil^-(5,2)$	$Jeu^-(3,1)$	$Jeu^-(3,2)$	$Jeu^-(4,3)$	$Jeu^-(5,2)$	$Jeu^-(7,2)$	Dénomination 3	4	5	6	7	Principes du comptage 7 Pbi	Pss	Pca
Mat	5;6-	g	C	17	30+	X	X	X	X	3	5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Jea	5;2	g	B	5	30+	X	X	X	X	X	N-R	X	X	X	X	6	X	X	X	X	X	o	o	o
Pie	5;6-	g	B	32	28	X	X	X	X	X	4	X	X	X	X	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Aur	5;2	F	C	20	19	X	4	X	X	X	X	X	X	X	X	N-R	X	X	X	X	X	o	o	o
Car	5;6-	F	A	14	19	X	4	5	X	X	X	X	X	2	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Aul	5;2	F	B	19	30+	X	8	X	X	X	X	X	X	X	X	6	X	X	X	5	6	o	o	o
Man	5;5	g	A	24	12	X	3	N-R	5	N-R	N-R	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Cél	5;3	F	B	15	9	X	3	5	5	X	X	X	X	X	X	4	X	X	X	X	9		o	o
Aud	5;6-	F	A	7	15	X	6	N-R	N-R	3	5	X	X	X	X	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Vér	5;6-	F	A	1	14	X	3	X	5	N-R	6	4	X	2	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Séb	5;3	g	A	6	14	X	X	4	4	4	6	X	X	X	N-R	4	X	X	X	X	X	o	o	o
San	5;2	F	A	8	19	X	6	7	N-R	3	5	X	X	X	2	4	X	X	X	X	X	o	o	o
Lau	5;1	F	A	9	14	5	8	5	5	X	X	X	X	2	X	X	X	X	X	N-R	6	o	o	o
Rob	5;0+	F	A	28	12	X	4	5	4	N-R	N-R	X	X	2	4	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Fab	5;0+	g	B	25	6	2	9	5	5	N-R	N-R	X	X	X	X	X	X	X	X	X	6	o	o	o
Her	5;1	g	B	30	6	X	3	5	5	5	X	X	X	X	X	4	X	X	X	13	13		o	o
Dav	5;3	g	A	22	18	X	3	N-R	N-R	N-R	N-R	X	3	X	X	X	X	X	X	N-R	6	o	o	o
Bén	5;3	F	A	23	7	2	2	N-R	4	N-R	N-R	X	X	X	4	3	X	X	X	X	X	o	o	o
Arn	5;0	g	B	4	15	5	7	4	2	1	N-R	X	2	X	2	6	X	X	X	X	X	o	o	o
Far	5;1	g	A	13	13	5	N-R	5	N-R	N-R	N-R	X	X	2	5	N-R	X	X	X	X	X	o	o	o
Dam	5;1	g	A	11	10	X	3	N-R	N-R	3	5	N-R	X	5	4	7	X	X	X	X	X	o	o	o
Ali	5;4	F	A	29	10	5	6	5	3	3	6	X	X	2	X	6	X	X	X	X	8		o	o
Sté	5;3	g	A	31	8	4	3	N-R	3	N-R	4	4	X	X	2	4	X	X	X	X	6	o	o	o
Lou	5;1	F	A	10	12	1	X	5	N-R	N-R	N-R	X	X	X	2	3	X	X	4	5	6	o	o	
Ala	5;0+	g	A	27	7	X	3	5	8	3	4	X	X	X	2	2	X	X	10	12	8	o		o
Cae	5;3	F	A	2	7	2	N-R	2	N-R	N-R	N-R	X	X	X	N-R	N-R	X	X	X	5	5		o	
Ced	5;6-	g	A	3	11	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R	X	X	X	N-R	3	X	X	X	N-R	N-R			
Oli	5;4	g	B	12	6							X	X	X	X	3	10	X	10	5	8			
Jér	5;3	g	A	26	5	2	2	N-R	3	N-R	2	X	X	X	2	3	X	3	3	3	4			
Jér	5;4	g	A	21	7							3	2	X	2	3	7	6	X	9	X	o		o
Sté	5;1	g	A	16	2							4	X	X	2	4	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R			
Son	5;3	F	A	18	2	2	3	N-R	N-R	3	5	5	3	3	X	3	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R			
Total →						17	5	6	6	7	6	26	28	24	17	8	28	28	26	19	16	23	25	25

MOYENS Groupe d' Age: 4;9

Nom	Age	Sexe	C.sociale	Suite pbs	Connais. suite nbs	Ani+ (2,1)	Pou+ (2,1)	Bon− (3,1)	Jeu− (3,1)	Jeu− (3,2)	Jeu− (4,3)	Jeu− (5,2)	Dénomination 2	3	4	5	Principes du comptage de 5 Pbi	Pss	Pca
Sév	4;8	F	B	S1	24	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Bla	4;9	F	C	S2	15	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Xav	4;11	g	C	S6	13	X	X	X	X	3	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Kév	4;9	g	A	S5	13	X	X	X	X	X	X	2	X	X	X	X	o	o	o
Sté	4;7	g	A	S2	9	X	X	X	X	X	X	2	X	X	X	X	o	o	o
Ale	4;9	g	A	S1	5	X	X	X	X	X	2	X	X	X	X	X	o	o	o
Fré	4;8	g	A	S8	14	X	X	X	X	2	2	X	X	X	X	X	o	o	o
Ale	4;11	g	A	S5	14	X	X	X	N-R	X	2	X	X	X	X	X	o	o	o
Isa	4;9	F	B	S8	10	X	X	X	X	X	2	4	X	X	X	X	o	o	o
Raj	4;6+	g	A	S7	9	X	X	X	3	X	X	4	X	X	X	X	o	o	o
Lae	4;8	F	A	S2	3	X	X	X	X	X	X	2	X	X	N-R	X			o
Val	4;7	F	A	S6	8	X	X	X	X	4	X	4	X	X	X	4	o	o	o
Yva	4;10	g	B	S3	6	X	X	X	N-R	X	2	N-R	X	X	X	X	o	o	o
Min	4;8	F	A	S3	15	2	X	X	X	X	X	X	X	X	3	2	o	o	
Dav	4;6+	g	A	S1	2	X	X	X	X	X	X	X	X	N-R	N-R	N-R			
Kar	4;6+	F	A	S4	20	X	X	4	X	N-R	2	N-R	X	X	X	X	o	o	o
Ren	5;0−	g	B	S7	14	X	X	3	3	2	X	4	X	X	X	X	o	o	o
Aur	4;6+	F	C	S8	6	X	X	X	X	X	2	2	X	X	N-R	4	o	o	o
Oli	4;11	g	A	S6	5	X	X	3	X	3	X	2	X	X	X	N-R	o	o	
Ann	4;7	F	B	S3	4	X	X	X	X	X	X	2	X	5	N-R	N-R	o	o	
Mag	4;11	F	A	S4	6	X	X	1	X	X	X	X	X	N-R	N-R	N-R		o	
Sou	4;8	F	A	S4	8	4	N-R	4	X	2	X	N-R	X	X	X	X	o	o	o
Sté	4;8	F	B	S2	5	X	N-R	X	X	2	X	1	X	X	3	N-R	o		
Dav	4;8	g	B	S7	5	1	5	X	X	X	5	5	3	X	5	X	o	o	
Fré	4;10	g	B	S5	3	7	7	1	X	X	2	X	X	5	3	X	o		
Car	5;0−	F	A	S5	6	N-R	X	1	3	N-R	2	4	X	X	X	N-R	o	o	o
Ibt	4;8	F	A	S4	16	X	X	N-R	X	N-R	2	N-R	X	N-R	3	N-R		o	o
Dav	4;9	g	A	S8	4	N-R	N-R	X	X	X	2	N-R	X	6	N-R	6			
Nic	4;11	F	A	S1	3	N-R	4	X	X	X	2	4	X	7	7	N-R			
Eri	4;10	g	A	S6	6	N-R	N-R	3	N-R	2	N-R	1	X	X	X	4	o	o	o
Hél	4;7	F	A	S3	6	N-R	N-R	3	N-R	X	N-R	1	X	N-R	N-R	N-R			
Mar	5;0−	F	A	S7	5	N-R	N-R	N-R	N-R	3	11	X	N-R	N-R	N-R	N-R	o		
Total → réussites						22	23	21	24	20	16	11	30	23	18	17	25	24	20

MOYENS Groupe d' Age : 4; 9

Nom	Age	Sexe	C. sociale	Suite pbs	Connais. suite nbs	$Ani^{+}(2,1)$	$Pou^{+}(2,1)$	$Bon^{-}(3,1)$	$Jeu^{-}(3,1)$	$Jeu^{-}(3,2)$	$Jeu^{-}(4,3)$	$Jeu^{-}(5,2)$	Dénomination 2	3	4	5	Principes du comptage de 5 Pbi	Pss	Pca
Sév	4;8	F	B	S1	24	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Bla	4;9	F	C	S2	15	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Xav	4;11	g	C	S6	13	X	X	X	X	3	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Kév	4;9	g	A	S5	13	X	X	X	X	X	X	2	X	X	X	X	o	o	o
Sté	4;7	g	A	S2	9	X	X	X	X	X	X	2	X	X	X	X	o	o	o
Ale	4;9	g	A	S1	5	X	X	X	X	X	2	X	X	X	X	X	o	o	o
Fré	4;8	g	A	S8	14	X	X	X	X	2	2	X	X	X	X	X	o	o	o
Ale	4;11	g	A	S5	14	X	X	X	N-R	X	2	X	X	X	X	X	o	o	o
Isa	4;9	F	B	S8	10	X	X	X	X	X	2	4	X	X	X	X	o	o	o
Raj	$4;6^{+}$	g	A	S7	9	X	X	X	3	X	X	4	X	X	X	X	o	o	o
Lae	4;8	F	A	S2	3	X	X	X	X	X	X	2	X	X	N-R	X			o
Val	4;7	F	A	S6	8	X	X	X	X	4	X	4	X	X	X	4	o	o	o
Yva	4;10	g	B	S3	6	X	X	X	N-R	X	2	N-R	X	X	X	X	o	o	o
Min	4;8	F	A	S3	15	2	X	X	X	X	X	X	X	X	3	2	o	o	
Dav	$4;6^{+}$	g	A	S1	2	X	X	X	X	X	X	X	X	N-R	N-R	N-R			
Kar	$4;6^{+}$	F	A	S4	20	X	X	4	X	N-R	2	N-R	X	X	X	X	o	o	o
Ren	$5;0^{-}$	g	B	S7	14	X	X	3	3	2	X	4	X	X	X	X	o	o	o
Aur	$4;6^{+}$	F	C	S8	6	X	X	X	X	X	2	2	X	X	N-R	4	o	o	o
Oli	4;11	g	A	S6	5	X	X	3	X	3	X	2	X	X	X	N-R	o	o	
Ann	4;7	F	B	S3	4	X	X	X	X	X	X	2	X	5	N-R	N-R	o	o	
Mag	4;11	F	A	S4	6	X	X	1	X	X	X	X	X	N-R	N-R	N-R		o	
Sou	4;8	F	A	S4	8	4	N-R	4	X	2	X	N-R	X	X	X	X	o	o	o
Sté	4;8	F	B	S2	5	X	N-R	X	X	2	X	1	X	X	3	N-R	o		
Dav	4;8	g	B	S7	5	1	5	X	X	X	5	5	3	X	5	X	o	o	
Fré	4;10	g	B	S5	3	7	7	1	X	X	2	X	X	5	3	X	o		
Car	$5;0^{-}$	F	A	S5	6	N-R	X	1	3	N-R	2	4	X	X	X	N-R	o	o	o
Ibt	4;8	F	A	S4	16	X	X	N-R	X	N-R	2	N-R	X	N-R	3	N-R		o	o
Dav	4;9	g	A	S8	4	N-R	N-R	X	X	X	2	N-R	X	6	N-R	6			
Nic	4;11	F	A	S1	3	N-R	4	X	X	X	2	4	X	7	7	N-R			
Eri	4;10	g	A	S6	6	N-R	N-R	3	N-R	2	N-R	1	X	X	X	4	o	o	o
Hél	4;7	F	A	S3	6	N-R	N-R	3	N-R	X	N-R	1	X	N-R	N-R	N-R			
Mar	$5;0^{-}$	F	A	S7	5	N-R	N-R	N-R	N-R	3	11	X	N-R	N-R	N-R	N-R	o		
Total → réussites						22	23	21	24	20	16	11	30	23	18	17	25	24	20

Nom	Age	Sexe	C. sociale	Suite pbs	Connais. suite nbs	Ani$^+$(2,1)	Pou$^+$(2,1)	Bon$^-$(3,1)	Jeu$^-$(3,1)	Jeu$^-$(3,2)	Jeu$^-$(4,3)	Jeu$^-$(5,2)	Dénomination 2	3	4	5	Principes du comptage de 5 Pbi	Pss	Pca
San	4;6	F	A	S7	24	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0	0	0
Car	4;5	F	B	S5	15	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0	0	0
Max	4;5	g	B	S8	22	X	X	X	X	X	X	4	X	X	X	X	0	0	0
Deb	4;4	F	A	S2	14	X	X	X	X	2	X	X	X	X	X	X	0	0	0
Lud	$4;6^-$	F	B	S5	12	X	X	3	3	X	X	X	X	X	X	X	0	0	0
Eri	4;5	g	B	S8	6	X	X	X	X	X	2	1	X	X	X	X	0	0	0
Ger	4;1	F	B	S1	6	X	X	X	X	X	2	X	X	X	X	4	0	0	0
Car	4;1	F	B	S2	27	X	X	X	X	N-R	3	N-R	X	X	X	X	0	0	0
Eri	4;2	g	B	S2	18	X	2	X	X	2	X	1	X	X	X	X	0	0	0
Dav	$4;6^-$	g	A	S3	16	X	X	X	X	X	2	X	X	X	3	3	0	0	0
Ale	$4;6^-$	g	A	S1	15	X	X	N-R	3	X	X	N-R	X	X	X	X	0	0	0
Jul	$4;0^+$	g	B	S3	14	X	X	3	X	X	X	2	X	X	X	6	0	0	0
Lei	4;4	F	A	S6	14	2	X	3	X	3	X	X	X	X	X	X	0	0	0
Jac	$4;0^+$	g	B	S3	3	X	X	X	3	X	X	N-R	X	X	9	10	0		
Mau	4;1	F	A	S7	7	N-R	2	X	X	X	X	N-R	X	X	N-R	N-R			
Car	4;5	g	A	S1	6	2	N-R	X	X	X	X	2	X	N-R	2	2	0		
San	4;3	F	A	S7	3	N-R	N-R	X	1	X	2	X	X	X	N-R	N-R			
Jea	4;4	g	B	S6	3	X	2	X	X	3	X	1	X	2	2	3			
Rég	4;5	g	A	S8	9	10	2	X	X	2	2	1	X	X	12	11	0	0	0
Fan	4;3	F	A	S3	8	4	4	4	X	X	X	1	X	4	6	9	0	0	0
Sté	4;2	F	A	S5	6	X	5	X	N-R	N-R	N-R	1	X	X	N-R	N-R	0	0	0
Eli	4;3	F	A	S7	4	X	X	X	N-R	N-R	N-R	N-R	X	N-R	N-R	N-R			
Dav	4;1	g	A	S1	3	2	2	X	X	X	2	1	X	2	N-R	N-R			
Cyr	4;1	g	A	S5	4	2	N-R	X	X	2	6	1	X	N-R	N-R	N-R	0	0	
Fik	4;5	F	A	S4	4	X	4	N-R	X	N-R	X	1	3	6	N-R	N-R	0	0	
Raf	4;1	g	A	S6	4	2	N-R	1	X	N-R	X	2	X	10	1	17	0		
Vir	4;1	F	B	S4	4	6	N-R	X	X	N-R	N-R	N-R	X	2	3	3	0		
Hen	4;5	g	A	S4	4	2	2	X	X	10	10	1	X	2	2	2			
Chi	4;5	F	A	S8	3	N-R	5	N-R	5	6	X	1	X	X	6	6			
Syl	4;1	F	A	S2	3	2	X	X	5	5	2	1	X	5	8	7			
Cla	4;1	F	B	S6	2	N-R	N-R	X	X	2	2	5	X	N-R	N-R	N-R			
Sté	$4;0^+$	g	B	S4	4	4	N-R	4	8	4	X	1	X	8	3	4			
Total → réussites						17	15	23	23	15	18	8	31	19	12	10	22	18	16

MOYENS — Groupe d'Age : 4;3

Nom	Age	Sexe	C.sociale	Suite pbs	Connais. suite nbs	$Ani^{+}(2,1)$	$Pou^{+}(2,1)$	$Bon^{-}(3,1)$	$Jeu^{-}(3,1)$	$Jeu^{-}(3,2)$	$Jeu^{-}(4,3)$	$Jeu^{-}(5,2)$	Dénomination				Principes du comptage de 5		
													2	3	4	5	Pbi	Pss	Pca
San	4;6	F	A	S7	24	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0	0	0
Car	4;5	F	B	S5	15	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0	0	0
Max	4;5	g	B	S8	22	X	X	X	X	X	X	4	X	X	X	X	0	0	0
Deb	4;4	F	A	S2	14	X	X	X	X	2	X	X	X	X	X	X	0	0	0
Lud	4;6-	F	B	S5	12	X	X	3	3	X	X	X	X	X	X	X	0	0	0
Eri	4;5	g	B	S8	6	X	X	X	X	X	2	1	X	X	X	X	0	0	0
Ger	4;1	F	B	S1	6	X	X	X	X	X	2	X	X	X	X	4	0	0	0
Car	4;1	F	B	S2	27	X	X	X	X	N-R	3	N-R	X	X	X	X	0	0	0
Eri	4;2	g	B	S2	18	X	2	X	X	2	X	1	X	X	X	X	0	0	0
Dav	4;6-	g	A	S3	16	X	X	X	X	X	2	X	X	X	3	3	0	0	0
Ale	4;6-	g	A	S1	15	X	X	N-R	3	X	X	N-R	X	X	X	X	0	0	0
Jul	4;0+	g	B	S3	14	X	X	3	X	X	X	2	X	X	X	6	0	0	0
Lei	4;4	F	A	S6	14	2	X	3	X	3	X	X	X	X	X	X	0	0	0
Jac	4;0+	g	B	S3	3	X	X	X	3	X	X	N-R	X	X	9	10	0		
Mau	4;1	F	A	S7	7	N-R	2	X	X	X	X	N-R	X	X	N-R	N-R			
Car	4;5	g	A	S1	6	2	N-R	X	X	X	X	2	X	N-R	2	2	0		
San	4;3	F	A	S7	3	N-R	N-R	X	1	X	2	X	X	X	N-R	N-R			
Jea	4;4	g	B	S6	3	X	2	X	X	3	X	1	X	2	2	3			
Rég	4;5	g	A	S8	9	10	2	X	X	2	2	1	X	X	12	11	0	0	0
Fan	4;3	F	A	S3	8	4	4	4	X	X	X	1	X	4	6	9	0	0	0
Sté	4;2	F	A	S5	6	X	5	X	N-R	N-R	N-R	1	X	X	N-R	N-R	0	0	0
Eli	4;3	F	A	S7	4	X	X	X	N-R	N-R	N-R	N-R	X	N-R	N-R	N-R			
Dav	4;1	g	A	S1	3	2	2	X	X	X	2	1	X	2	N-R	N-R			
Cyr	4;1	g	A	S5	4	2	N-R	X	X	2	6	1	X	N-R	N-R	N-R	0	0	
Fik	4;5	F	A	S4	4	X	4	N-R	X	N-R	X	1	3	6	N-R	N-R	0	0	
Raf	4;1	g	A	S6	4	2	N-R	1	X	N-R	X	2	X	10	1	17	0		
Vir	4;1	F	B	S4	4	6	N-R	X	X	N-R	N-R	N-R	X	2	3	3	0		
Hen	4;5	g	A	S4	4	2	2	X	X	10	10	1	X	2	2	2			
Chi	4;5	F	A	S8	3	N-R	5	N-R	5	6	X	1	X	X	6	6			
Syl	4;1	F	A	S2	3	2	X	X	5	5	2	1	X	5	8	7			
Cla	4;1	F	B	S6	2	N-R	N-R	X	X	2	2	5	X	N-R	N-R	N-R			
Sté	4;0+	g	B	S4	4	4	N-R	4	8	4	X	1	X	8	3	4			
Total → réussites						17	15	23	23	15	18	8	31	19	12	10	22	18	16

PETITS Groupe d'Age : 3;9

Nom	Age	Sexe	C. sociale	Suite pbs	Connais. suite nbs	Ani+(2,1)	Pou+(2,1)	Bon−(3,1)	Jeu(3,1)	Jeu(3,2)	Jeu(4,3)	Jeu(5,2)	Dénomination 1	2	3	4	Principes du comptage de 3 Pbi	Pss	Pca
Fré	3;9	g	B	S1	5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	N-R	0	0	0
Nic	3;7	g	C	S5	19	X	X	X	X	X	3	4	X	X	X	X	0	0	0
Ann	3;8	F	B	S4	13	X	X	X	X	X	2	N-R	X	X	X	X	0	0	0
Aur	3;10	F	C	S1	14	X	X	X	N-R	3	X	X	X	X	X	X	0	0	0
Ben	3;10	g	C	S6	5	X	X	X	X	2	6	X	X	X	X	X	0	0	0
Mir	3;10	F	A	S7	3	X	X	1	X	X	X	X	X	X	X	3	0	0	
Lav	3;10	F	C	S8	8	X	X	X	X	X	2	X	X	X	X	N-R	0		
Sah	3;8	F	B	S7	9	X	X	X	N-R	X	N-R	N-R	X	X	X	X	0	0	0
Sté	3;9	F	B	S1	18	X	X	1	3	X	X	1	X	X	X	3	0	0	0
Sté	3;11	g	B	S2	14	X	X	X	X	N-R	2	N-R	X	X	X	5	0	0	0
Aud	3;7	F	C	S1	2	2	N-R	X	X	X	X	X	X	X	6	2	0	0	0
Chi	3;9	F	A	S3	0	X	X	X	X	X	3	2	X	X	2	3			
Han	3;8	g	A	S8	8	2	1	X	X	X	X	1	X	X	2	2		0	
Vir	3;10	F	B	S8	5	N-R	X	X	X	3	2	X	X	X	11	3	0		
Sév	3;10	F	B	S5	7	N-R	N-R	X	X	X	X	1	X	N-R	N-R	N-R	0	0	
Fra	3;10	g	B	S7	6	2	2	X	X	2	X	1	X	X	N-R	N-R	0	0	
Rac	3;10	F	B	S6	5	2	2	X	X	2	X	2	X	X	4	2		0	
Est	3;8	F	B	S4	2	2	2	X	X	2	X	1	X	X	2	2		0	
Est	3;7	F	A	S5	0	N-R	N-R	X	X	2	X	1	X	X	N-R	2			
Kam	3;6+	g	A	S7	2	N-R	4	X	N-R	2	X	N-R	X	X	5	6	0	0	0
Yol	3;7	F	A	S3	3	2	N-R	X	4	X	3	N-R	X	X	N-R	N-R	0		
Jer	3;7	g	A	S2	2	2	2	X	X	6	N-R	5	X	X	2	6	0		
Dan	3;11	g	A	S3	3	N-R	N-R	N-R	3	X	X	1	X	X	N-R	N-R			
Cor	3;9	F	A	S2	5	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R	X	N-R	X	X	N-R	N-R	0	0	0
Myr	3;9	F	C	S4	4	4	4	4	N-R	X	4	4	X	X	4	6		0	0
Eri	3;11	g	A	S6	4	X	N-R	0	1	3	2	1	X	X	N-R	N-R	0		
Fik	3;7	g	A	S6	4	N-R	2	X	X	2	2	1	X	N-R	N-R	N-R	0		
Céc	3;10	F	B	S5	2	N-R	N-R	N-R	X	2	X	1	X	N-R	N-R	N-R		0	
Rég	3;6+	g	A	S2	0	N-R	N-R	X	3	2	2	N-R	X	X	N-R	N-R			
Mar	3;6+	F	B	S3	15	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R	X	X	N-R	N-R	0	0	0
Cél	3;8	F	A	S4	3	N-R	2	X	X	2	2	2	2	3	2	2	0	0	
Oli	3;7	g	A	S8	0	N-R	N-R	N-R	X	N-R	3	2	N-R	N-R	N-R	N-R			
Total → réussites						12	12	23	21	14	15	7	30	27	10	5	22	21	13

PETITS — Groupe d'Age : 3;9

Nom	Age	Sexe	C. sociale	Suite pbs	Connais. suite nbs	Ani⁺(2,1)	Pou⁺(2,1)	Bon⁻(3,1)	Jeū(3,1)	Jeū(3,2)	Jeū(4,3)	Jeū(5,2)	Dénomination 1	2	3	4	Principes du comptage de 3 Pbi	Pss	Pca
Fré	3;9	g	B	S1	5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	N-R	o	o	o
Nic	3;7	g	C	S5	19	X	X	X	X	X	3	4	X	X	X	X	o	o	o
Ann	3;8	F	B	S4	13	X	X	X	X	X	2	N-R	X	X	X	X	o	o	o
Aur	3;10	F	C	S1	14	X	X	X	N-R	3	X	X	X	X	X	X	o	o	o
Ben	3;10	g	C	S6	5	X	X	X	X	2	6	X	X	X	X	X	o	o	o
Mir	3;10	F	A	S7	3	X	X	1	X	X	X	X	X	X	X	3	o	o	
Lau	3;10	F	C	S8	8	X	X	X	X	X	2	X	X	X	X	N-R	o		
Sah	3;8	F	B	S7	9	X	X	X	N-R	X	N-R	N-R	X	X	X	X	o	o	o
Sté	3;9	F	B	S1	18	X	X	1	3	X	X	1	X	X	X	3	o	o	o
Sté	3;11	g	B	S2	14	X	X	X	X	N-R	2	N-R	X	X	X	5	o	o	o
Aud	3;7	F	C	S1	2	2	N-R	X	X	X	X	X	X	X	6	2	o	o	o
Chi	3;9	F	A	S3	0	X	X	X	X	X	3	2	X	X	2	3			
Han	3;8	g	A	S8	8	2	1	X	X	X	X	1	X	X	2	2		o	
Vir	3;10	F	B	S8	5	N-R	X	X	X	3	2	X	X	X	11	3	o		
Sév	3;10	F	B	S5	7	N-R	N-R	X	X	X	X	1	X	N-R	N-R	N-R	o	o	
Fra	3;10	g	B	S7	6	2	2	X	X	2	X	1	X	X	N-R	N-R	o	o	
Rac	3;10	F	B	S6	5	2	2	X	X	2	X	2	X	X	4	2		o	
Est	3;8	F	B	S4	2	2	2	X	X	2	X	1	X	X	2	2		o	
Est	3;7	F	A	S5	0	N-R	N-R	X	X	2	X	1	X	X	N-R	2			
Kam	3;6⁺	g	A	S7	2	N-R	4	X	N-R	2	X	N-R	X	X	5	6	o	o	o
Yol	3;7	F	A	S3	3	2	N-R	X	4	X	3	N-R	X	X	N-R	N-R	o		
Jer	3;7	g	A	S2	2	2	2	X	X	6	N-R	5	X	X	2	6	o		
Dan	3;11	g	A	S3	3	N-R	N-R	N-R	3	X	X	1	X	X	N-R	N-R			
Cor	3;9	F	A	S2	5	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R	X	N-R	X	X	N-R	N-R	o	o	o
Myr	3;9	F	C	S4	4	4	4	4	N-R	X	4	4	X	X	4	6		o	o
Eri	3;11	g	A	S6	4	X	N-R	0	1	3	2	1	X	X	N-R	N-R	o		
Fik	3;7	g	A	S6	4	N-R	2	X	X	2	2	1	X	N-R	N-R	N-R	o		
Céc	3;10	F	B	S5	2	N-R	N-R	N-R	X	2	X	1	X	N-R	N-R	N-R		o	
Rég	3;6⁺	g	A	S2	0	N-R	N-R	X	3	2	2	N-R	X	X	N-R	N-R			
Mar	3;6⁺	F	B	S3	15	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R	X	X	N-R	N-R	o	o	o
Cél	3;8	F	A	S4	3	N-R	2	X	X	2	2	2	2	3	2	2	o	o	
Oli	3;7	g	A	S8	0	N-R	N-R	N-R	X	N-R	3	2	N-R	N-R	N-R	N-R			
Total → réussites						12	12	23	21	14	15	7	30	27	10	5	22	21	13

PETITS Groupe d'Age : 3;3

Nom	Age	Sexe	C. sociale	Suite pbs	Connais. suite nbs	$Ani^+(2,1)$	$Pou^+(2,1)$	$Bon^-(3,1)$	$Jeu^-(3,1)$	$Jeu^-(3,2)$	$Jeu^-(4,3)$	$Jeu^-(5,2)$	Dénomination 1	2	3	4	Principes du comptage de 3 Pbi	Pss	Pca
Loi	3;4	g	B	S3	9	X	X	X	4	X	N-R	N-R	X	X	X	X	o	o	o
Fle	3;3	F	C	S2	4	N-R	X	X	X	X	X	1	X	X	4	6	o	o	o
Aur	3;6	F	B	S8	6	X	2	X	X	2	X	1	X	X	N-R	N-R	o	o	
Ben	3;5	g	B	S6	3	X	N-R	1	X	X	X	2	X	X	2	N-R	o		
Vin	3;1	g	C	S7	15	X	5	X	5	X	5	5	X	X	5	3	o	o	o
Sté	3;5	F	A	S2	5	N-R	X	1	X	2	X	1	X	X	N-R	N-R	o		
Fra	3;5	g	B	S3	3	2	N-R	X	N-R	X	X	2	X	X	5	2		o	
Val	3;6	F	A	S6	0	2	2	X	X	2	X	1	X	X	N-R	N-R			
Céc	3;4	F	B	S3	9	2	X	N-R	19	3	3	X	X	3	X	2		o	o
Mar	3;1	F	B	S1	6	2	2	X	9	N-R	X	1	X	9	X	3		o	
Cav	2;7	F	C	S3	2	2	1	1	X	X	2	N-R	X	X	2	2	o		
Céd	3;3	g	A	S2	3	2	X	X	1	2	2	2	X	X	2	3			
Fré	3;2	g	A	S8	0	N-R	N-R	1	X	5	4	2	X	X	2	X			
Céd	3;5	g	B	S5	0	N-R	N-R	3	X	X	X	1	X	3	2	2			
Nat	3;5	F	B	S8	4	2	2	X	1	3	N-R	4	X	X	7	7	o	o	
Lae	3;3	F	B	S4	3	N-R	1	N-R	X	2	N-R	N-R	X	X	2	2	o	o	
Oli	3;3	g	B	S1	5	N-R	N-R	X	X	3	2	N-R	X	3	N-R	2	o		
Del	3;2	F	C	S8	5	2	2	1	X	2	2	2	X	X	2	2		o	
Dav	3;0	F	A	S7	3	N-R	N-R	X	3	3	N-R	N-R	X	N-R	X	3	o		
Syl	3;4	g	C	S5	0	N-R	N-R	1	N-R	2	X	N-R	X	X	N-R	N-R			
Eri	3;2	g	B	S7	15	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R	X	X	N-R	N-R	o	o	o
Sté	3;0	F	B	S7	2								X	N-R	1	X	o		o
Ber	3;3	g	B	S1	3	N-R	N-R	X	N-R	2	2	2	X	N-R	N-R	N-R	o		
Chi	3;6	g	A	S2	2	N-R	1	N-R	X	2	2	2	X	N-R	N-R	2	o		
Nat	3;5	F	A	S4	3	N-R	N-R	3	1	4	X	4	X	N-R	2	2			
Ana	3;5	F	A	S1	0	N-R	N-R	N-R	X	2	2	2	2	X	6	2			
Rég	3;2	g	A	S4	0	N-R	4	4	4	4	4	4	X	4	4	X			
Ast	3;5	F	A	S6	0				1	2	X	N-R	X	10	1	1			
Lau	3;2	g	A	S5	2	N-R	2	X					N-R	N-R	N-R	N-R	o		
Cin	3;6	F	C	S6	3	N-R	2	8	1	N-R	5	N-R	5	5	5	8	o		
Cin	3;1	F	A	S5	0								N-R	N-R	N-R	N-R			
Rém	2;9	g	A	S4	0								N-R	N-R	N-R	N-R			
Total → réussites						4	5	13	13	7	11	1	27	17	4	4	17	11	6

PETITS — Groupe d'Age : 3;3

Nom	Age	Sexe	C.sociale	Suite pbs	Connais: suite nbs	$Ani^+(2,1)$	$Pou^+(2,1)$	$Bon^-(3,1)$	$Jeu^-(3,1)$	$Jeu^-(3,2)$	$Jeu^-(4,3)$	$Jeu^-(5,2)$	Dénomination 1	2	3	4	Principes du comptage de 3 Pbi	Pss	Pca
Loi	3;4	g	B	S3	9	X	X	X	4	X	N-R	N-R	X	X	X	X	o	o	o
Fle	3;3	F	C	S2	4	N-R	X	X	X	X	X	1	X	X	4	6	o	o	o
Aur	3;6	F	B	S8	6	X	2	X	X	2	X	1	X	X	N-R	N-R	o	o	
Ben	3;5	g	B	S6	3	X	N-R	1	X	X	X	2	X	X	2	N-R	o		
Vin	3;1	g	C	S7	15	X	5	X	5	X	5	5	X	X	5	3	o	o	o
Sté	3;5	F	A	S2	5	N-R	X	1	X	2	X	1	X	X	N-R	N-R	o		
Fra	3;5	g	B	S3	3	2	N-R	X	N-R	X	X	2	X	X	5	2		o	
Val	3;6	F	A	S6	0	2	2	X	X	2	X	1	X	X	N-R	N-R			
Céc	3;4	F	B	S3	9	2	X	N-R	19	3	3	X	X	3	X	2		o	o
Mar	3;1	F	B	S1	6	2	2	X	9	N-R	X	1	X	9	X	3		o	
Car	2;7	F	C	S3	2	2	1	1	X	X	2	N-R	X	X	2	2	o		
Céd	3;3	g	A	S2	3	2	X	X	1	2	2	2	X	X	2	3			
Fré	3;2	g	A	S8	0	N-R	N-R	1	X	5	4	2	X	X	2	X			
Céd	3;5	g	B	S5	0	N-R	N-R	3	X	X	X	1	X	3	2	2			
Nat	3;5	F	B	S8	4	2	2	X	1	3	N-R	4	X	X	7	7	o	o	
Lae	3;3	F	B	S4	3	N-R	1	N-R	X	2	N-R	N-R	X	X	2	2	o	o	
Oli	3;3	g	B	S1	5	N-R	N-R	X	X	3	2	N-R	X	3	N-R	2	o		
Del	3;2	F	C	S8	5	2	2	1	X	2	2	2	X	X	2	2		o	
Dav	3;0	F	A	S7	3	N-R	N-R	X	3	3	N-R	N-R	X	N-R	X	3	o		
Syl	3;4	g	C	S5	0	N-R	N-R	1	N-R	2	X	N-R	X	X	N-R	N-R			
Eri	3;2	g	B	S7	15	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R	N-R	X	X	N-R	N-R	o	o	o
Sté	3;0	F	B	S7	2								X	N-R	1	X	o		o
Ber	3;3	g	B	S1	3	N-R	N-R	X	N-R	2	2	2	X	N-R	N-R	N-R	o		
Chi	3;6	g	A	S2	2	N-R	1	N-R	X	2	2	2	X	N-R	N-R	2	o		
Nat	3;5	F	A	S4	3	N-R	N-R	3	1	4	X	4	X	N-R	2	2			
Ana	3;5	F	A	S1	0	N-R	N-R	N-R	X	2	2	2	2	X	6	2			
Rég	3;2	g	A	S4	0	N-R	4	4	4	4	4	4	X	4	4	X			
Ast	3;5	F	A	S6	0				1	2	X	N-R	X	10	1	1			
Lau	3;2	g	A	S5	2	N-R	2	X					N-R	N-R	N-R	N-R	o		
Cin	3;6	F	C	S6	3	N-R	2	8	1	N-R	5	N-R	5	5	5	8	o		
Cin	3;1	F	A	S5	0								N-R	N-R	N-R	N-R			
Rém	2;9	g	A	S4	0								N-R	N-R	N-R	N-R			
Total → réussites						4	5	13	13	7	11	1	27	17	4	4	17	11	6

3) Etude sommaire

Malgré la dispersion des résultats (7 tableaux différents, questions non communes à tous les tableaux, ...), un simple coup d'oeil fait apparaître d'emblée que:

a) Dans les 3 dernières colonnes (principes du "comment compter") les ronds se regroupent plutôt en tête des tableaux.

Exemples: Dans le tableau des 5;3, les 25 premiers enfants ont tous au moins 2 ronds (20 d'entre eux en ont même 3) alors que dans les 7 derniers il n'y en a qu'1 seul qui en a 2 et surtout 5 autres qui n'en ont aucun;

Dans le tableau des 4;3 les 13 enfants de tête ont tous 3 ronds alors qu'en queue on retrouve 11 enfants dont aucun n'a 3 ronds, les 5 derniers de ces 11 n'en ayant même aucun.

Et céci est un fait intéressant à noter car le rangement des enfants s'étant fait prioritairement d'après le nombre total de croix aux épreuves 2 (dénomination) et 3 (problèmes et jeux), on pouvait s'attendre, a priori* et à peu près (car le nombre de ronds est, en cas d'égalité, notre second critère de rangement) à une distribution équitable des ronds entre le haut et le bas du tableau.

b) Dans la colonne récitation, les bons réciteurs, facilement repérables chez les grands si l'on choisit comme critère 30^+ et chez les moyens si l'on choisit comme critère un nombre à 2 chiffres, se retrouvent aussi en général en tête des tableaux. Exemples: Dans le tableau des 5;3 les 3 réciteurs 30^+ occupent la 1ère, la 2e et 6e place ; dans le tableau des 4;3 les 11 réciteurs à 2 chiffres se retrouvent dans les 13 premières places.

Là aussi, et pour une raison analogue à celle ci-dessus, le fait est intéressant à noter.

c) A l'intérieur d'un même type (problèmes verbaux, jeux, dénomination) de questions, la présence d'une croix peut entraîner presque sûrement celle d'une (ou plusieurs) autre(s). Nous n'insisterons pas plus sur les problèmes verbaux et les jeux, mais remarquerons surtout que dans les colonnes de l'épreuve de dénomination une croix est presque toujours précédée par des croix (et rien d'autre), les tableaux des 6;3, 4;3 et

* Avec beaucoup de naïveté, il est vrai !

3;9 étant même "parfaits" à ce point de vue.

d) Remarque :Les exceptions aux règles générales ci-dessus dégagées sont souvent des cas très particuliers. Exemples:
Mar ($3;6^+$), 3 ronds et réciteuse à 2 chiffres, n'est rangée qu'en antépénultième position: sa maîtresse nous a dit qu'elle n'était pas sotte, participait à la vie de la classe, mais ne répondait guère aux questions qu'on lui pose (elle raconte beaucoup, mais à la maison seulement !).
Eri (3;2) est un exemple analogue à celui de Mar: son cas est commenté dans IX,B (introduction).
Fan (4;3) peut elle aussi être classée, quoique moins nettement, dans cette catégorie de bons compteurs en mauvaise position: son cas est longuement analysé dans III,C,3.
Kam ($3;6^+$), 3 ronds, est seulement dans la seconde moitié du tableau: il compte avec une suite idiosyncrasique.
Dav ($4;6^+$), aucun rond et réciteur à 1 chiffre (de plus très petit:2), est moyennement bien rangé (en 15e position): Son cas est rapporté en Annexe 5; de même, Lae(4;8), 1 seul rond et réciteuse à 1 chiffre (3), est assez bien rangée (11e position): son cas est commenté en VIII,A,3.
Les cas de Rég (3;2), Fré (3;2), Sté (3;0) et Oli (5;4) qui sont des exceptions à la règle dégagée pour l'épreuve de dénomination sont commentés dans VI,C,1 pour les 3 premiers, et dans IX,A,6,b pour Oli.

Chapitre V : Connaissance de la suite des nombres

" ... phénomène linguistique commun, la comptine appartient au babil enfantin et fait partie de son trésor de mots"

S. Baruk , 1977.

V.- Connaissance de la suite des nombres

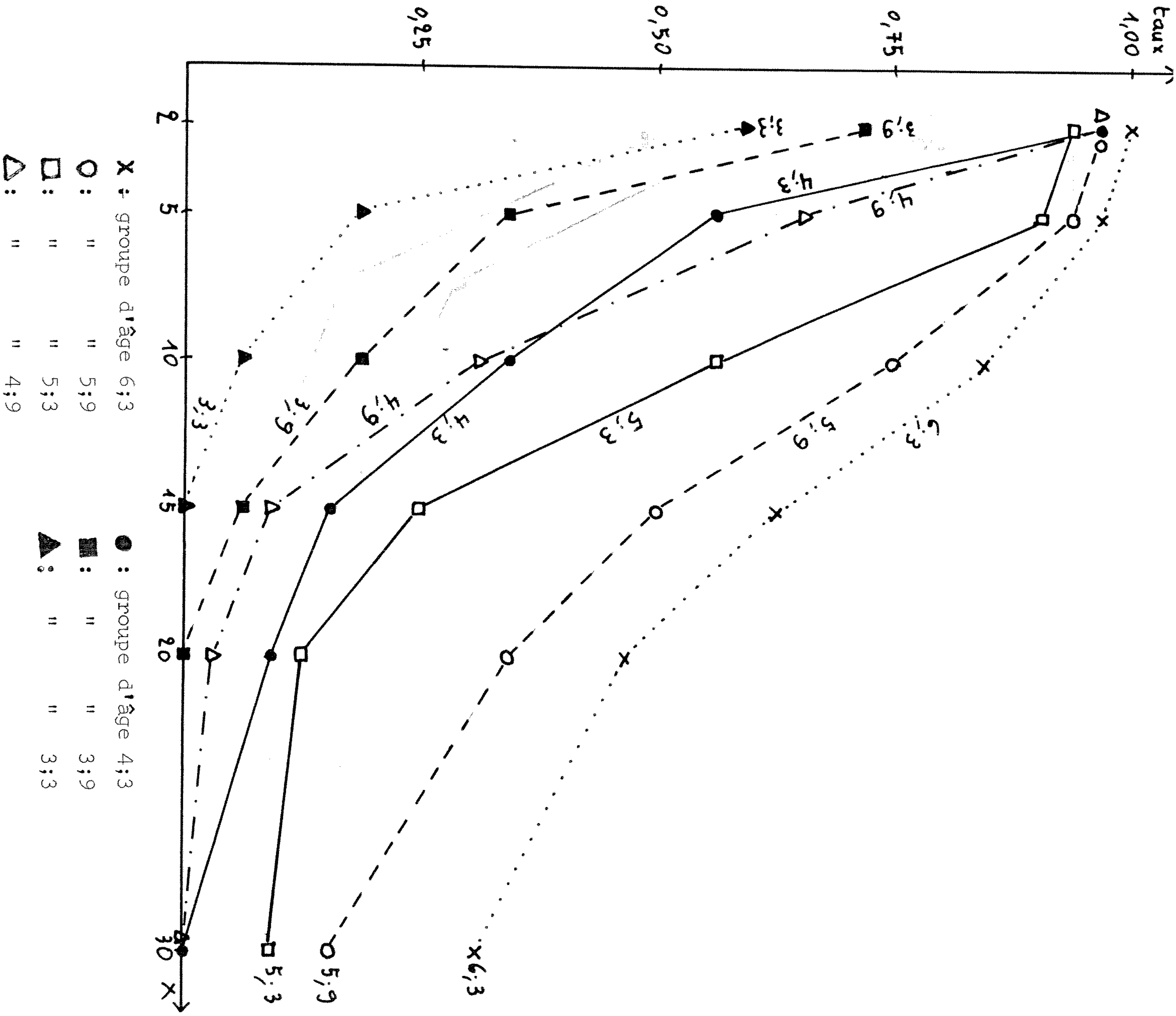
A) Tableau et représentation graphique

1) Tableau V, A, 1:

Connaissance de la suite des nombres en fonction de l'âge

G.A. (nombre d'enfants) \ suite connue jusqu'à x	$x \leq 2$	$3 \leq x \leq 5$	$6 \leq x \leq 10$	$11 \leq x \leq 15$	$16 \leq x \leq 20$	$21 \leq x \leq 30$	$31 \leq x$
3;3 (32)	13	13	4	2	-	-	-
3;9 (32)	9	12	5	4	2	-	-
4;3 (32)	1	13	7	6	2	3	-
4;9 (32)	1	10	11	7	2	1	-
5;3 (32)	2	1	11	10	4	1	3
5;9 (32)	1	1	6	8	5	6	5
6;3 (32)	0	1	4	7	5	5	10

2) Représentation graphique du taux d'enfants connaissant la suite des nombres au-delà de x en fonction de x



B) Commentaires - Comparaisons - Interprétations

1) Le non-progrès entre 4;6 et 5;0 ans

Les courbes bien étagées, sauf celle du G.A. 4;9 qui est partiellement en-dessous de celle du G.A 4;3, du graphique VA2 montrent que les progrès des enfants sont réguliers, sauf durant la 2e moitié de la 5e année. Pour préciser ce non-progrès, nous avons formé des G.A. de 16 enfants (de 4;0 à 5;3), chaque G.A. recouvrant à peu près 3 mois. Voici le tableau obtenu:

G.A. \ suite connue jusqu'à x	$x \leq 5$	$6 \leq x \leq 10$	$11 \leq x \leq 15$	$16 \leq x \leq 20$	$21 \leq x \leq 30$	$31 \leq x$
4;0 - 4;3	10	3	1	1	1	0
4;3 - 4;6	4	4	5	1	2	0
4;6 - 4;9	5	6	2	2	1	0
4;9 - 5;0	6	5	5	0	0	0
5;0 - 5;3	2	5	5	2	0	2

Les progrès entre le G.A. (4;0 - 4;3) et le G.A. (4;6 - 4;9) semblent réguliers: on ne peut donc pas exclure l'hypothèse d'un G.A. (4;3 - 4;6) fort et d'un G.A. (4;9 - 5;0) faible. Ceci semble d'ailleurs confirmé par les performances respectives de ces 2 G.A. aux autres épreuves. Néanmoins, l'hypothèse d'une pause dans la progression de la connaissance de la suite des nombres au cours de la 2e moitié de la 5e année n'est pas à rejeter non plus, et l'entretien (épreuve 1) avec Bla (4;9) va dans ce sens: Bla récite en effet la suite parfaitement jusqu'à 15. Et après ? "On m'a déjà appris mais je ne sais plus". Qui t'a appris ? "Mon papa".

Remarque : C. Meljac (cf. MELJAC 1979) mentionne que les enfants, après être arrivés à 10 entre 4 ans et $4\frac{1}{2}$ ans, marquent une pause pendant 1 an, mais la population restreinte (voir ci-après) qu'elle a étudiée ne permet pas de dire que ce résultat est solidement établi. Par contre, le fait que Beckmann (cf. BECKMANN 1923) qui a étudié une population au moins aussi large que la nôtre, a trouvé lui aussi, il y a 60 ans déjà, une pause dans le développement des actes numériques entre 4;6 et 5;0, ne manque pas de soulever notre curiosité.

2) Comparaison avec les résultats de C.Meljac (cf. MELJAC 1979)

a) Tableau comparatif Meljac-(Fischer) en % :

G.A. \ suite connue jusqu'à...	5	10	15	20	50
4;0 ± 2 (±3)	90 (50)	80 (16)	10 (6)	0 (3)	0 (0)
4;6 ± 2 (±3)	100 (78)	90 (41)	60 (28)	0 (13)	0 (0)
5;0 ± 2 (±3)	100 (84)	73 (50)	73 (19)	9 (6)	9 (0)
5;6 ± 2 (±3)	90 (97)	80 (72)	70 (50)	20 (28)	0 (9)
6;0 ± 2 (±3)	100 (97)	100 (78)	75 (53)	65 (44)	16 (19)

réf: MELJAC 1979, tableau I p.60 (extraits)

Remarques:

- les % de C.Meljac sont établis à partir de 10 à 12 enfants par G.A. Les nôtres à partir de 32 enfants par G.A.
- pour faire cette comparaison, nous avons formé des G.A. centrés en 4;0, 4;6, ... de 32 enfants chacun (à peu près 6 mois).

b) Commentaire :

Mises à part les récitations jusqu'à 20 ou 50, les résultats de C. Meljac sont, à une légère exception près, systématiquement supérieurs aux nôtres, et les différences peuvent être considérables. Ainsi pour le G.A. 4;0, C.Meljac trouve 80% d'enfants (il vaudrait mieux écrire 8 sur 10) sachant compter jusqu'à 10, alors que nous n'en avons trouvés que 16% (c'est-à-dire 5 sur 32).

c) Interprétations :

Deux interprétations immédiates, ce qui n'en exclut pas d'autres, apparaissent:

- le codage très "large" utilisé par C. Meljac : elle considère en effet "comme sachant compter jusqu'à 15 un enfant maîtrisant la première dizaine et poursuivant ensuite, plus ou moins bien, sans dépasser 15" (pour nous, un tel enfant serait considéré comme sachant compter jusqu'à 10, mais pas jusqu'à 15);
- les % de C.Meljac, établis à partir de 12 enfants (au plus) seulement, risquent d'être très aléatoires.

3) Les nombres d'achoppement entre 10 et 20

a) Par nombre d'achoppement, nous entendons le dernier nombre n tel que la suite 1, 2, ..., n récitée d'un seul trait lors de l'épreuve 1 (c'est-à-dire avant toute incitation à continuer) est parfaite. Les nombres d'achoppement ne correspondent donc pas nécessairement aux nombres figurant dans les tableaux IV,B,2 et indiquant les limites de connaissance de la suite des nombres (ils sont $\leq$ à ces derniers).

b) Tableau :

G.A. \ nombre d'achoppement	11	12	13	14	15	16	17	18	19	Nombre d'enfants
3;3	-	-	-	1	1	-	-	-	-	2
3;9	-	-	1	2	1	-	-	1	1	6
4;3	-	1	-	3	2	1	-	1	-	8
4;9	-	1	2	3	1	1	-	-	-	8
5;3	1	2	-	3	2	-	-	1	3	12
5;9	1	-	4	2	3	-	-	3	-	13
6;3	-	-	-	3	3	-	1	1	2	10
TOTAL	2	4	7	17	13	2	1	7	6	59

c) Commentaire :

Comme on peut écarter l'hypothèse d'une répartition au hasard (χ^2_c = 30;04 > 15,51 = χ^2 lu à 8 degrés de liberté) il est intéressant de faire quelques remarques sur cette répartition :

α) C'est à 14 qu'il y a le plus d'achoppements;

β) Malgré la discontinuité linguistique entre 16 et 17, il n'y a que 2 achoppements à 16;

γ) Il y a 7 achoppements à 18 alors que tous ces enfants ont parfaitement maîtrisé le passage 8 - 9.

d) Interprétation :

- La discontinuité linguistique entre 14 - 15 pourrait expliquer α): en effet, alors que pour douze on retrouve le "d" de deux, pour treize le "tr" de trois et pour quatorze le "quat" de quatre, on ne retrouve pas pour quinze le "cin" de cinq.
- β) fait penser à l'idée d'une constitution de la suite des nombres par recollement: l'enfant connaîtrait la suite parfaite jusqu'à 14 par exemple, et puis à nouveau 17, 18, 19, (20,...); il doit donc recoller les morceaux avec 15 et 16. L'histoire de la numération parlée montre aussi un tel recollement ; K.Menninger (cf. MENNINGER 1933) pense en effet que, si dans la langue indo-germanique primitive 9, 8 et 7 se sont formés par comptage arrière à partir de 10 (10-1, 10-2, 10-3), il est possible que dans la langue romaine ce mode de formation s'est transféré à l'échelon supérieur et que les nombres-mots 19, 18 et 17 ont ainsi été formés, par comptage arrière à partir de 20 (20-1, 20-2, 20-3), avant les autres (16, 15, ?).
- Pour γ), une explication est que, au cours de la récitation mécanique de la suite des nombres, l'enfant, quand il commence à dire un nombre, doit déjà avoir le suivant dans son esprit. Il en résulterait que:
  - si un enfant s'arrête simplement (ce qui est le cas de 2 des 7 enfants classés à 18)à 18, et ne dit pas 19, ce n'est pas tellement parce qu'il ne le connaît pas, mais plutôt parce que, au moment où il devrait dire 19, 20 n'est pas présent dans son esprit et le mécanisme de récitation est alors interrompu;*
  - si un enfant saute 19 (c'est le cas de 4 des 7 enfants qui récitent ... 18 - 20; 1 autre revenant à 15: ...18 - 15) il est victime du phénomène d'haplologie (dire le début d'une phrase en sautant

---

* Nous avons retrouvé chez Cor(6;1), resp. Vincent (4;0), le même phénomène pour le passage à 30, resp.50: Cor récite "1,2,...,28" sans difficulté, mais s'exclame après 28: "Oh! Je sais plus!". Qu'est ce qui vient après ? "30"; Vincent, après une aide à 40 (il s'était arrêté à 39 en demandant ce qui vient après, non sans avoir remarqué que ce n'est pas "trente-dix"), s'arrête à 48, qu'il prononce plus fortement, et commente fièrement:"Je sais compter jusqu'à 48".

d'emblée à la fin, avalant le milieu) qui affecte spécifiquement 19 (et non pas 18 par exemple) parce que le nombre-mot 20(ou son remplaçant erroné) marquant une discontinuité importante, est trop fortement présent à l'esprit de l'enfant au moment où il devrait dire 19.

Cette interprétation expliquerait alors aussi certains arrêts à 13 (parce que l'enfant au moment où il devrait dire 14 n'a pas 15 dans son esprit), à 14 (parce que l'enfant ne connaît pas 16), certains sauts de 15 à 17 (parce que 17 est trop fortement présent dans l'esprit de l'enfant) et le peu d'arrêts à 16 (puisque les enfants qui ne connaissent pas 17 se sont déjà arrêtés à 15). De plus, elle peut être appuyée par:

- l'étude du mécanisme de production des lapsus par anticipation (cf. CUTLER 1980: ex: "Tout ba vien" au lieu de "Tout va bien") qui a permis de montrer qu'un segment de langage comme le son existe d'abord dans l'esprit et n'impose qu'ensuite, pour sa production parlée, une contrainte à l'appareil vocal;
- les transformations qu'ont subies au cours des temps certains nombres-mots. Ainsi, selon K. Menninger (cf. MENNINGER 1933), en allemand, le "v" de "vier" (=quatre) résulterait d'une action à distance du premier "f" de "fünf" (=cinq, le "v" se prononçant comme le "f"), ou encore en lituanien (resp. slave) "devyni" (resp. "devetj"), = neuf, aurait échangé son "n" primitif contre le "d" actuel par suite de l'action à distance de "dešimt" (resp. "desetj"), = dix.

Chapitre VI : Dénomination des nombres

" Nous 'rencontrons' des cailloux et des arbres. Mais trois cailloux, deux arbres? Jamais. Pour les voir, il y faut déjà quelque opération".

J.T. Desanti

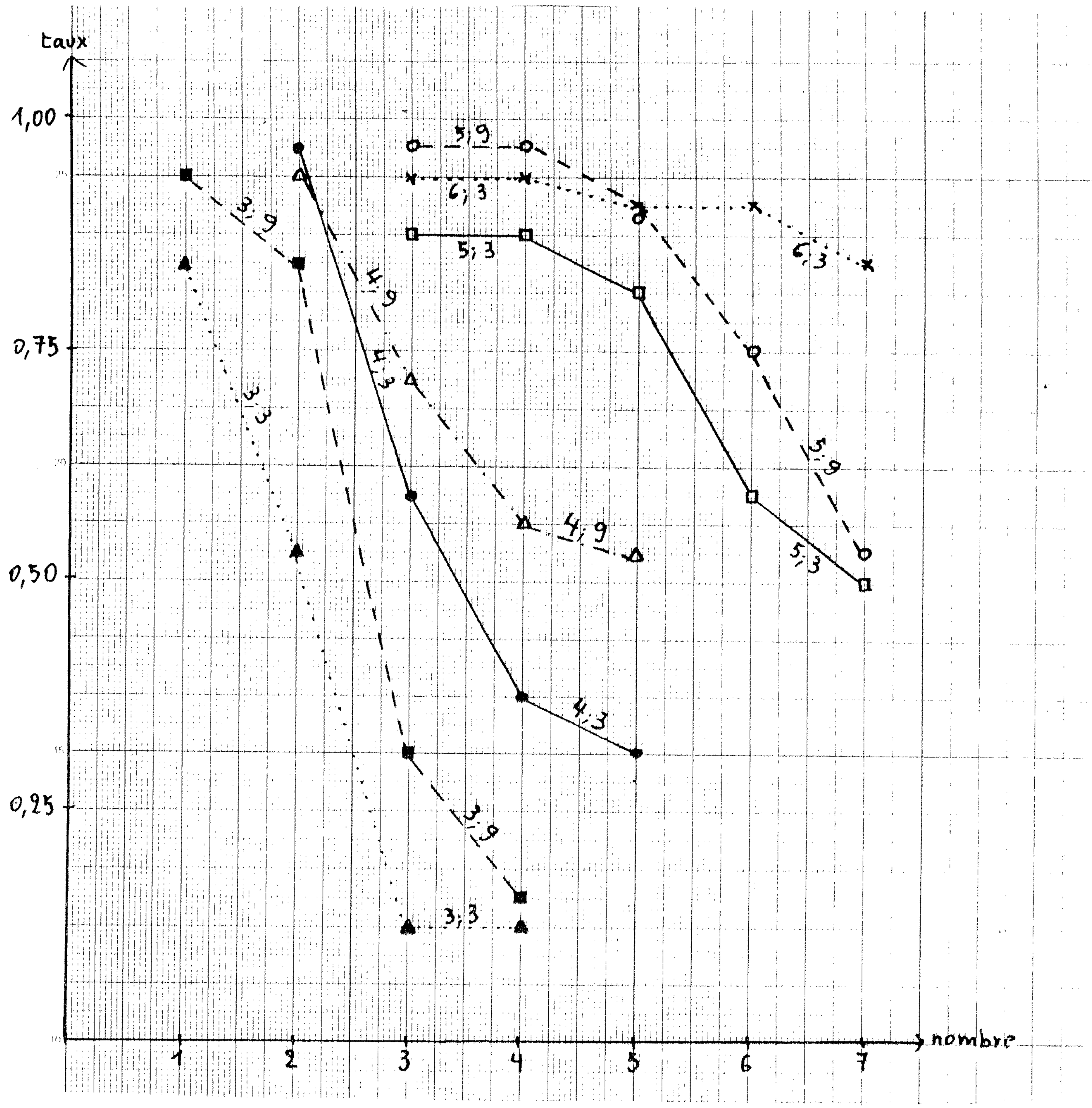
VI.- Dénomination des nombres

A) Réussites en fonction de l'âge et du nombre

1) tableau VI, A, 1 (32 enfants par G.A.):

Dénomination de / G.A.	1	2	3	4	5	6	7
3;3	27	17	4	4			
3;9	30	27	10	5			
4;3		31	19	12	10		
4;9		30	23	18	17		
5;3			28	28	26	19	16
5;9			31	31	29	24	17
6;3			30	30	29	29	27

2) Représentation graphique du taux de réussite à l'épreuve de dénomination en fonction de l'âge et du nombre



3) Commentaires :

La représentation graphique met clairement en évidence une double progression: le taux des réussites augmente d'une part avec l'âge, d'autre part avec la réduction de la taille des nombres.
Si l'on considère, comme cela se fait souvent en psychologie génétique, le taux de 0,75 comme le critère (extérieur) d'une acquisition à un âge donné, on peut dire que:

le cardinal	2	est	dénommé	correctement	vers	3;7
"	3	"	"	"	"	4;10
"	4	"	"	"	"	5;1
"	5	"	"	"	"	5;2
"	6	"	"	"	"	5;9
"	7	"	"	"	"	6;1

Nous noterons principalement:
- qu'il faut 1;3 ans pour passer de la dénomination de 2 à celle de 3.
- que l'idée populaire d'une correspondance entre âge et connaissance des nombres, à 2 ans l'enfant connaîtrait 2, à 3 ans, 3, ... n'est pas entièrement vérifiée et semble surestimer les possibilités des plus jeunes enfants.

A propos de cette deuxième remarque, nous voudrions apporter quelques précisions, en nous référant surtout à BECKMANN 1923, sur ce que l'on peut entendre par "connaître un nombre". Dans son étude, H.Beckmann distingue 6 actes numériques:
- l'acte d'écouter un nombre-mot
- " de prononcer un nombre- mot
- " de construire un nombre. Exemple: l'enfant doit donner 3 objets
- " de distinguer 2 nombres. Exemple: (pour 2 et 3) "Où est-ce qu'il y en a 2, ici (en montrant une collection de 2 objets) ou ici (en montrant une collection de 3 objets) ? Est-ce qu'il y en a 2 ou 3 (en montrant une collection de 3) ? "
- l'acte de reconnaître un nombre. Exemple: devant des collections numériquement différentes, l'enfant doit trouver celle où il y en a 3 (on lui dit le nombre et il doit trouver la collection).
- l'acte de dénommer un nombre. Exemple: l'enfant doit désigner par un nombre-mot les collections qu'on lui montre, en réponse à la question "Combien ?"

Les 4 derniers actes, qui concernent l'activité numérique de l'enfant, ont été étudiés expérimentalement par H.Beckmann sur une population importante d'enfants (465) de 2 à 6 ans, pour les nombres 2, 3, 4 et 5.

Il résulte de cette étude un rangement, suivant le nombre de réussites, des 4 actes: l'acte de construction est le plus réussi, puis la distinction, puis la reconnaissance et, enfin, la dénomination qui est l'acte le moins réussi, et ceci, quels que soient la taille du nombre et l'âge des enfants. De plus, il apparaît des différences de réussites importantes, surtout chez les plus jeunes enfants: dans le G.A. 2;9 ± 3 par exemple, 70% des enfants réussissent la construction du nombre 2, alors que seulement 5% réussissent à le dénommer. Nous en concluons d'une part, et de manière générale, qu'il faut toujours préciser clairement la tâche demandée à l'enfant, d'autre part, pour ce qui concerne notre expérience, que l'épreuve de dénomination est la plus difficile que l'on pouvait proposer à l'enfant et donc qu'un échec à cette épreuve, pour un nombre donné, ne permet pas de dire que l'enfant n'a aucune connaissance de ce nombre, mais simplement d'affirmer que sa connaissance du nombre en question n'est pas complète.
Ces précisions nous permettent d'améliorer notre 2e remarque ci-dessus: l'idée d'une correspondance entre âge et connaissance des nombres n'est pas fausse mais très vague, car on ne sait pas de quelle connaissance du nombre il s'agit (et cela est essentiel: dans l'exemple de Beckmann, cité plus haut, il faudra attendre le G.A. 4;9 ± 3 pour franchir les 70 % de réussite dans l'épreuve de dénomination de 2: il y a donc près de 2 ans d'écart entre construction et dénomination !)

4) Comparaisons

a) Beckmann - (Fischer) en % :

dénomination de / G.A.	2	3	4	5	Nombre d'enfants
3;3 ± 3	21,7 (53,3)	2,2(13,3)	0,0 (13,3)		46 (30)
3;9 "	36,0 (84,4)	12,0(31,3)	8,0 (15,6)		25 (32)
4;3 "	63,4 (96,9)	34,1(59,4)	19,5 (37,5)	12,2(31,3)	41 (32)
4;9 "	83,4 (93,8)	66,7(71,9)	21,5 (56,3)	9,5(53,1)	42 (32)
5;3 "		54,0(87,5)	37,7 (87,5)	21,4(81,2)	56 (32)
5;9 "		85,0(96,9)	70,0 (96,9)	51,7(90,6)	60 (32)
6;3 "		87,1(93,8)	69,0 (93,8)	47,1(90,6)	155 (32)

référence: BECKMANN 1923, p.19 (extraits).

Commentaire: Nos résultats sont systématiquement supérieurs à ceux de Beckmann, et les différences peuvent être importantes. Ainsi, pour le G.A. 5;3 et pour 5, Beckmann indique 21,4% de réussites alors que nous avons trouvé 81,2%. Comme le montrent d'autres statistiques allemandes du début du siècle (voir X,A,4α), les seules différences entre les populations étudiées (même si l'expérience de Beckmann remonte à plus d'un $\frac{1}{2}$ siècle) ne suffisent pas pour expliquer la supériorité de nos résultats: il y a probablement aussi des différences de procédures ou / et de codages.

b) Gelman - (Fischer) en % de réussite:
Gelman ayant fait varier le temps de présentation des collections à dénommer, nous donnons le résultat pour chacun des temps de présentation, en remarquant que:

- théoriquement, puisqu'il n'y avait pas de limitation de temps pour nos épreuves, nos résultats devraient tous être comparés aux performances réalisées en une minute (temps de présentation le plus long) par les sujets de Gelman;
- pratiquement, la connaissance approximative des temps de réponses de nos sujets nous permet de penser que, dans certains cas, nos résultats devraient être plus proches des résultats en 5 secondes, ou même en une seconde, donnés par Gelman, que de ceux en 1 minute. Exemple: la plupart des enfants répondant instantanément pour 2, et éventuellement 3, nous pensons par exemple que notre pourcentage de réussite (69,4%) à 2 du G.A. 3;6 est comparable aux 68,8% de réussite en une seconde de Gelman.

dénomination de / G.A.	TEMPS de présentation	2	3	4	5	7	Nombre d'enfants
3;6 $\pm$ 6	1 s.	68,8	58,3	18,8			
	5 s.	85,4	79,2	43,8			48
	1 mn.	85,4	83,3	58,3			
		(69,4)	(22,6)	(14,5)			(62)
4;6 $\pm$ 6	1 s.	91,7	77,1	47,9	35,4		
	5 s.	91,7	85,4	60,4	43,8		48
	1 mn.	93,8	87,5	77,1	66,7		
		(95,3)	(65,6)	(46,9)	(42,2)		(64)
5;6 $\pm$ 6	1 s.		89,6	68,8	47,9	18,8	
	5 s.		91,7	77,1	54,2	39,6	48
	1 mn.		95,8	87,5	79,2	56,3	
			(92,2)	(92,2)	(85,9)	(51,6)	(64)

référence: GELMAN 1978, Table 5.1. p.56.

<u>Commentaire:</u> Même si l'on essaie de tenir compte de la deuxième remarque ci-dessus ou, plus simplement, si l'on compare chacun de nos résultats au résultat de Gelman le plus proche, on voit qu'il y a des divergences entre les résultats de Gelman et les nôtres, pour le G.A. 3;6, et pour le nombre 3 principalement, nombre pour lequel Gelman a obtenu 58,3% de réussites en 1 seconde alors que nous n'en avons obtenues que 22,6% (en un temps en principe illimité). Une telle différence ne semblant guère explicable là non plus par la seule différence entre les populations* (car la divergence avec Gelman concerne spécifiquement les plus jeunes enfants) nous donnerons dans X, A,1 une interprétation complémentaire. Soulignons qu'un autre résultat donné par Gelman dans le tableau ci-dessus référé (nous n'avons rapporté que les cases du tableau de Gelman directement comparables avec nos résultats) concernant le G.A. 3;6 confirme cette divergence: en effet, Gelman indique que 16 enfants sur 48 du G.A. 3;6 dénomment 11 correctement en une minute. Ce résultat, par référence à notre population expérimentale, est très étonnant, surtout si l'on remarque que 8/62 seulement de nos sujets du G.A. 3;6 ± 6 connaissent la suite des nombres jusqu'à 11, que 8/62 aussi seulement respectent les principes du "comment compter" pour 5 et que 4/62 seulement remplissent à la fois ces deux conditions dont il est légitime de penser qu'elles sont nécessaires (mais non suffisantes!) pour dénommer 11 correctement. Si l'on compare ce résultat de Gelman à celui de Beckmann, la divergence est encore beaucoup plus flagrante: pour 71 enfants entre 3 et 4 ans, Beckmann n'en a trouvé aucun sachant dénommer 5 correctement!

B) <u>Etude des comportements de réponse</u>

1) <u>Classification</u>

Nous utilisons une classification dichotomique rudimentaire, suivant que l'on a, ou non, observé certains signes extérieurs.

Les signes extérieurs élémentaires retenus sont: le comptage (sous-entendu à haute voix ou à voix au moins audible), le pointage du doigt, le pointage visuel (hochement de la tête), le déplacement des jetons (l'enfant les sort de la boîte car il n'a guère de place pour les déplacer à l'intérieur de la boîte), le mouvement des lèvres (sans rien d'audible), la décomposition additive, la bijection visuelle ou par superposition effective avec les doigts de la main.

---

* Néanmoins l'importante différence dans la connaissance de la suite des nombres (voir pp. 127-128) nous fait penser que la différence des populations est l'explication principale.

Remarques:

α) tous les signes extérieurs ci-dessus énumérés, sauf les 2 derniers, seront considérés comme caractéristiques d'un comptage;

β) si l'enfant donne la réponse juste sans manifester de signe extérieur mais confirme ensuite, par comptage par exemple, sa réponse, on retient le premier comportement, i.e. pas de signe extérieur (mais si la première réponse est fausse et la deuxième juste, on retient évidemment le deuxième comportement; si les 2 sont fausses, on retient le comportement avec signes extérieurs);

γ) si l'enfant accompagne simplement sa réponse avec les doigts, sans avoir utilisé ces derniers pour la trouver, on ne considère pas qu'il s'agit d'une bijection avec les doigts de la main.

2) Taux des réussites par comptage extériorisé en fonction de l'âge et du nombre

Nombre / G.A.	2	3	4	5	6	7
3;3	1/16=0,06	2/4=0,50	2/4=0,50			
3;9	1/27=0,04	7/10=0,70	5/5=1,00			
4;3	4/31=0,13	6/19=0,32	8/12=0,67	7/10=0,70		
4;9	5/30=0,17	8/23=0,35	12/18=0,67	12/17=0,71		
5;3		12/18=0,43	13/27=0,48	21/26=0,81	15/19=0,79	14/16=0,88
5;9		10/31=0,32	13/31=0,42	17/28=0,61	19/24=0,79	15/16=0,94
6;3		3/30=0,10	6/30=0,20	11/29=0,38	18/29=0,62	20/27=0,74

On voit nettement que le taux des réussites par comptage extériorisé augmente avec la taille du nombre (une seule petite exception). Par contre, la variation en fonction de l'âge est moins nette. Néanmoins, on peut dire qu'avec l'âge, à nombre constant, le taux des réussites par comptage extériorisé diminue. Pour le voir, il faut:

- éliminer le G.A. 3;3 dont les effectifs sont très faibles et où la proportion de réussites accidentelles peut être grande;

- ne pas oublier que suivant que les enfants sont des petits, moyens ou grands, l'ordre de présentation des nombres n'a pas été identique et qu'il y a donc eu certains facteurs inducteurs qui ont pu influencer le comportement de l'enfant. Ainsi, pour 5, présenté en premier chez les moyens, on trouve chez les 4;3 et chez les 4;9 un taux inférieur à celui des 5;3 où il a été présenté juste après 7, ce qui a certainement favorisé le comptage extériorisé (car pour 7, presque tous les enfants ont recours à un comptage extériorisé).

3) Etude des comportements typiques à l'épreuve 2

Définition: Un enfant a un comportement typique à l'épreuve 2

-s'il n'a pas manifesté de signes extérieurs jusqu'à (par référence à l'ordre des nombres et non à l'ordre de présentation des collections) un nombre n inclus;

-et s'il a ensuite manifesté systématiquement des signes extérieurs au-delà de ce nombre.

On dira qu'un tel enfant a changé de comportement entre n et n+1.

Exemple: Emm (6;4) n'a manifesté aucun signe extérieur pour 3, 4 et 5, mais a compté en pointant du doigt pour 6 et 7 (que l'enfant réussisse ou non n'entre pas en ligne de compte).

Tableau du nombre d'enfants (à comportement typique) changeant de comportement entre n et n+1, en fonction de n et de l'âge

G.A. \ changement entre	2et3	3et4	4et5	5et6	6et7	Nombre d'enfants
3;3	6	0				6
3;9	9	1				10
4;3	6	1	2			9
4;9	4	5	3			12
5;3		3	5	1	0	9
5;9		3	5	6	1	15
6;3		2	5	8	3	18

On voit donc qu'avec l'âge, le changement de comportement, i.e. la manifestation de signes extérieurs, s'opère de plus en plus tard. Notons aussi (dernière colonne) que le nombre de comportements typiques augmente (malgré 2 irrégularités qui semblent dues à l'artefact expérimental déjà signalé dans le b) précédent) également avec l'âge.

4) <u>Remarques complémentaires sur le comportement des très jeunes enfants:</u>
Lorsque l'on s'intéresse aux petits et moyens qui échouent, on observe que très peu d'entre eux manifestent des signes extérieurs de comptage. Ainsi pour 4:
- chez les 3;3, 17 des 28 qui échouent ne manifestent aucun signe extérieur de comptage;
- chez les 3;9, 19 des 27 qui " " " " " " rieur de comptage;
- chez les 4;3, 15 des 20 qui " " " " " " rieur de comptage;
- chez les 4;9, 12 des 14 qui " " " " " " rieur de comptage.

D'où l'hypothèse que le comptage n'est pas le comportement de réponse le plus primitif à la question "Combien?" Quelques entretiens avec des enfants de moins de 3 ans vont dans le sens de cette hypothèse. Exemples:
- Christelle (2;11) répond systématiquement "2", aussi bien pour les 4 roues de la voiture que pour les 2 oreilles du lapin (en peluche), sa bouche ou son nez, à la question "Combien ?";
- Mathias (2;6) qui joue avec des voitures répond lui aussi systématiquement "2" à la question "Combien de voitures tu as ?" bien que l'expérimentateur enlève ou rajoute des voitures entre chacune des questions. Il répond d'ailleurs mécaniquement en continuant à jouer et en se désintéressant de ce que fait l'expérimentateur;
- Anne (2;6) sait déjà réciter "1,2,3", trouve encore "4" et même "6" après qu'on lui ait dit 5. Elle connait aussi son âge: "2ans $\frac{1}{2}$" et sait montrer ses oreilles : Combien tu en as ?"6" et de nez? "9";
- Christophe (2;8) répond successivement que le lapin a "16" oreilles , "5" yeux, "5" mains, "5" pieds et qu'il y a "16" voitures (pour 2).

La réaction au mot "combien" donne, chez tous ces enfants, une impression d'automatisme: ils répondent presque instantanément un nombre-mot, souvent souvent le seul qu'ils semblent connaitre ou avoir présent à l'esprit.

Notons cependant que quelques enfants répondent, tout aussi mécaniquement, une suite de nombre-mots (d'après nos définitions, il s'agit d'un comptage, bien qu'en réalité il soit possible que l'enfant n'ait pas tenté d'appliquer ces nombres-mots aux objets qu'il a devant lui: mais on ne peut pas le prouver!) Exemple: Rém (2;9) répond successivement "2,3,6", "2, 5 et 6", "2,3,6,5" et "2,5,6" pour 3, 1, 4 et 2 sans pointer (pour 4 on peut néanmoins se demander s'il n'y a pas eu tentative de bijection). Cin (3;1) répond successivement "6, 4", "6, 4", "4, 6" et "6,4,6" pour 3, 1, 4 et 2 puis encore "6,4,8" à une question complémentaire (Combien de nounours ? Réponse: 2).

Mais le remplacement d'un simple nombre-mot par une suite peut avoir été favorisé, chez ces 2 enfants qui font partie de l'expérience, par l'épreuve de récitation précédente au cours de laquelle Rém avait déjà récité "2,3,6" et Cin "6,4".

Conclusion : Nous rejoignons donc Beckmann lorsqu'il dit que pour les très jeunes enfants, la constellation "Combien" exige, de manière associative, un nombre-mot (éventuellement un ensemble de nombres-mots), mais que l'acte d'identification ne fonctionne pas encore, et que c'est pour cela que l'enfant a besoin d'un nombre-mot courant à titre de remplacement.

C) Remarques:

1) La dénomination des nombres se fait dans l'ordre naturel de ces derniers

Cela apparait assez nettement sur les tableaux des réponses individuelles (voir IV,B, 2 et 3), où, sauf pour 13 enfants sur les 224 (dont 7 du G.A. 3;3), une croix est toujours précédée exclusivement par des croix dans les résultats à l'épreuve de dénomination. Pour le confirmer statistiquement on a testé quelques quasi-implications du type : (dénommer n) $\underset{q}{\Rightarrow}$ [dénommer (n-1), (n-2), ...]

Exemple 1: chez les grands (dénommer 7) $\overset{?}{\underset{q}{\Rightarrow}}$ (dénommer 6,5,4 et 3)

dénom. 6,5,4 et 3 \ dénom. 7	o	n	
0	58	14	72
n	2	22	24
	60	36	96

i.i $= -3,36 < -1,64$

donc la quasi-implication est vérifiée

<u>Exemple 2</u>; chez les moyens: (dénommer 5) $\overset{?}{\underset{q}{\Rightarrow}}$ (dénommer 4,3 et 2)

dénom.4,3 et 2 \ dénom. 5	0	n	
0	24	6	30
n	3	31	34
	27	37	64

i.i = - 3,00 < -1,64
donc la quasi-implication est vérifiée

<u>Exemple 3:</u> chez les petits: (dénommer 4) $\overset{?}{\underset{q}{\Rightarrow}}$ (dénommer 3,2 et 1)

dénom. 3,2 et 1 \ dénom. 4	0	n	
0	6	5	11
n	3	50	53
	9	55	64

i.i = -1,63 > -1,64
donc la quasi-implication n'est pas vérifiée

La non vérification de la quasi-implication testée chez les petits ne remet pas sérieusement en question le résultat annoncé en début de paragraphe car:

- l'i.i trouvé (-1,63) est très proche de la valeur limite (-1,64);
- l'un des 3 enfants (Rég (3;2)) figurant dans la case dén.4 - non dén. (3,2 et 1) a répondu 4 presque systématiquement à toutes les questions (même aux autres épreuves: voir tableau des rép. ind.): il n'est donc pas un contre-exemple pertinent à l'implication testée;
- les 2 autres enfants, Fré (3;2) et Sté (3;0), figurant dans cette case, sont également très jeunes. Or, nous avons vu au B4 que les très jeunes enfants ne sachant pas encore identifier un nombre, répondent néanmoins un nombre-mot à la question "Combien?". Comme 4 est l'un des nombre-mots les plus connus, la probabilité d'une dénomination correcte de 4 par hasard est donc loin d'être nulle.

2) <u>Le modèle "1,2,(éventuellement 3), beaucoup" de A. Descoeudres (cf.DESCOEUDRES 1921) n'est pas explicitement confirmé</u>:
Le modèle "1,2,(éventuellement 3), beaucoup" décrit l'observation de A. Descoeudres selon laquelle les jeunes enfants identifient souvent 1, 2, (éventuellement 3) et répondent "beaucoup" pour tout nombre > 2 (resp. 3).

Sur les 128 petits et moyens interrogés, nous n'avons eu qu'un seul cas, Fra (3;10) suivant exactement ce modèle: il a en effet dénommé 1 et 2 correctement et répondu: "beaucoup" pour 3 et 4.
Par contre, nous avons eu 3 enfants, Mar ($3;6^+$), Céc (3;10) et Aud (3;7), qui, tout en ne dénommant pas correctement le nombre 3, ont répondu ou commenté qu'il n'y en avait "pas beaucoup":
pour ces enfants, comme pour certains peuples très peu civilisés (rapporté dans GUITEL 1975), qui ne comptent pas au-delà de deux, le mot beaucoup pourrait être l'équivalent de "tous les cheveux de la tête" (remarquons toutefois que, contrairement aux indigènes en question, ils utilisent le mot beaucoup, et n'empoignent pas leur chevelure pour le signifier !).
Néanmoins, un nombre non négligeable d'enfants, par exemple ceux qui dénomment correctement 1 et 2 et répondent "Je sais pas" pour 3 et 4, suivent un modèle qui s'apparente à celui de A.Descoeudres. Soulignons aussi que 7 enfants suivent le modèle "1,2,2,2,(2)" et 3 le modèle "1,2,3,3,(3)" et semblent donc, tel ce vieillard Sakai de Malacca (rapporté dans MENNINGER 1933) qui affirma à l'ethnologue : "Monsieur, j'ai 3 ans" désigner par 2 (resp.3) tout nombre > 2 (resp.3).
A propos du modèle "1,2,2,2", on peut noter que la plus jeune enfant de l'expérience (2;7) a suivi ce modèle, alors qu'au cours de l'épreuve des Jeu elle a dit systématiquement "plein" pour 3 et "2" pour 2: ceci est un argument en faveur de la parenté de ce modèle avec le modèle de Descoeudres.
Notons aussi que, lors des préexpériences, nous avons rencontré plus, surtout proportionnellement, d'enfants suivant le modèle "1,2, beaucoup ou plein": cela peut s'expliquer par la différence de procédure (épreuve de dénomination moins systématique) ou/et la différence de milieu (plus favorisé).

Chapitre VII : Résolution des problèmes

"Elle (= l'arithmétique) est la première fontaine à laquelle le jeune assoiffé de connaissances boit l'eau pure de la vérité intellectuelle"

Davies, 1870.

VII.- Résolution des problèmes

A) Les problèmes verbaux

1) Les réussites aux problèmes verbaux des petits et des moyens

a) Tableau des réussites en nombres:

Problème / G.A. (nombre d'enfants)	Ani$^+$(2,1)	Pou$^+$(2,1)	Bon$^-$(3,1)
3;3 (28+4)	4	5	13-3
3;9 (32)	12	12	23-4
4;3 (32)	17	15	23-2
4;9 (32)	22	23	21
Total (124+4)	55	55	80-9

Lecture:

- l'écriture additive 28+4 indique que seulement 28 enfants du G.A. 3;3 ont fait cette épreuve (les 4 restants ont été estimés trop inattentifs);
- l' écriture soustractive 13-3 indique que 13 enfants ont réussi le problème d'après nos critères de réussite (voir codage) mais que 3 d'entre eux ont répondu systématiquement 2 à tous les problèmes verbaux.

b) tableaux croisés

Pou$^+$(2,1) \ Ani$^+$(2,1)	R	E	
R	46 (1,11 13,21)	9 (4 ,1 2 ,2)	55
E	9 (3 ,1 4 ,1)	60 (20,19 13, 8)	69
	55	69	124

Bon$^-$(3,1) \ Ani$^+$(2,1)	R	E	
R	42 (3 ,9 13,17)	29 (7,10 8, 4)	71
E	13 (1 ,3 4 ,5)	31 (14, 6 5, 6)	44
	55	60	115

$\chi^2_M = 6,10$ s.

Bon$^-$(3,1) \ Pou$^+$(2,1)	R	E	
R	41 (3,10 11,17)	30 (7 ,9 10,4)	71
E	14 (2, 2 4, 6)	30 (13,7 5,5)	44
	55	60	115

$\chi^2_M = 5,82$ s.

Remarque: On a indiqué entre parenthèses les contributions respectives de chacun des G.A. dans la disposition (3;3 , 3;9
4;3 , 4;9)

c) Commentaires

α) pour les problèmes $Ani^{+}(2,1)$ et $Pou^{+}(2,1)$ on enregistre des réussites très comparables quelque soit le G.A. De plus, les progrès avec l'âge sont réguliers et on arrive à un taux de 22/32= 0,69(resp.$\frac{23}{32}$ =0,72) de réussites à 4;9 ans;

β) pour le problème $Bon^{-}(3,1)$ on a, de manière approximative et que l'on tienne compte des réponses 2 systématiques ou non, une stabilité du taux de réussite autour de 0,70 entre 3;9 ans et 4;9 ans;

γ) dans les 3 premiers G.A., $Bon^{-}(3,1)$ est (significativement en regroupant ces 3 G.A.) plus réussi que, respectivement, $Ani^{+}(2,1)$ et $Pou^{+}(2,1)$.

d) Première interprétation

La réussite supérieure du problème $Bon^{-}(3,1)$ paraissant se limiter aux plus jeunes enfants, on peut penser à certaines réussites accidentelles à ce problème, en particulier le comportement consistant à répondre 2 systématiquement conduit à de telles réussites (même en éliminant ces derniers enfants, il peut subsister de telles réussites accidentelles). Ces réussites accidentelles affecteraient plus particulièrement le problème $Bon^{-}(3,1)$ car le nombre-mot deux semble une "bonne"réponse à la question "Combien ?" ("bonne" au sens de la bonne forme gestaltiste), peut-être parce qu'il est le premier nombre acquis par l'enfant comme cela a souvent été remarqué par les psychologues (Decroly, Bühler,...)

2) Les réussites aux problèmes verbaux des grands

a) Tableau des réussites en nombres

Problème / G.A. nombre d'enfants	$Bon^{+}(5,2)$	$Pro^{+}(4,2)$	$Pro^{+}(2,4)$	$Bon^{-}(7,2)$	$Bil^{-}(3,1)$	$Bil^{-}(5,2)$
5;3 (29 + 3)	17	6	6	5	7	6
5;9 (31 + 1)	22	12	9	12	4	3
6;3 (31 + 1)	31	22	20	18	5	3
TOTAL (91 + 5)	70	40	35	35	16	12

Lecture: taux ≥ 0,75
0,50 ⩽ taux < 0,75
0,25 ⩽ taux < 0,50
0 ⩽ taux < 0,25

(les taux sont calculés à partir de 32 enfants par G.A.)

Pour les écritures additives des nombres d'enfants,voir tableau VII,1

b) Tableaux croisés

α) Variation de la taille des données:

$Bon^-(5,2)$ \ $Bon^-(7,2)$	R	E	
R	34	36	70
E	1	20	21
	35	56	91

$Bil^-(3,1)$ \ $Bil^-(5,2)$	R	E	
R	9	7	16
E	3	72	75
	12	79	91

χ^2_{MC} n.c.

R à $Bil^-(5,2) \underset{q}{\Rightarrow}$ R à $Bil^-(3,1)$:
vérifiée (i.i = -2,19)

β) Variation de l'ordre des données :

$Pro^+(4,2)$ \ $Pro^+(2,4)$	R	E	
R	30	10	40
E	5	46	51
	35	56	91

χ^2_M = 1,67 n.s.

R à $Pro^+(2,4) \underset{q}{\Rightarrow}$ R à $Pro^+(4,2)$
vérifiée (i.i = -3,30)

Remarque: on a bien entendu vérifié que les 2 versions de Pro^+, Ani^+ et Fru^+ ne donnaient pas lieu à des différences de réussites significatives [20 réussites aussi bien à $Ani^+(4,2)$ qu'à $Fru^+(4,2)$; 17 à $Ani^+(2,4)$ et 18 à $Fru^+(2,4)$] .

γ) Variation du type de problème :

$Bon^-(5,2)$ \ $Bil^-(5,2)$	R	E	
R	11	59	70
E	1	20	21
	12	79	91

c) Conclusions

α) $Bon^-(5,2)$ est très nettement le problème le plus réussi , et, à 6;3 ans, tous les enfants interrogés l'ont réussi. Soulignons toutefois qu'en première réponse seulement 23 sur 31 enfants auraient réussi. Notons aussi que l'erreur la plus fréquente est la réponse de l'une des données: 12 enfants sur les 21 échecs ont donné une telle réponse.

β) Les progrès sont réguliers avec l'âge, sauf aux problèmes Bil^-. Mais ce dernier résultat n'est guère pertinent car:

- d'une part, il y a très peu de réussites à ce type de problème;
- d'autre part, quelques enfants du G.A. 5;3 répondent systématiquement, ou presque, l'une des données plus 1: Cél (5;3) est le cas le plus net puisque ce comportement est systématique; Her(5;1) et Lau (5;1) ont ce comportement à 5 sur 6 des problèmes verbaux. Ces enfants réussissent alors les problèmes $Bil^-(3,1)$ et $Bil^-(5,2)$ (et aussi $Bon^-(5,2)$).

γ) Les problèmes Bil^- sont très peu réussis, même avec des données très simples comme (3,1) ne devant pas donner lieu à des difficultés de calcul.

δ) La permutation de l'ordre des données dans les problèmes Pro^+ ne change pas significativement la réussite à ces problèmes.

ε) Un petit accroissement de la taille des nombres, (5,2) → (7,2), dans les problèmes Bon^- accroît significativement la difficulté: 36 enfants sur 91 réussissent le premier mais pas le second de ces problèmes (alors qu'un seul réussit le second sans avoir réussi le premier).

3) Commentaires

a) La facilité relative des problèmes Bon^-

Elle pourrait provenir:

- du fait (particulier) que la question posée est très naturelle: nous en voulons pour preuve les enfants qui répondent instantanément à ces problèmes Bon^- et surtout ceux qui répondent avant même que la question soit posée;
- du fait(plus général) qu'un problème soustractif ETE_F (voir III,A,O) est la "simple diminution si coutumière à l'enfant, de quelque chose qui est donné", alors qu'un problème additif exige "l'intuition de quelque chose qui n'est pas encore réalisé"; et Wallon (cf. WALLON 1941), qui nous a inspiré cette remarque, rappelle un résultat de Decroly suivant lequel l'enfant, dans une tâche d'égalisation de 2 groupes, n'utilise pendant longtemps que le procédé consistant à retirer au groupe le plus fort, sans jamais ajouter au plus petit.

Or, ce naturel ou/et coutumier est très important pour le jeune enfant,

- d'une part, parce que cela lui évite une trop longue mémorisation des données, mémorisation difficile pour les plus petits (voir IX,B, introduction) et même pour les grands qui parfois, par exemple après avoir mis la première données sur les doigts, demandent qu'on leur répète la deuxième donnée (ou aussi utilisent une donnée erronée);

- d'autre part, parce qu'il peut faire appel à son expérience:
  Exemples: Magalie (5;3) répond "Ça fait 1" à $Bon^-(3,2)$ avant la question. Pourquoi ? "Parce que je le sais". Sonia (4;1) répond "Ca fait 2" avant la question à $Bon^-(3,1)$ et rajoute spontanément: "Et si elle en mange un autre, elle en aura plus qu'un".

On peut alors se demander pourquoi, comparativement au taux de réussite que nous avons obtenu à 6;3 au problème $Bon^-(5,2)$, nous n'avions même pas obtenu 50% de réussites à $ETE_F^-(5,2)$ à 7;5 ans dans FISCHER 1979: si des différences expérimentales, dans la formulation des problèmes et surtout dans leur présentation, peuvent expliquer partiellement cette différence, nous pensons aussi que la pensée plus verbale* à 7;5 qu'à 6;3 n'y est pas étrangère. On peut même, à ce propos, souligner ce qui nous semble être l'un des intérêts d'une résolution précoce des problèmes verbaux: nous voulons dire, en nous appuyant sur le troisième déterminant du changement concret-abstrait dégagé par Ausubel** (cf. AUSUBEL 1963), qu'en abordant seulement les problèmes verbaux à un stade verbal, l'enfant risque de se trouver dans la situation de celui à qui l'on voudrait apprendre à rouler à bicyclette tout de suite sans les mains.

b) La difficulté des problèmes Bil^-

Contrairement aux problèmes EEE^- (voir III,A,0) pour lesquels l'enfant répond souvent avec conviction la donnée du tout pour celle de la main droite, résultat mis en évidence dans FISCHER 1979 avec des enfants un peu plus âgés, mais retrouvé avec certains jeunes enfants au cours des préexpériences,

Exemple: Thierry (5;8), qui a réussi par ailleurs tous les problèmes verbaux et les jeux proposés, répond 3 à $EEE^-(3,1)$

**Ausubel pense qu'après quelques années de pratique avec compréhension pleine de sens et de manipulation de relations avec l'aide de supports concrets-empiriques, l'enfant développe graduellement une facilité plus grande pour réaliser ces opérations, de telle sorte que éventuellement (après avoir acquis les concepts transactionnels et d'ordre supérieur nécessaires), il peut réaliser ces mêmes opérations effectivement sans le relais de supports (comme après avoir fait beaucoup de bicyclette, il va rouler sans les mains).

---

* Une expérience de Doob (cf.DOOB 1964) sur les images eidétiques semble montrer que les représentations imagées diminuent lorsque les capacités à lire et écrire augmentent.

en commentant spontanément: "Autrement (= si l'expérimentateur ne lui avait pas dit la réponse!), j'aurais fait tout seul. C'est trop facile !"

et donc ne voit pas la difficulté, l'enfant exprime souvent sa difficulté à comprendre la question posée.

<u>Exemple</u>: Sté (6;3), qui a réussi tous les autres problèmes verbaux et jeux, commente pour Bil$^-$(3,1): "Ça, c'est difficile" et répond "3", puis "4"; ensuite pour Bil$^-$(5,2), il répond "5" et commente: "J'ai pas compris de plus". L'expérimentateur lui explique un peu: "Je crois que j'ai un peu compris: 4 de plus"; Sté (5;11) ne répond pas à Bil$^-$(5,2) et explique: "Je sais pas ce que ça veut dire moi combien de plus";

Emm(6;4), qui a réussi lui aussi tous les autres problèmes verbaux et jeux, répond à Bil$^-$(5,2) d'abord 5 sans conviction, puis "Ah! Elle en a plus: 7", puis après répétition "Ah! Ma soeur elle en a 2 de plus" et finit par s'inquiéter: "Tout le monde a su ça ?"

Gréco avait d'ailleurs déjà remarqué la difficulté d'une telle question: dans GRECO 1962a, il demandait aux enfants non-conservants qui, devant les collections ci-contre, • • • • • • • (jetons A)
• • • • • • • (jetons B dans la configuration B'), soutenaient qu'il y a plus de B que de A, "Combien il y a de B en plus ?" Voici son commentaire: "On pouvait supposer que cette question serait immédiatement comprise par les sujets qui affirment avec conviction la supériorité de B', et que leur réponse serait "un de plus", vu la configuration où le dernier des B' dépasse effectivement la ligne des A. Or il n'en est rien. Bien des sujets, même après 6 ans, semblent ne pas comprendre ce langage ou manifestent leur ignorance".

Ce que l'enfant ignore dans les problèmes Bil$^-$, ce n'est pas qu'il faut 2 (resp. 3) pour aller de 1 (resp.2) à 3(resp. 5), mais que c'est cela qu'on lui demande ! L'expérience de Gréco montre que la présence des objets n'élimine pas (complètement) la difficulté, et les exemples suivants:

Jea (5;2) qui a réussi tous les autres problèmes verbaux, réussit aussi (d'abord) le problème Bil$^-$(3,1) avec une explication convaincante: "Parce que le 1 c'est celui de son petit frère alors il y en a 2 qui sont rajoutés en plus", mais ne trouve pas ensuite Bil$^-$(5,2) pour lequel il répond: "Je cherche : 5". Répétition de l'énoncé: "C'est difficile !" Encouragement :"6" (au hasard ?) Nouvelle répétition: "4" (viblement sans réflexion). Tu dis n'importe quoi ? "Oui: j'arrive pas à savoir ".

Emm (6;4) dont nous avons cité ci-dessus la réaction à Bil$^-$(5,2) a trouvé ensuite la réponse à Bil$^-$(3,1) mais l'a ajouté à l'une des données: "2 de plus et ben ça fait 5" (plus de réponse après répétition de l'énoncé)!

permettent de penser que le caractère statique de l'énoncé n'est pas étranger à cette dernière puisque Jea lorsqu'il réussit Bil$^-$(3,1) interprète l'énoncé en termes d'actions ("2 qui sont rajoutés en plus") et que Emm lorsqu'il a trouvé la réponse (disons, faute de mieux, par intuition) croit devoir l'ajouter à l'une des données (pour avoir "fait" quelque chose!)

B) Les problèmes Jeu$^-$

1) Tableau des réussites en nombres

G.A. (nombre d'enfants) \ Jeu$^-$	(3,1)	(3,2)	(4,3)	(5,2)	(7,2)
3;3 (28+4)	13	7	11	1	
3;9 (32)	21	14	15	7	
4;3 (32)	23	15	18	8	
4;9 (32)	24	20	16	11	
5;3 (32)	26	28	24	17	8
5;9 (32)	25	28	25	20	11
6;3 (32)	30	30	23	25	12

2) Influence de l'ordre de présentation des jeux pour les 3 premiers G.A.

a) Réussites aux Jeu$^-$ (3,1), (3,2) et (4,3) suivant leur place dans la suite:

Jeu$^-$(3,1)

	R	E	
posé en 1°	23	22	45
posé en 2°	34	13	47
	57	35	92

$\chi^2 = 4,39$ s.

Jeu$^-$(3,2)

	R	E	
posé en 1°	8	39	47
posé en 2°	28	17	45
	36	56	92

χ^2 évidemment s.

	Jeu$^-$(4,3) R	E	
posé en 3°	26	20	46
posé en 4°	18	28	46
	44	48	92

$\chi^2 = 2,79$ n.s.

b) Réussites comparées des problèmes Jeu$^-$(3,1) et Jeu$^-$(3,2) lorsqu'ils sont présentés à la même place dans la suite des problèmes :

. tous les 2 sont posés en 1er

	R	E	
Jeu$^-$(3,1)	23	22	45
Jeu$^-$(3,2)	8	39	47
	31	61	92

χ^2 évidemment s.

. tous les 2 sont posés en 2e

	R	E	
Jeu$^-$(3,1)	34	13	47
Jeu$^-$(3,2)	28	17	45
	62	30	92

$\chi^2 = 1,07$ n.s.

3) Tableaux croisés

a) Pour les 3 premiers G.A.

		Jeu$^-$(3,2) R	E	
Jeu$^-$(3,1)	R	24	33	57
	E	12	23	35
		36	56	92

χ^2_M évidemment s.

		Jeu$^-$(3,2) R	E	
Jeu$^-$(4,3)	R	21	23	44
	E	15	33	48
		36	56	92

$\chi^2_M = 1,68$ n.s.

b) Pour les 3 derniers G.A.

		Jeu$^-$(3,1) R	E	
Jeu$^-$(3,2)	R	75	11	86
	E	6	4	10
		81	15	96

χ^2_{MC} n.c.

		Jeu$^-$(4,3) R	E	
Jeu$^-$(3,2)	R	64	22	86
	E	8	2	10
		72	24	96

χ^2_{MC} n.c.

Jeu$^-$(4,3) \ Jeu$^-$(5,2)	R	E	
R	51 (57)	21 (31)	72 (88)
E	11 (16)	13 (24)	24 (40)
	62 (73)	34 (55)	96 (128)

$\chi^2_{MC} = 2,53$ n.s.
($\chi^2_M = 4,79$ s)

Jeu$^-$(5,2) \ Jeu$^-$(7,2)	R	E	
R	26	36	62
E	5	29	34
	31	65	96

χ^2_M évidemment s.

Entre parenthèses: résultats pour les 4 derniers G.A.

4) Conclusions

a) Dans le tableau E,1 on peut voir une opposition entre les 3 premiers G.A. et les trois derniers: c'est pourquoi nous les avons étudiés séparément. Cette opposition se traduit par les faits que:

- Jeu$^-$(3,1) est (significativement si l'on regroupe les 3 premiers G.A.) plus réussi que Jeu$^-$(3,2) dans les 3 premiers G.A. , alors que dans les 3 derniers G.A. on a des réussites comparables à ces 2 problèmes;
- Jeu$^-$(4,3) est plus réussi que Jeu$^-$(3,2) dans les 3 premiers G.A., alors que dans les 3 derniers c'est l'inverse.

b) Pour déterminer l'origine des "bizarreries" des 3 premiers G.A., nous avons étudié certaines influences de l'ordre de présentation des jeux (tableaux du 2) et nous avons trouvé que :

- Jeu$^-$(3,1) et Jeu$^-$(3,2) sont significativement plus réussis lorsqu'ils sont posés en 2e, ce qui n'est guère étonnant;
- Jeu$^-$(4,3) est plus réussi en 3e position qu'en 4e, mais la différence n'est pas significative (au seuil où nous travaillons);
- enfin, la différence de réussite entre Jeu$^-$(3,1) et Jeu$^-$(3,2) est beaucoup plus accentuée lorsque ces 2 problèmes sont chacun posés en premier.

c) Si l'on fait un rangement des problèmes suivant le nombre de réussites, on obtient, pour chacun des 3 derniers G.A., le même ordre [à 1 exception près: chez les 6;3 il faut permuter Jeu$^-$(4,3) et Jeu$^-$(5,2)], à savoir:
Jeu$^-$(3,2) en premier, puis Jeu$^-$(3,1), Jeu$^-$(4,3), Jeu$^-$(5,2) et en dernier, Jeu$^-$(7,2), les différences de réussite pouvant être (si l'on regroupe les G.A.) significatives, par exemple entre Jeu$^-$(5,2) et Jeu$^-$(7,2), ou non, par exemple entre Jeu$^-$(3,1) et Jeu$^-$(3,2).

5) Interprétations

Tout se passe comme si beaucoup des plus jeunes (donc surtout ceux des premiers G.A.) ne comprenaient pas le jeu proposé, faute de penser que le nombre initial de jetons est conservé. Ces enfants répondent alors "au hasard" au premier jeu et, comme on l'a déjà vu, "2" est une réponse privilégiée, d'où la réussite supérieure de Jeu$^-$(3,1) sur Jeu$^-$(3,2) surtout sensible lorsque ces problèmes sont posés chacun en premier.
Ne comprenant pas véritablement le problème, ils essaient alors de trouver comment l'expérimentateur procède: le premier jeu leur fait penser et le second leur confirme que l'expérimentateur met toujours 1 jeton dans l'une des mains. Cette découverte les conduit alors à réussir Jeu$^-$(4,3) et échouer Jeu$^-$(5,2) en répondant 1, d'où les réussites importantes à Jeu$^-$(4,3) surtout lorsqu'il est en 3e position car, s'il est précédé par Jeu$^-$(5,2), ce dernier infirme la loi découverte. Cette interprétation est en accord avec la quasi-disparition des réponses 1 au Jeu$^-$(5,2) entre 4;3 et 4;9 illustré par le tableau :

	Réponse au Jeu$^-$(5,2): 1	autres	
G.A. 4;3	13	19	32
G.A. 4;9	3	29	32
	16	48	64

$\chi^2_C = 6{,}75$ s.

Un autre résultat soutenant cette interprétation est celui obtenu au cours de la préexpérience double dont nous avons déjà présenté certains

résultats (voir III,B) :
Nous avions posé à des enfants entre 4;0 et 4;9 la suite Jeu$^-$(3,1), (3,2), (4,3) et (5,2), toujours dans le même ordre, 2 fois, à 14 jours d'intervalle, en demandant aux enfants l'une des fois de "regarder" (comme dans l'expérience principale) et l'autre fois de dénombrer (en réponse à la question : Combien ? Les enfants qui n'y parvenaient pas, ou incorrectement, ont été aidés par l'expérimentateur) le nombre initial de jetons. Un résultat intéressant est que, dans le second cas, les enfants répondent (les effectifs sont insuffisants pour le calcul du χ^2_c) moins souvent 1 au Jeu$^-$(5,2) .
Voici le tableau:

Jeu$^-$(5,2) sans dén. \ Jeu$^-$(5,2) avec dén.	1	autres	
1	6	10	16
autres	2	14	16
	8	24	32

Si donc un nombre non négligeable d'enfants de cette préexpérience profite de "l'aide" fournie par l'expérimentateur, il est probable, comme le montrent de nombreuses expériences d'apprentissage, que ces enfants sont très proches de la même réussite sans aide. Ceci nous paraît confirmer qu'aux environs de 4;6 beaucoup d'enfants comprennent le véritable problème.

<u>Remarque</u>: si c'est la conservation, au sens piagétien, du nombre qui est à l'origine de la compréhension du problème, on voit que l'âge ici trouvé, ~ 4;6, est antérieur à celui des expériences classiques d'au moins 1 an. La différence pourrait alors s'expliquer par le fait que l'enfant n'est pas induit en erreur par des facteurs perceptifs: certaines expériences rapportées dans BRUNER 1966a montrent en effet que si on fait passer les épreuves de conservation des quantités en procédant derrière écran, la conservation peut être plus précoce.

6) <u>Commentaires</u>

Mayer (cf. MAYER 1977) ayant donné des exemples qui prouvent que les plus jeunes enfants (~ 5 ans) utilisent davantage des représentations iconiques pour résoudre certains problèmes que les plus âgés (~ 7 ans), qui préfèrent des représentations symboliques, on pouvait penser que les problèmes Jeu$^-$, par les solutions visuelles qu'ils devraient favoriser,

> Exemple 1: Beaucoup d'enfants, lorsqu'on leur demande comment ils ont trouvé, disent qu'ils ont vu. Ainsi Marie-Elisabeth (5;6) réussit Jeu$^-$(3,1) et explique: "Parce que j'ai vu comment tu les as pris". Alain (6;2) trouve Jeu$^-$(5,2) et explique: "Parce que j'avais vu ". Olivier (5;6) échoue à Jeu$^-$(7,3). Tu les avais comptés ? "Ah non!". Tu les avais pas comptés avant que je les cache ? "Non: j'avais vu un peu".
>
> Exemple 2: Certains enfants comptent les jetons absents dans la main de l'expérimentateur.
>
> Exemple 3: Quelques enfants indiquent un nombre erroné de jetons lors de la présentation initiale mais réussissent tout de même.

sont plus faciles* pour les jeunes enfants de notre expérience que les problèmes verbaux.

Ceci n'est pas, à première vue, confirmé par nos résultats, puisque Bon$^-$(5,2) [resp. Bon$^-$(7,2)] est plus réussi que Jeu$^-$(5,2) [resp. Jeu$^-$(7,2)]. Mais le fait d'avoir répété les énoncés des problèmes verbaux a constitué un avantage certain pour ces derniers, et si l'on tient compte des premières réponses données par les enfants aux problèmes verbaux, on trouve effectivement que les résultats ci-dessus sont inversés.

Aucune de ces différences n'étant toutefois significative, nous ne les commenterons pas. Tout au plus (et au contraire), peut-on peut-être voir dans cette non-différence de difficulté une illustration du fait souligné dans PIAGET 1961a, qu'il est vain de chercher à distinguer 2 types de connaissances, l'une opérative (résultat des actions ou des opérations, donc précédant ou atteignant une connaissance opératoire) et l'autre figurative (incluant l'utilisation d'images mentales, en particulier les images mentales reproductrices statiques immédiates ** qu'auraient dû favoriser les Jeu$^-$).

** Cf. La classification des images mentales dans PIAGET 1966

* Notons que certains enfants, parce qu'ils ont déjà une pensée très verbale-symbolique ou par l'effet inducteur des problèmes verbaux qui précèdent les Jeu$^-$, échouent en essayant de donner des solutions verbales symboliques alors qu'ils seraient capables probablement de réussir les Jeu$^-$ par des solutions visuelles. Exemple: Gérard (5;10), à Jeu$^-$(5,2) répond: "3,4,5. Il y en a 5 mais il faut dire 3,4,5". Alors ça fait combien? "5"

Chapitre VIII: Principes du comptage

"Heureusement, grâce à une série de circonstances remarquables, l'homme a appris à aider sa perception du nombre, si limitée, de l'appui d'un artifice qui était destiné à exercer une influence extraordinaire sur sa vie ultérieure; cet artifice, c'est l'action de compter".

T. Dantzig, 1937.

VIII.- Principes du comptage

A) Principes du "Comment compter"

1) Tableau des attributions (en nombres) par G.A.

Principe / G.A.	Nombre à compter	Pbi	Pss	Pca	Les 3
3;3	3	17	11	6*	4
3;9	3	22	21	13*	12*
4;3	5	22	18	16*	16
4;9	5	25	24	20	18
5;3	7	23	25	25	20
5;9	7	27	29	31	25
6;3	7	30	30	30	30

2) Evolution en fonction de l'âge

a) Pour 3:

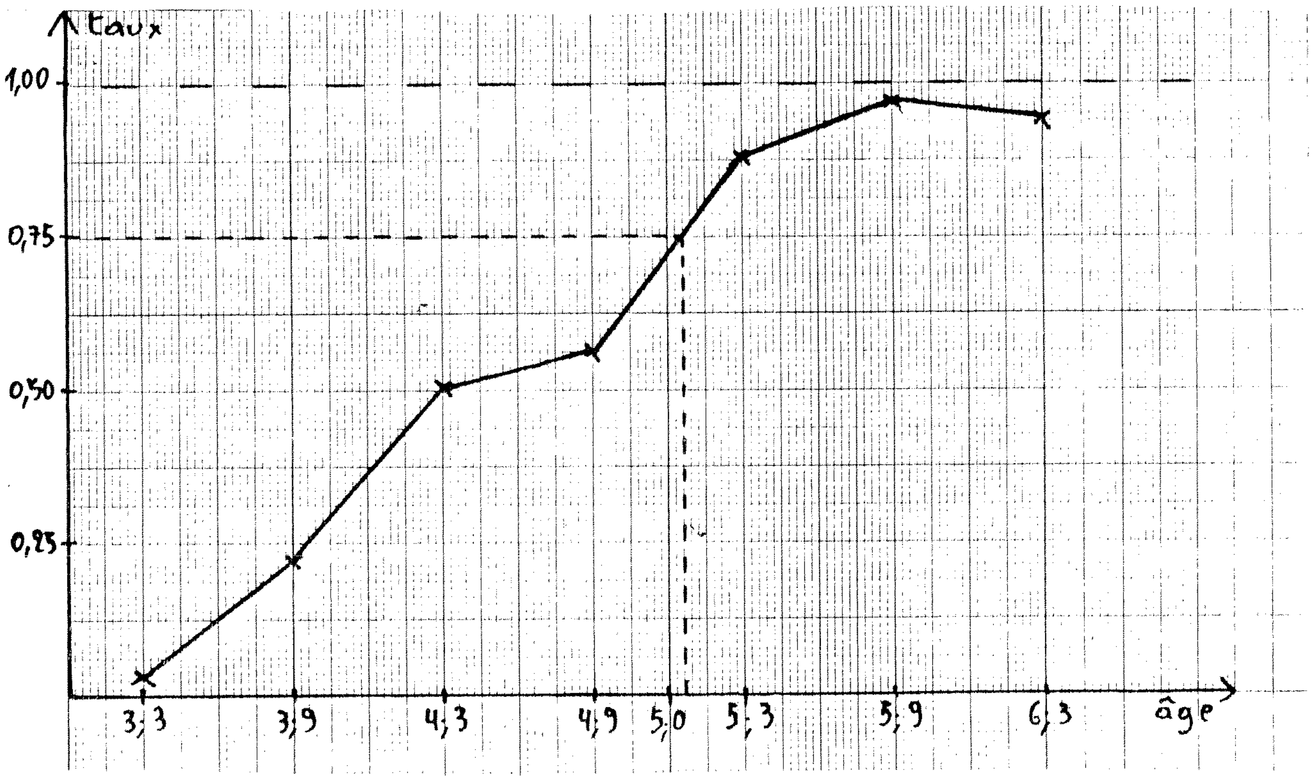
Principe / G.A.	Pbi	Pss	Pca	Les 3
3;3	17	11	6*	4
3;9	22	21	13*	12*
4;3	30	24	19	19
4;9	29	29	25	25

b) Pour 5 : α) Tableaux :

Principe / G.A.	Pbi	Pss	Pca	Les 3
4;3	22	18	16*	16
4;9	25	24	20	18
5;3	30	28	29	28
5;9	32	31	32	31
6;3	30	30	30	30

* sur 31 enfants seulement (32 pour les autres cases)

β) Représentation graphique: Attributions de l'ensemble des 3 principes (pour 5) en fonction de l'âge



c) Commentaires:

- les 2 tableaux et la représentation graphique montrent que les progrès sont réguliers: les seules légères entorses à cette régularité concernent des âges où le taux de réussite est proche de 1;
- c'est vers 5;1 ans que le taux de 0,75, pour l'attribution de l'ensemble des 3 principes du "Comment compter 5" est atteint;
- malgré un léger fléchissement de la courbe ci-dessus entre 4;3 et 4;9, le non- progrès enregistré pour la connaissance de la suite des nombres dans cet intervalle d'âge n'est pas nettement confirmé: en effet, dans les 2 tableaux il y a toujours progrès entre 4;3 et 4;9, ces progrès pouvant même être assez nets, par exemple pour le Pss(5), on passe de 18 à 24, ou encore pour le Pca(3), on passe de 19 à 25.
- Remarque: Binet et Simon (cf. BINET 1911) plaçaient à 5 ans l'épreuve qui consiste à compter 4 objets simples (des sous) en mettant le doigt sur les objets.

3) Hiérarchie de difficulté

a) Tableau général (en nombres et taux)

Nombre de principes → / Nombre à compter	Age	3 principes/3	2 principes/3			1 principe /3			0 principe/3	Nombre d'enfants
		P(n)	Pbi(n)et Pss(n)	Pbi(n)et Pca(n)	Pss(n)et Pca(n)	Pca(n)	Pss(n)	Pbi(n)	Aucun	
3	3;3	4 (0,13)	3(0,10)	1 (0,03)	1 (0,03)	0 -	2(0,06)	9(0,29)	11(0,35)	31
	3;9	12 (0,39)	3(0,10)	0 -	1 (0,03)	0 --	4(0,13)	6(0,19)	5(0,16)	31
	4;3	19 (0,59)	5(0,16)	0 -	0 -	0 -	1(0,03)	6(0,19)	1(0,03)	32
	4;9	25 (0,78)	3(0,09)	0 -	0 -	0 -	1(0,03)	1(0,03)	2(0,06)	32
5	3;3	1 (0,03)								32
	3;9	7 (0,25)								32
	4;3	16 (0,52)	2(0,06)	0 -	0 -	0 -	0 -	4(0,13)	9(0,29)	31
	4;9	18 (0,56)	4(0,13)	0 -	1 (0,03)	1(0,03)	1(0,03)	3(0,09)	4(0,13)	32
	5;3	28 (0,88)	0 -	1 (0,03)	0 -	0 -	0 -	1(0,03)	2(0,06)	32
	5;9	31 (0,97)	0 -	1 (0,03)	0 -	0 -	0 -	0 -	0 -	32
	6;3	30 (0,94)	0 -	0 -	0 -	0 -	0 -	0 -	2(0,06)	32
7	4;3	11 (0,35)								31
	4;9	12 (0,38)								32
	5;3	20 (0,63)	1(0,03)	2 (0,06)	3 (0,09)	0 -	1(0,03)	0 -	5(0,16)	32
	5;9	25 (0,78)	0 -	2 (0,06)	4 (0,13)	0 -	0 -	0 -	1(0,03)	32
	6;3)	30 (0,94)	0 -	0 -	0 -	0 -	0 -	0 -	2(0,06)	32

b) <u>Tableaux croisés</u>:

α) <u>petits</u>:

Pbi(3) \ Pca(3)	0	n	
0	17	21	38
n	2	22	24
	19	43	62

χ^2_{MC} s.

Pss(3) \ Pca(3)	0	n	
0	18	12	30
n	1	31	32
	19	33	62

χ^2_{MC} s.

Pbi(3) \ Pss(3)	0	n	
0	23	16	39
n	9	16	25
	32	32	64

$\chi^2_{M} = 1{,}96$ n.s.

β) <u>moyens</u>:

Pbi(5) \ Pca(5)	0	n	
0	34	13	47
n	2	14	16
	36	27	63

$\chi^2_{MC} = 6{,}67$ s.

Pss(5) \ Pca(5)	0	n	
0	35	7	42
n	1	20	21
	36	27	63

$\chi^2_{MC} = 3{,}13$ n.s.

Pbi(5) \ Pss(5)	0	n	
0	40	7	47
n	2	15	17
	42	22	64

χ^2_{MC} n.s.

γ) <u>grands</u>:

Pbi(7) \ Pca(7)	0	n	
0	79	1	80
n	7	9	16
	86	10	96

χ^2_{MC} n.c.

Pss(7) \ Pca(7)	0	n	
0	82	2	84
n	4	8	12
	86	10	96

χ^2_{MC} n.c.

Pbi(7) \ Pss(7)	0	n	
0	76	4	80
n	8	8	16
	84	12	96

χ^2_{MC} n.c.

δ) petits + moyens :

		Pca(3) 0	Pca(3) n	
Pbi(3)	0	61	36	97
	n	2	27	29
		63	63	126

χ^2_M s.

		Pca(3) 0	Pca(3) n	
Pss(3)	0	62	21	83
	n	1	42	43
		63	63	126

χ^2_M s.

		Pss(3) 0	Pss(3) n	
Pbi(3)	0	75	23	98
	n	10	20	30
		85	43	128

$\chi^2_M = 5,12$ s.

c) Commentaires:

- Chez les petits, et pour 3, le Pca a été attribué significativement moins souvent que le Pbi et que le Pss;
  Chez les moyens, et pour 5,seule la différence significative entre le Pca et le Pbi subsiste;
  Enfin, chez les grands, et pour 7, non seulement aucune des deux différences significatives ne subsiste, mais la tendance, surtout entre le Pbi et le Pca, est même inversée.
- Pour la comparaison entre les Pbi et Pss, pour 3, en regroupant petits et moyens, on voit que le Pbi est significativement plus attribué que le Pss, alors que chez les grands, pour 7, on a encore une fois une tendance inverse.

d) Interprétations :

- Il semble que la connaissance de la règle cardinale soit génétiquement postérieure au respect des 2 autres principes, et les rares enfants "hors hiérarchie"(2 petits sur 62 seulement) sont plutôt des cas particuliers que des contre-exemples convaincants.
- Par contre, même si le Pbi paraît plus facile à respecter, pour de très jeunes enfants, que le Pss,

  Exemple: Sté ($3,0^+$) a compté, pour 2:"1,4"; "1,2"; "5,12"; pour 3: "1,4,2"; "7,8,4"; "1,2,7"; "1,4,8"; pour 5: "1,4,7,12,7" et "1,2,4,9, 12". Il a récité: "1,5,7,8" puis "1,2,4,5,8".

  Il y a aussi quelques exemples très nets d'enfants respectant le Pss sans respecter le Pbi :

Exemple: les enfants, qui, comme Céc (3;10), entraînés par leur comptage n'arrivent pas à s'arrêter. Céc a par exemple compté 2 correctement "1,2" une fois, mais pour 2 autres comptages de 2 et pour tous les comptages de nombres supérieurs à 2, elle a en général compté: "1,2,4,5,8,14" soit à peu près la suite maximale qu'elle connaissait.

- Il est également raisonnable de penser qu'un accroissement de la taille des nombres augmente relativement plus la difficulté des Pbi et Pss que celle du Pca. L'exemple de Lae (4;8) va dans ce sens: elle ne connaît en effet la suite des nombres que jusqu'à 3 et en est très consciente. Par exemple, pour la dénomination de 4, elle ne répond pas et explique: "Moi, j'arrive à compter 3. Je sais pas compter plus" ou encore au cours des jeux elle compte 4 en pointant: "1,2,3, je sais pas celui-là (en pointant le dernier)". A l'épreuve de comptage-pointage induit il en est de même pour 5 (après 3, elle pointe le 4e et le 5e, mais ne dit rien): lorsqu'on l'aide en lui disant les suivants 4 et 5 de 3, elle n'a aucune difficulté à terminer son comptage et à conclure (technique du cache) qu'il y en a 5.

4) Comparaison avec les résultats de Gelman

a) Tableau comparatif Gelman -(Fischer) en %

Nombre	Age	Nombre d'enfants	3 princ/3	2 principes/3			1 principe/3			0 principe/3
				Pbi-Pss	Pbi-Pca	Pss-Pca	Pca	Pss	Pbi	
3	3;6 ±6	21 (60)	67 (27)	24 (10)	– (2)	– (3)	– (–)	9 (10)	– (23)	– (25)
3	4;6 ±6	19 (64)	79 (69)	21 (13)	– (–)	– (–)	– (–)	– (3)	– (11)	– (5)
5	4;6 ±6	19 (63)	63 (54)	21 (10)	– (–)	– (2)	– (2)	16 (2)	– (11)	– (21)
5	5;6 ±6	15 (64)	93 (92)	7 (–)	– (3)	– (–)	– (–)	– (–)	– (2)	– (3)
7	5;6 ±6	15 (64)	80 (70)	7 (2)	– (6)	– (11)	– (–)	13 (2)	– (–)	– (9)

réf. TABLE 8.10 p.128 (extraits) de GELMAN 1978

(nous avons considéré que les sujets de Gelman qui indiquent directement le cardinal respectent les 3 principes)

b) <u>Commentaires:</u>

Si pour les grands on a des résultats comparables à ceux de Gelman, par contre pour les petits, il faut noter de très nettes divergences, principalement les faits que:

α) Gelman a plus d'attributions de l'ensemble des 3 principes
β) " " " " Pbi et Pss (sans Pca)
γ) " moins de Pbi isolés
δ) " " d'échecs complets.

c) <u>Interprétations:</u>

Les divergences bα et bδ font penser à une différence de population: les sujets de Gelman seraient de "meilleurs" compteurs que les nôtres (différence de culture, milieu socio-économique, choix préalable des enfants,...). D'ailleurs bβ et bγ montrent que cette faiblesse relative de nos sujets n'affecte pas uniformément les 3 principes: le Pbi étant moins concerné que les autres, nous y voyons un argument en faveur de la différence de culture. De plus, comme ces divergences n'apparaissent que chez les petits, nous sommes aussi amenés à chercher leur origine dans certains critères d'attribution des Pca et Pss qui ont surtout été appliqués aux petits. Il apparaît alors que:

- pour le Pca, Gelman admet comme critère une intonation accentuée du dernier mot. Or elle rapporte que ce sont surtout les petits qui se sont vus attribuer le Pca d'après ce critère: 6/20 chez les 3;6 ± 6, contre seulement 2/20 chez les 4;6 ± 6 et 1/20 chez les 5;6 ± 6. Nous voyons donc que, si ces 6 petits, qui représentent près d'1/3 des 3;6 ± 6, avaient tous échoué à l'épreuve cardinale, pour 3, Gelman n'aurait plus guère eu qu'un tiers de réussites complètes (au lieu de 2/3), résultat qui serait alors beaucoup plus proche de notre taux de 0,27 que celui de 0,67 qui apparaît dans le tableau comparatif;
- pour le Pss, le fait de faire des comptages consécutifs, alors que chez nous les comptages étaient "entrecoupés" par des résolutions de problèmes, a certainement favorisé la stabilité des suites idiosyncrasiques. Or, ce sont précisément les plus jeunes enfants qui ont surtout des suites idiosyncrasiques. Nous voyons donc que , si nous avions attribué le Pss plus "largement", par exemple à ceux des enfants qui ont satisfait la condition α de notre critère (voir IV,A,5a), nous aurions eu beaucoup moins d'enfants dans la colonne Pbi

isolé, au profit de la colonne (Pbi et Pss), parce que pratiquement tous les enfants de Pbi isolé ont satisfait la condition α (par contre, les enfants qui n'ont aucun principe, ont rarement satisfait α *).

Conclusion:

Ces différences d'exigence dans l'attribution du Pca d'une part, de conduite de l'expérience d'autre part, expliquent en partie les divergences apparues dans le tableau comparatif. La différence des populations, et aussi le fait que Gelman a obtenu des performances maximales (voir X,A,1), pourraient expliquer le restant.

d) Remarques:

Comme non seulement les pourcentages absolus, mais aussi les hiérarchies des différents principes, dépendent essentiellement du choix des critères d'attribution, il importe, sous peine d'obtenir des résultats contradictoires (entre différentes recherches), d'harmoniser ces critères. A ce sujet, nous voudrions souligner que :

α) le critère d'intonation accentuée du dernier mot utilisé par Gelman non seulement pose des difficultés pratiques d'estimation, mais ne semble pas non plus correspondre à sa définition du Pca. En effet, dans cette dernière, elle demande bien que l'enfant soit capable de faire ressortir le dernier nombre-mot et d'indiquer qu'il représente le cardinal de la collection (..."the child must be able to pull out the last numeral assigned and indicate that it represents the numeron of the array" p.80). Or, par une intonation accentuée l'enfant prouve seulement qu'il a compris que le dernier mot joue un rôle particulier, mais rien ne prouve qu'il connait ce rôle particulier (il peut par exemple croire qu'on accentue le dernier mot pour marquer la fin du comptage):

Exemple: Aur (3;6¯) lors de l'épreuve 4, pour 3, compte-pointe "1,2,3" (3 = 3 accentué). Alors combien ? (technique du cache) "1,2,3". De plus, lors de Jeu¯(4,3) elle avait compté, pour 3, "1,2,3". Expérimentateur: C'est 3 ?"Non : c'est pas 3". Alors, c'est combien ?"C'est 2", puis elle a rajouté: "C'est comme ça" en montrant 3 doigts.

il ne satisfait donc qu'à moitié la double exigence ci-dessus citée. D'ailleurs, il est bien connu que, chez l'enfant, une compréhension claire et

* Nous avons bien entendu vérifié que le fait d'avoir fait passer l' épreuve de comptage-pointage seulement 14 jours après, à une vingtaine d'enfants (voir II,D,5,a), n'a pas eu une influence déterminante.

distincte des idées nouvelles ne précède pas toujours leur formulation et expression institutionnelle (rappelé par exemple dans FEYERABEND 1975).

β) Pour le Pss, dans l'exemple cité par Gelman (p.91) pour illustrer comment D.S.(2;6) applique le Pss,

Combien sur ce plateau-ci ? "Um-m, un, deux". Combien sur ce plateau-là ? "un, deux, six !" Tu peux le refaire ? (=You want to do that again ?) "oui, un deux, six".

la preuve de la stabilité ne nous paraît pas suffisante. On peut en effet soutenir que le second comptage de l'enfant n'est qu'une tentative réussie de répéter le premier et, dans ce cas, l'enfant n'a pas prouvé qu'il utilisait une même suite au cours de 2 comptages <u>différents</u>. De plus, même si on admettait qu'il y a eu preuve de stabilité, il faut bien voir que cette stabilité n'a été vérifiée que sur un intervalle de temps très restreint.

B) <u>Autres principes</u>

1) <u>Le principe d'ordre quelconque:</u>

a) <u>Tableau:</u>

G.A. \ Poq(n)	n=	Nombre d'enfants	Réussites en nombre	Taux de réussite
3;3	3	2	0	0,00
3;9	3	5	2	0,40
4;3	5	9	0	0,00
4;9	5	9	1	0,11
5;3	7	20	7	0,35
5;9	7	25	12	0,48
6;3	7	30	22	0,73

Réussite à Poq = répondre le même nombre que celui trouvé en conclusion du comptage-pointage induit.

<u>Rappel</u>: nous n'avons interrogé systématiquement que les grands ayant respecté l'ensemble des 3 principes du "comment compter" pour 7. Les moyens (resp. petits) ont été choisis arbitrairement parmi ceux qui avaient respecté les 3 principes du "comment compter" pour 5 (resp. 3).

b) <u>Justifications des réussites</u>

Les enfants qui ont réussi le test Poq utilisent, pour justifier leur réponse, essentiellement 3 types d'arguments. Ce sont, par ordre décroissant de fréquence:

α) <u>la référence au nombre</u>. <u>Exemple</u>:

Sop (6;5): "Parce qu'il y en a 7".

Sté (6;3): "Parce qu'il y a 7 petits ronds".

Sté ($6;0^+$): "Parce qu'il y a 7 pions, alors ça fait toujours 7".

Jea (5;10): "Parce que c'est toujours pareil" Qu'est-ce qui est toujours pareil ?" le nombre". Et quel est ce nombre ? "7".

β) <u>la référence au comptage</u>: les enfants évoquent le comptage qu'ils ne peuvent, vu la technique utilisée, réaliser effectivement (bien que l'un ou l'autre enfant essaie de compter à travers la main de l'expérimentateur ou encore imagine une collection à côté de la boîte et la compte).

<u>Exemples</u>:

Oli (6;2): "Parce que on compterait dans l'autre sens. Si on comptait tous et celui du milieu, ça ferait 7".

Cyr (5;10): "Parce que c'est pareil, sauf qu'on va dans l'autre sens".

Ben (5;10): "Parce que si je les compte, alors j'en trouve 7".

γ) <u>la référence à la collection</u>: les enfants affirment l'identité de la collection,

<u>Exemple</u>:

Nad(6;3): "Parce que c'est tous les mêmes".

en la justifiant souvent par le fait qu'il n'y a pas eu de transformation.

<u>Exemples</u>:

Rém(6;3): "Parce qu'il n'y a pas de pion(s) d'enlevé(s)".

Mat($5;6^-$): "Parce que on en change pas".

Pie($5;6^-$): "Parce que t'en enlèves pas".

Vér(6;5) : "Parce que c'est pareil sauf si on rajoute 1, ça ferait 8".

Remarque: même si un enfant pense que 2 comptages différents conduisent au même résultat, il n'est pas sûr qu'il en soit profondément convaincu. Exemple: Jac (5;11) compte-pointe 7: "1,2,..., 7,8: il y en a 8" (il a compté le jeton initial une 2e fois, en refermant le cercle). On lui pose néanmoins Poq(7); il répond:"Comme celui que j'ai compté". On lui demande alors de les recompter, mais cette fois-ci il trouve 7 (il a refait la même erreur que précédemment mais a oublié de compter le jeton central !) et commente spontanément: "Là, j'en ai pas trouvé pas 8: j'en ai trouvé que 7" sans s'en inquiéter outre mesure. On lui fait alors compter-pointer 5, ce qu'il fait et et conclut correctement, et on lui pose consécutivement Poq(5): il répond 6 en essayant probablement de tenir compte de son expérience précédente ! Signalons cependant que cet enfant, pour son âge, semble un "piètre" compteur: lorsqu'on lui demande de vérifier si c'est 6, il trouve 5, mais en refaisant les mêmes erreurs compensatoires que pour 7 ci-dessus !

c) Analyse des échecs

Les réponses des 56 enfants qui échouent à Poq peuvent être regroupées en 3 classes (on note n la réponse exacte):

- les 23 enfants qui répondent $n \pm 1$. Exemple: Ric (6;5) répond 6 (n=7); Rém (6;3) répond 8 (n=7); Fré (4;8) répond 4 (n=5); Fan (4;3) répond 6 (n=5), Loi (3;4) répond 4 (n=3); Sté (3;9) répond 2 (n=3).
- les 18 enfants qui répondent un ou (rarement) plusieurs autre(s) nombre(s). Exemple: Nat (6;3) répond 3(n=7), Vir (5;10) répond 3 ou 4 ou 5 (n=7), Ale (4;6¯) répond 9 (n=7), Vin (3;1) répond 5 (n=3).
- enfin les 15 enfants qui ne répondent pas ou répondent:"Je sais pas" ou répondent par les doigts ou tentent de les recompter (sans les voir). Exemple: Sté (5;3) compte, en pointant à travers la main de l'expérimentateur: "1,2,3,4,5" (n=7).

Remarque: lorsqu'un enfant a échoué, on lui demande de recompter les jetons en l'aidant éventuellement (l'un ou l'autre essaie de "justifier" sa réponse erronée!). On lui pose alors Poq (en choisisant bien entendu un autre jeton initial): quelques enfants répondent alors le nombre correct, "Encore 7" ou "Toujours 7" par exemple, mais il pourrait très bien ne s'agir là que d'une généralisation (ayant trouvé 2 fois de suite 7 par exemple, ils en concluent que c'est toujours 7) par "induction" (cf. PIAGET 1978).

d) Commentaires:

Les taux de réussites à Poq(n), alors que tous ces enfants ont appliqué l'ensemble des 3 principes du "comment compter", pour n, montrent clairement que ce dernier fait n'est pas suffisant pour réussir Poq(n). Néanmoins, il faut souligner que tous les enfants semblent appliquer implicitement ce principe: aucun d'entre eux ne s'est en effet apparemment posé de question (on observe souvent un temps de latence avant le démarrage du comptage, mais nous pensons qu'il sert surtout à repérer le jeton initial plutôt qu'à le choisir ou alors à choisir un jeton facilement repérable) sur la possibilité de choisir arbitrairement le jeton numéro 1, alors que l'on sait très bien (cf. Piaget*) que, jusqu'à un âge avancé (~ 10 ans), les noms restent, pour l'enfant, liés aux choses. Signalons d'ailleurs qu'au cours d'une préexpérience, un jeune enfant, à qui l'expérimentateur venait de montrer comment on compte-pointe 5 jetons, s'est enquis du jeton dénommé 1: "Lequel c'est le 1 ?"

e) Interprétations

La méthode expérimentale, une question verbale qui ne peut pas être reposée, et la nature des échecs font penser que bon nombre d'enfants ne comprennent pas, ou mal, la question. Exemple: Ric (6;5), qui répond 6 (n=7) en expliquant "Parce que vous enlevez 1", croit certainement que le jeton désigné par l'expérimentateur ne doit pas être compté.

Néanmoins cette interprétation ne suffit peut-être pas car:

- à peu près tous les enfants qui ont échoué recomptent (voir remarque du c) correctement et en commençant par le jeton voulu;
- beaucoup d'enfants, après avoir recompté correctement, ne répondent toujours pas correctement à Poq reposé;

  Exemple: Vir (5;10) répond la première fois "Je trouverais 3 ou 4 ou 5" (n=7). Puis elle recompte et trouve 7. A Poq reposé, elle répond: "4 ou 5". L'expérimentateur lui explique alors qu'on trouve toujours 7 et lui demande pourquoi. Elle répond: "Parce qu'on commence par le milieu" (le jeton du milieu était le jeton initial pour Poq reposé).
- certains enfants, comme Sté cité dans c) ci-dessus, tentent de recompter les jetons et, s'ils n'y arrivent pas, n'ont apparemment aucun autre moyen de savoir "le nombre qu'on trouverait".

---

* dans PIAGET 1926, p.74.

f) Conclusion: La difficulté à remplir le critère d'ordre quelconque relativement à l'ensemble des critères du "Comment compter", alors que implicitement le Poq semble appliqué par les enfants, pourrait donc s'expliquer soit par le fait qu'une prise de conscience de ce principe n'émerge qu'au sein d'une pratique du comptage déjà ancienne et ayant permis une ou plusieurs expériences logico-mathématiques comme celle rapportée ci-après (remarque γ), soit par le fait que la question n'est pas bien perçue par les enfants.

g) Remarques:

α) Dans GRECO 1962b, P.Gréco rapporte, en note, une enquête sur les pratiques arithmétiques de l'enfant dans laquelle on demandait, entre autres, aux enfants de compter 8 jetons alignés dans un certain sens, puis de les recompter dans le sens contraire. Au cours de ce 2e comptage, on arrêtait l'enfant au 3e jeton et on lui demandait "Combien on trouverait?"

- pour 23 sujets de 4;6 à 5;8 chez qui la numération est assurée, Gréco indique 22 réussites;
- pour 45 sujets entre 6 et 7 ans, il y a 45 réussites.

Il se pourrait donc bien que ce soit principalement notre présentation du test Poq qui est responsable des nombreux échecs, en particulier chez les plus jeunes.

β) Un entretien clinique avec Vincent (4;0) nous semble aussi confirmer une certaine évidence ou/et précocité du Poq:

Entretien: Après avoir compté 2 rangées de "sous" pour choisir celle qui en avait le plus, l'expérimentateur lui demande:

T'en as trouvé combien là (l'expérimentateur montre la rangée de 7 sous) en comptant ? "7"

Et si tu comptais comme çà (= dans l'autre sens) combien tu trouverais ? Rire de l'enfant: "6"

Tu crois ? Pas de réponse

Essaie voir ! "1,2,3,4,5,6,7: toujours 7" suivi d'un nouveau rire.

Et si tu les comptais comme çà (l'expérimentateur dispose les 7 en cercle) en rond ? L'enfant s'apprête à compter. Sans compter ! "Toujours 7"

Pourquoi ? "Parce que j'ai compté"
Alors essaie voir si tu trouves 7 ! - "1,2,3,4,5,6, (hésitation), 7"
Alors, c'est juste ? - Rire embarassé très différent des autres.
Et là (l'expérimentateur montre la rangée de 6 sous), tu avais compté combien ? "6"
Comme ça (l'expérimentateur rappelle à l'enfant sa stratégie spatiale de comptage) t'avais compté. Et si tu comptes maintenant comme ça (= dans l'autre sens), combien tu vas trouver ? Sans les compter ! "6".
Pourquoi ? "Parce que je le sais"
Tu es sûr ? Pas de réponse.
Alors, essaie voir ! "1,2,3,4,5,6 : toujours 6"
Ah oui ! Et en rond (l'exp. dispose les 6 sous en cercle), combien on va trouver ?
Sans les compter ! - "6"
Pourquoi ? - "Parce que j'avais compté"
Alors, regarde voir si c'est bien ça ! -"1,2,3,4,5,6"- Rire franc de l'enfant qui rajoute: "Alors !" (= je te l'avais bien dit !)
L'expérimentateur fait ensuite écouter à l'enfant l'enregistrement de l'entretien. Vincent, au passage où il avait marqué une nette hésitation, commente spontanément: "Là je me suis trompé : j'ai compté de nouveau le même" (= le sou compté en numéro 1)

Interprétation : Malgré une erreur initiale qui pourrait plus être due au caractère saugrenu * de la question (c'est à ce moment-là que l'enfant s'est mis à rire, alors qu'il ne l'avait pas fait durant tout le début de l'entretien non relaté ici) qu'à sa difficulté, et la rectification finale (mais au moment où l'enfant fait cette rectification il doit beaucoup plus se souvenir de son comptage hésitant que du comptage précédent qui l'avait amené à la réponse correcte), l'enfant appliquant une sorte de principe de cohérence, semble donc penser que l'on ne peut pas trouver autre chose que n, alors que l'on vient tout juste, par comptage, d'en trouver n. Et cette conviction résiste aussi bien à un changement dans la méthode de comptage, qu'à une transformation figurale de la collection à compter, et même (partiellement au moins) à un constat contraire, car l'hésitation, le rire

* qu'un enfant de 4 ans trouve cette question saugrenue n'est guère étonnant: les mathématiciens eux-mêmes ont longtemps (jusque vers la 2e moitié du 19e siècle, avec Schroeder, qui fut, d'après VON HELMHOLTZ 1887, le premier à voir qu'il y avait là un problème) considéré l'indépendance du nombre d'objets d'un groupe par rapport à l'ordre dans lequel on les compte, comme un fait (d'évidence), une réalité.

embarrassé et le commentaire final de l'enfant montrent qu'il a plus ou moins conscience d'avoir "triché un peu" pour trouver le résultat juste annoncé pour les 7 sous en rond.

γ) Piaget (cf.PIAGET 1972), pour illustrer ce qu'il appelle une expérience logico-mathématique, à savoir une expérience qui tire ses informations de la coordination des actions que l'enfant peut avoir sur les objets, raconte:

> "Un de mes amis, mathématicien bien connu, rapporte que son intérêt pour les mathématiques fut déclenché par une expérience du second type (=logico-mathématique) qu'il eut vers l'âge de quatre ou cinq ans. Assis dans un jardin, il avait commencé à ranger quelques cailloux en ligne droite. Après quoi, il se mit à les compter de droite à gauche et à sa grande surprise il en retrouva dix. Il les mit alors en cercle et avec enthousiasme les recompta dans un sens, puis dans l'autre -toujours dix ! Il continua son expérience en disposant les cailloux de toutes les manières possibles et finit par se convaincre que la somme, dix, était indépendante de l'ordre des cailloux".

2) Le principe d'abstraction

Il peut être discuté indirectement en comparant les réussites respectives des problèmes $Ani^+(2,1)$ et $Pou^+(2,1)$. En effet, dans le premier, les objets à compter (lions et tigres) sont nettement distincts, alors que dans le second (poupées ne se différenciant que par leur moment de réception), ils le sont beaucoup moins. Si donc on admet que le comptage joue un rôle essentiel dans la résolution des problèmes arithmétiques par les jeunes enfants et que ceux-ci "refusent" de compter un matériel non-homogène, on devrait enregistrer une difficulté plus grande du problème $Ani^+(2,1)$ par rapport au problèmes $Pou^+(2,1)$. Or (voir VII,1) aucune différence de difficulté entre ces 2 problèmes n'est apparue. De plus, les réponses de type "2 et 1" que devrait favoriser le refus de compter ensemble lions et tigres ne sont pas non plus significativement plus fréquentes au problème $Ani^+(2,1)$ qu'au problème $Pou^+(2,1)$. Voici les tableaux obtenus :

	Ani⁺(2,1)	
$Pou^+(2,1)$	rép. 2 et 1	autres rép.
2 et 1	4	6
autre	9	105

en 1ère réponse

	Ani⁺(2,1)	
$Pou^+(2,1)$	rép. 2 et 1	autres rép.
2et1	3	3
autre	2	116

en 2e réponse

(on distingue 1ère et 2e réponse car si un enfant répond "2 et 1" en 1ère réponse, on lui demande alors combien c'est en tout: en 1ère réponse les refus peuvent être qualifiés de spontanés, en 2e de caractérisés).
Notons cependant qu'un enfant peut exprimer des réserves sur le fait de mettre des tigres et lions ensemble, même s'il les compte ou additionne ensemble. Ainsi Lud ($4;6^-$) répond tout de suite "3" à $Ani^+(2,1)$ mais commente: "Il faut pas mélanger les animaux: dans les cages on met pas 1 lion avec 1 tigre dedans". A travers cette réflexion on retrouve aussi la différence entre une application implicite d'un principe et sa prise de conscience explicite, car il semble probable que si on avait demandé à cette enfant si on peut compter des lions et des tigres ensemble, elle aurait répondu "non".
En revenant à notre analyse antérieure on voit que les hypothèses initiales ne conduisent pas aux conséquences prévues: en vertu du fonctionnement de l'implication naturelle, les premières sont donc moins vraisemblables (ou plus exactement leur conjonction est moins vraisemblable). Comme l'hypothèse sur le rôle du comptage ne sera pas contredite par la suite, il en résulte donc que c'est la 2e hypothèse, à savoir le refus de compter du matériel non homogène, qui est moins vraisemblable.

Conclusion : La discussion ci-dessus est donc un argument en faveur de la précocité d'une application implicite du Pab, précocité soutenue par Gelman, mais contraire au point de vue de Gast (cf.: GAST 1957) qui soutient que dans un premier temps (3-4 ans) l'enfant ne compte que des objets semblables, et, dans un deuxième (5;0 à 6;5), des objets certes différents mais ne différant qu'à certains points de vue (ils ne doivent pas différer, par exemple, du point de vue de leur fonction), avant d'arriver à compter n'importe quel ensemble hétérogène d'objets. Il faut toutefois préciser, et Gelman a souligné l'importance de cette précision, que les objets de nature différente (lion et tigre dans notre cas) doivent avoir une appellation commune (animaux) pour que l'enfant les compte spontanément ensemble. Une étude (à paraître) de Steffe et al. (rapportée dans GLASERSFELD 1981) va d'ailleurs dans le même sens, puisque ces auteurs ont trouvé que "la reconnaissance d'objets perceptibles comme candidats acceptables dans la formation d'une collection est préalable à l'acte de les compter comme unités".

Remarque 1: Gelman pense trouver l'explication des divergences avec Gast dans un artefact expérimental (= ordre de passation des épreuves) affectant les résultats de ce dernier. Mais il faut aussi :

- préciser que si le point de vue de Gast est contraire à celui de Gelman, ses résultats expérimentaux ne le sont pas vraiment, car Gast n'a précisément pas, dans la formulation de ses questions, utilisé une appellation commune pour tous les objets à compter ensemble (p.56);
- voir que les questions posées par Gast étaient ambigües:

  Exemple 1: Gast (p.17) pose 1 boîte avec beaucoup de bâtonnets à l'intérieur et 1 bâtonnet de part et d'autre sur une planche, en demandant à l'enfant: "Combien il y a ici sur la planche ?" Les jeunes enfants (5;0 à 6;5) qui répondent 2 bâtonnets et 1 boîte, mais pas 3, ont-ils tort ?

  Exemple 2: Gast (p.50), devant 6 dominos et 7 blocs de construction alignés, donne pour consigne: "Maintenant tu dois compter tout ce qu'il y a ici sur la planche, montre toujours avec le doigt où tu comptes !". Les jeunes enfants, qui comptent séparément les dominos et les blocs, n'ont-ils pas répondu à la consigne ?

Remarque 2 : Une autre question est de savoir si l'enfant ne limite pas, dans un premier temps, son comptage à un certain type d'objets, par exemple ses doigts. A ce propos, rappelons que Beckmann (cf. BECKMANN 1923) a vérifié que:

- les actes numériques (voir VI,A,3) qui fonctionnent (resp. ne fonctionnent pas) avec des dés, fonctionnent (resp. ne fonctionnent pas) aussi (resp. non plus) pour d'autres objets matériels comme des soldats en plomb, des noix,... (p.34-35);
- les performances numériques obtenues avec des jetons se retrouvent avec des points, des traits ou des cercles dessinés (p.35);
- l'enfant qui utilise avec sûreté le nombre pour des objets matériels en fait de même avec des images d'objets (p.37).

CHAPITRE IX : Hypothèses sur le rôle du comptage

"Lorsqu'un homme désire ardemment connaître la vérité, son premier effort sera d'imaginer ce que la vérité peut être. Il ne peut pas poursuivre longtemps sa quête sans découvrir que l'imagination débridée est sûre de le faire dérailler. Il n'en demeure pas moins qu'il n'y a, en fin de compte, que l'imagination qui puisse jamais lui fournir un soupçon de vérité".

C.S. Peirce

IX.- Hypothèses sur le rôle du comptage

A) Dans la dénomination des nombres

"Certains ont essayé de suggérer que les enfants construisaient des codes absolus pour les petits nombres non pas en apprenant à compter mais sur une base purement perceptive. Ceci est une suggestion intéressante, mais elle est probablement fausse ..."

P. Bryant, 1974.

1) Hypothèse

Pour réussir à l'épreuve de dénomination d'un nombre, les enfants semblent avoir utilisé essentiellement 3 moyens sûrs:

- reconnaître une "forme perceptive" et savoir quel nombre-mot lui est associé;
- compter les jetons;
- utiliser une décomposition additive du nombre et connaître le nombre-mot associé à cette décomposition additive (un comptage non 1 par 1 est assimilé à une décompositon additive).

Dans le cas où la dénomination est instantanée ou très rapide, on parlera d'une "appréhension rapide du nombre" (a.r.)

Notre hypothèse est que, chez le jeune enfant, le comptage joue un rôle essentiel dans la dénomination des nombres, et qu'en particulier l'intériorisation du comptage peut conduire à une a.r. des petits nombres.

Apportons tout de suite quelques précisions:

a) Lorsque nous parlons de moyens <u>sûrs</u>, nous entendons exclure certains "effets de champs primaires" (cf. PIAGET 1953) pouvant conduire à une évaluation approximative.

   ex: Alexandre (4;8), pour 5, répond: "3 je parie" Sûr ? "Je crois que c'est 5" puis après avoir pointé visuellement les jetons: "Je suis sûr que c'est 5";
   Eric (4;9), pour 5, répond "6 je crois" mais compte-pointe ensuite spontanément et trouve 5;
   Val (6;3) répond, pour 6, instantanément "A peu près 4" sans pouvoir préciser combien exactement.

b) Par reconnaître une forme perceptive et savoir quel nombre-mot lui est associé nous entendons des reconnaissances comme celles de:
   Emm (6;4) qui explique, pour 4 : "Un carré, c'est un 4 et quand on met 1 au milieu c'est 5". C'est comme ça que tu savais ? "Hum: sur un dé c'est comme ça" en rajoutant "Et le 6 il y a 1 ligne là et 1 ligne là (il trace 2 lignes parallèles avec son doigt sur la table);
   Vér (6;5) répond 5 directement pour 7. Lorsqu'on l'incite à bien regarder elle trouve 7 en pointant visuellement sans difficulté. Pourquoi tu croyais 5 ?

"Parce ça ressemble" (le pion central a donc dû lui rappeler le domino 5 ;)
Cyr (5;10) répond instantanément 5, pour 5, alors qu'il venait de compter 7 en pointant visuellement. Comment tu as su si vite? "Parce que moi j'ai des dés chez moi".

Il est d'ailleurs intéressant de noter que dans la perception des collections figurales que nous avons présentées (voir Annexe 2), la prégnance numérique est insuffisante (et même absente probablement chez certains puisque l'enfant n'identifie que ce qu'il peut assimiler à une structure cognitive dont il dispose déjà: cf. VURPILLOT 1972) pour empêcher certains enfants de voir des formes empiriques.

Ex: Dans la collection 7 beaucoup d'enfants voient une fleur, l'un d'entre eux un soleil; pour la collection 3, Fle (3;3) commente: "Ça c'est les yeux (en montrant deux jetons) et la bouche (en montrant le 3e jeton);"
Dans un carré dessiné, Cél (3;8) et Alban (3;11) ne voient pas 4 mais la première "une table", le second "un carreau d'une fenêtre". Dans un triangle dessiné ces 2 mêmes enfants voient respectivement un bâteau et un rocher (pour ces 2 enfants, on voulait expliquer des réussites "bizarres").

c) Par utiliser une décomposition additive du nombre ou un comptage non un par un, nous entendons des reconnaissances comme celles de:
San (5;10) qui a répondu rapidement 6 pour 7, et n'est pas arrivée à rectifier, puis instantanément 5 pour 5, 3 pour 3, 6 pour 6, 4 pour 4 et explique pour 6: "Parce qu'il y en a 3 par 3" et pour 4:"Parce qu'il y en a 2 par 2";
Sté ($6;0^+$) qui compte, non 1 par 1 mais correctement, "2,4,<u>5</u>" pour 5 et "2,4,5,<u>6</u>" pour 6.

d) Nous avons préféré l'expression appréhension rapide (a.r.) à l'expression "perception* globale directe" (p.g.d.). Nous utilisons cette dernière pour désigner ce qui, dans la littérature didactique, est appelé de manière variable et sans autres précisions, perception ou vision ou appréhension globale ou directe ou immédiate ou simultanée...

L'expression p.g.d. est, en effet, très "engagée", puisqu'elle sous-entend qu'il s'agit:
- d'un mécanisme perceptif; de plus, qualifié de global, ce mécanisme apparaît comme primaire;**

---

* Sauf précision contraire, on se limite dans ce travail à des perceptions visuelles.

**Decroly, qui a introduit la notion de perception globale, voyait dans cette dernière une conséquence de la pauvreté des activités exploratrices chez les jeunes sujets (cf. PIAGET 1961 a).

- d'une perception directe, c'est-à-dire sans intermédiaire, ce qui peut non seulement signifier que la perception est immédiate dans l'instant où elle se produit, mais encore qu'aucune élaboration antérieure ne peut être intégrée dans sa structure présente (formulation prise dans WALLON 1941).

Par contre, l'expression a.r., tout comme les expressions américaines "subitizing" et allemande, "blitzschnelles Erfassen" (appréhension à la vitesse de l'éclair) a le mérite de ne mettre l'accent que sur la vitesse du phénomène, qui est bien sa caractéristique première, mais n'implique pas, par exemple, sa non-médiatisation.

Remarques: α) Dans certains livres, on parle d'une perception globale (ou analogue) d'une collection (ou analogue): ceci peut prêter à confusion car on peut percevoir globalement une collection sans pour autant savoir indiquer, de manière précise, le nombre de ses éléments. En particulier, on peut comparer numériquement deux collections par perception globale sans expliciter le cardinal de chacune d'entre elles. Remarquons d'ailleurs que, d'après Gast (cf. GAST 1954) ,les préscolaires réussissent bien mieux que les scolaires dans de telles comparaisons: par exemple, dans les conditions expérimentales de GAST 1954, la comparaison 100-98 est en général maîtrisée par les premiers, alors que seul le rapport 100-94 ou 93 l'est par les seconds; et Gast interprète ce résultat en introduisant justement une conception globale primitive chez le préscolaire, alors que le scolaire essaie de résoudre le problème par des opérations logiques souvent inadéquates.

β) J. Mehler (cf. MEHLER 1974) pense que les très jeunes enfants (2 ans), avant d'appliquer des procédures de dénombrement, estiment d'abord la numérosité essentiellement à partir de certaines heuristiques perceptives et se comportent comme s'ils possédaient une " perception numérique immédiate". Nous voulons donc préciser tout de suite qu'une telle perception numérique immédiate n'est évidemment pas comparable à ce que nous appelons l'appréhension rapide du nombre, puisque cette dernière implique la dénomination du nombre, alors que les expériences de Mehler que nous connaissons -comparer 2 collections - concernent la genèse du jugement de numérosité relative (cf. MEHLER 1971), et que l'enfant peut donc y réussir sans dénommer les collections, ni même passer par un code absolu pour chacune d'elles.

e) Précisons enfin que, lorsque nous parlons d'une théorie classique de l'a.r., nous entendons la thèse suivant laquelle il existerait 2 mécanismes distincts pour trouver le nombre et un seuil, estimé à 6, où s'opérerait le passage de l'un de ces mécanismes (le subitizing) à l'autre (l'estimation). Cette thèse fut notamment soutenue par Kaufman et al. (cf. KAUFMAN 1949) qui ont d'ailleurs introduit l'expression "subitizing". Sans le définir de manière précise, on peut dire que le seuil de subitizing correspond au fait que, à cet endroit, la courbe donnant l'exactitude des réponses (ou le degré de confiance des sujets dans leur réponse) en fonction du nombre décroît brusquement.

Remarque 1 : Cette théorie de l'a.r. semble coïncider avec une théorie analogue de l'appréhension exacte. Dans cette dernière théorie, la courbe donnant les TR (=temps de réaction) en fonction du nombre croît brusquement au seuil de subitizing et le deuxième mécanisme (au-delà du seuil) est le counting (cf.JENSEN 1950).

Remarque 2 : La valeur du seuil de subitizing, en principe commune aux 2 théories, pourrait bien ne pas être tout à fait la même. En tout cas, elle dépend des sujets examinés, des conditons expérimentales et de la définition précise du seuil. Il n'est donc guère étonnant que les valeurs trouvées (même si on se limite à des sujets adultes non-primitifs) soient très variables,

- 8 d'après WOODWORTH 1937 (p.94)
- 5 ou 6 d'après KAUFMAN 1949 (p.525) et JENSEN 1950 (p.391)
- 5 d'après KLAHR 1973 (p.20)
- 3 d'après CHI 1975 (p.346) ou KLAHR 1976 (p.37)

ou même que l'existence du seuil soit niée (cf. SALTZMANN, 1948).

Remarque 3 : Une telle théorie de l'a.r. n'implique pas qu'il y a perception immédiate du nombre en dessous du seuil* : Kaufman et al. le disent nettement dans leur conclusion, confirmant ainsi le point de vue de Saltzman et Garner qui, ayant observé que les TR augmentent $\forall$ n, $1 \leq n \leq 10$, entre n et n+1, avaient déjà affirmé cette non-immédiateté. De plus, si l'on ne restreint pas le sens du qualificatif immédiat à celui d'instantané, cette dernière semble également confirmée par WOHLWILL 1963: en effet, dans un apprentissage de la discrimination des nombres absolu et relatif par des enfants de 1ère, 3e, 5e et 8e année d'école, Wohlwill a trouvé "qu'aussi familier que le concept cinq puisse être", il n'a pas été fonctionnel dans 2 des conditions expérimentales, et a interprété ce résultat par "la nature relativement non-immédiate de l'identification perceptive du nombre".

---

* l'idée d'interpréter le subitizing comme une perception immédiate pourrait résulter d'un point de vue plus ancien selon lequel les petits nombres -1,2, 3, 4 - sont "des sensations au même titre que bleu, vert, rouge, rond, carré" (cf.BOURDON 1908). Notons cependant que si, comme le suggère Klahr (cf.KLAHR 1973), l'augmentation du TR en dessous du seuil est seulement due à la difficulté supplémentaire pour retrouver le nom du nombre dans la liste des nombres-mots, il se peut qu'il existe une appréhension (sans dénomination) directe des nombres en dessous du seuil.

2) Preuves

a) Les nombreux comptages :

Les nombeux comptages extériorisés en évidence dans le tableau VI,B,2 sont évidemment une preuve directe et importante du fait que le comptage joue un rôle essentiel.

b) Tableau comparatif Descoeudres - (Fischer) en pourcentages

Pour estimer l'importance du comptage et même voir éventuellement s'il est indispensable, on peut comparer les résultats de 2 épreuves de dénominations: l'une sans comptage, l'autre avec comptage. Mais la difficulté est évidente: on ne peut pas empêcher les comptages intériorisés. Nous pensons néanmoins qu'une telle comparaison est intéressante: c'est pourquoi nous comparons nos résultats à ceux de A. Descoeudres qui avait fait passer une épreuve de dénomination sans comptage.

Tableau comparatif :

dénomination de / G.A.	2	3	4	5	nombre d'enfants
3;3 ± 3	74 (53)	9 (13)	0 (13)		23 (30)
3;9 ± 3	78 (84)	35 (31)	4 (16)		23 (32)
4;3 "	76 (97)	32 (59)	12 (38)	3 (31)	34 (32)
4;9 "	89 (94)	75 (72)	46 (56)	25 (53)	28 (32)
5;3 "		75 (88)	56 (88)	6 (81)	16 (32)
5;9 "		93 (97)	60 (97)	47 (91)	15 (32)
6;3 "		100 (94)	92 (94)	62 (91)	13 (32)

référence: DESCOEUDRES 1921, p.230

Précision : Quand A. Descoeudres voyait un enfant se mettre à compter, elle cachait avec la main les objets quand l'enfant les avait regardés pendant 5 secondes, et lui demandait de dire de mémoire combien il y en a.

Commentaires :

Bien que la technique de A. Descoeudres nous paraisse, telle qu'elle la décrit, difficile à appliquer, et qu'elle laisse en tout cas largement le temps à l'enfant de compter intérieurement *,il apparaît que, à partir de 4 ans et surtout pour 5 nos résultats sont systématiquement supérieurs à ceux de A. Descoeudres alors que pour 2 et 3 les résultats sont tout à fait comparables. Et la différence, pour 5, peut être importante: à 5;3 $\pm$ 3, Descoeudres indique 1/16 = 6% de réussites alors que nous en avons 26/32 = 81%. Il faut toutefois signaler que le tableau de Descoeudres présente une discontinuité à cet endroit; mais même à 5;9 la différence est encore importante puisque Descoeudres indique 7/15 = 47% de réussites alors que nous en avons 29/32 = 91% ou encore à 4;3 elle n'a que 1/34 = 3% de réussites alors que nous en avons 10/32 = 31%.

c) Proportion des comptages : le tableau de Beckmann

Pour estimer la proportion des comptages on peut demander aux enfants comment ils ont fait pour trouver le nombre qu'ils indiquent. Là encore, on tombe sur une difficulté évidente: la réponse de l'enfant risque d'être plutôt une explication a posteriori qu'une description de la procédure effectivement suivie par lui. Beckmann a pourtant fait une telle expérience et est parvenu à répartir les réponses en 2 classes: la première est celle des enfants qui répondent typiquement "J'ai vu", la deuxième est celle des enfants qui répondent typiquement "J'ai compté". Le tableau donnant les pourcentages des enfants qui font partie de cette seconde classe nous paraît, malgré les réserves précédentes, intéressant à examiner. Le voici:

---

* Stern (cf.STERN 1927) avait déjà opposé les résultats de Descoeudres à ceux de Filbig (cf. FILBIG 1923): ce dernier, en limitant le temps d'exposition à une seconde, trouve que c'est seulement à 6 ans que les enfants reconnaissent exactement 3-4 alors que Descoeudres a trouvé que les enfants de 4 ans sont déjà capables d'appréhender 3 sans compter.

nombre / G.A.	2	3	4	5	6	nombre d'enfants
4;3 ± 3	25,0	71,4	80,0	100,0	100,0	48
4;9 ± 3	16,6	33,3	80,0	87,5	96,4	26
5;3 ± 3	11,1	34,7	70,8	76,1	90,0	27
5;9 ± 3	3,9	20,8	52,0	60,9	63,7	20
6;3 ± 3	2,3	4,6	17,4	33,3	41,3	24

Tableau X,A,2,c: % des comptages.

Référence: BECKMANN 1923 ,p.28

Ce tableau fait apparaître une proportion importante de comptages, proportion qui augmente avec la taille du nombre et diminue avec l'âge des enfants. Mais même pour un nombre petit comme 3 il y a , à 4;3 ± 3, 71,4% des enfants qui disent avoir compté.

Remarque: Nous avons nous-mêmes demandé à quelques enfants, qui ont répondu très rapidement, comment ils avaient fait (on a déjà cité l'une ou l'autre réponse dans IX,A,1). Voici trois autres réponses:

Dan (5;10) qui avait pointé visuellement pour tous les autres nombres précédents répond "Ca fait 4" instantanément. Comment tu as trouvé si vite ? "Je les ai réfléchis";

Mat (5;6^{-}) compte-pointe pour 7,5,6 mais répond instantanément pour 3 et 4. Pour ce dernier, il explique: "Parce que je voyais un 1, un 2, un 3 et un 4" en réponse à "Comment tu savais ?";

Cyr (6;5) répond très rapidement et correctement pour tous les nombres. Pour 4, on lui demande: Tu les comptes ? "Non: je regarde bien. Si on en rajoute 1 ça fait 5 et si on en rajoute 2 ça fait 6".

3) Vérification d'une conséquence de l'hypothèse

Si le comptage a une fonction causale dans la dénomination des nombres, il devrait en résulter qu'un enfant sachant dénommer un nombre n sait aussi le compter. C'est pourquoi nous avons testé la quasi-implication suivante:

(savoir dénommer n) $\underset{q}{\Longrightarrow}$ (savoir compter n), pour n =3, 5 et 7 .

Voici les tableaux et résultats obtenus:

savoir compter 3 \ savoir dénommer 3	o	n	
o	9	7	16
n	4	43	47
	13	50	63

savoir compter 5 \ savoir dénommer 5	o	n	
o	24	10	34
n	3	27	30
	27	37	64

savoir compter 7 \ savoir dénommer 7	o	n	
o	58	17	75
n	2	19	21
	60	36	96

<u>Petits</u> :i.i = -1,83 <u>moyens</u> :i.i = - 2,71 <u>grands</u> : i.i = - 3,07

La quasi-implication : (savoir dénommer n) $\underset{q}{\Rightarrow}$ (savoir compter n) est donc vérifiée dans les trois cas.

Bien entendu le calcul du X^2 ou X^2_c, lorsqu'il est possible , montre aussi qu'il y a une liaison significative entre les 2 questions.

<u>Remarque 1</u> : La quasi-implication ci-dessus n'a été testée que pour n=3, 5 et 7. Nous pensons que:

- il n'y a pas d'obstacle à la généralisation de cette quasi-implication à n compris entre 3 et 7;
- au-delà de 7 elle est probablement vérifée aussi mais ne présente plus guère d'intérêt car personne n'a fixé le seuil de p.g.d. au-delà de 7;
- pour 2, par contre, la quasi-implication ci-dessus n'a pas été vérifiée: nous n'essaierons pas de soutenir comme le fait Gelman, avec prudence il est vrai, que pour dénommer 2 le jeune enfant les compte, ni même qu'il sait les compter. Sur ce dernier point nous pouvons cependant citer le cas de Marie (4;0) qui pour 2 dit "3" - Sûre ? elle compte-pointe (doigt) et trouve 2; par la suite elle dit de nouveau "3" pour ses 2 doigts en les comptant "2,3",; nous pouvons également renvoyer au tableau (voir IX,A,2,c) de Beckmann qui montre par exemple que 12/48 = 25% des enfants de 4;3$\pm$ 3 disent qu'ils ont compté pour dénommer 2.

Remarque 2: Une preuve indirecte du comptage, alors qu'il n'y a pas eu manifestation de signes extérieurs, nous est fournie par les enfants (rares il est vrai!) qui utilisent une suite idiosyncrasique. Par exemple:

- Aurore (3;2) a récité "1,2,4,5,6,7" et dénommé 2 → "1 et 2"; 3 → "4".
- Barbara (4;3) a récité "1,2,5,8 et 9": 3 est dénommé systématiquement (et sans comptage apparent) 5 par elle; 4 est dénommé 8 (mais une seule fois).

4) Appréhension rapide des petits nombres et comptage

Ce sont l'analogie entre l'apprentissage du comptage et l'apprentissage suivant le théorie de Galperin (voir Annexe 8) et les résultats de ce dernier, qui nous amènent à l'hypothèse, présentée dans 1), sur l'a.r. des petits nombres (≤ 3) par l'enfant. En effet:

a) Dans l'apprentissage du comptage on retrouve les principales caractéristiques de l'apprentissage selon Galperin

- l'orientation joue un rôle primordial: très jeune, l'enfant est rendu attentif (et, selon Gelman, cet apprentissage est favorisé par certaines prédispositions que posséderait l'enfant) aux faits que dans un comptage, il importe d'assigner un et un seul nombre-mot à chaque objet, d'utiliser la suite conventionnelle, de retenir le dernier nombre-mot, car c'est lui qui indique le cardinal de la collection. Par contre, ce qui n'est pas important, à savoir l'ordre de comptage des objets et la nature de ces objets, ne fait l'objet d'aucune attention particulière ;
- l'action accompagnée du langage (comptage-pointage à haute voix) est peu à peu intériorisée*: nous avons en effet mis en évidence (voir VI,B,2) que, pour un nombre donné, la manifestation de signes extérieurs d'un comptage décroissait avec l'âge. De plus, nous avons eu l'occasion d'observer toutes sortes d'étapes intermédiaires entre un comptage-pointage à haute voix très explicite et un comptage parfaitement intériorisé: pointage avec doigt lointain, pointage visuel, comptage avec voix à peine audible (ou même comptage dont seuls les derniers nombres-mots sont audibles,..), et, bien entendu, des combinaisons de ces comptages et pointages ;
- le nombre de comptages réalisés par un enfant est impressionnant

---

* Wygotski (cf.WYGOTSKI 1934) supposait déjà que la même opération qui est résolue à haute voix par le pré-scolaire l'est dans un langage intériorisé et silencieux par le scolaire.

(à rapprocher du nombre important d'exercices au cours de chaque étape de l'apprentissage chez Galperin: en fait, dans les expériences relatées, les enfants réussissent toujours, car on prolonge l'apprentissage, à chaque étape, jusqu'à ce que tous les enfants arrivent à la performance voulue): cela a pu être observé par tout le monde. De plus, R.H. Weir (citée dans BRUNER 1966 b) ayant très joliment montré comment un enfant de 2 ans explorait encore les limites de l'usage de la langue, le soir, alors que la lumière était éteinte, les parents retirés, toute communication stoppée et le sommeil imminent, on peut même soupçonner certains enfants de s'entraîner ainsi également à compter! Rappelons d'ailleurs, comme Bruner l'a souligné à ce propos, que la volonté d'apprendre est une motivation intrinsèque trouvant à la fois sa source et sa récompense dans son propre exercice.

b) Au niveau des résultats d'un tel apprentissage, on retrouve aussi les retours à des étapes plus primitives en cas de difficultés* :
Cela est illustré par tous les enfants recensés dans le tableau VI,B,3 qui, à partir d'une certaine taille du nombre, manifestent des signes extérieurs, alors que pour les nombres inférieurs, ils ne l'ont pas fait. Donnons aussi quelques exemples individuels:
- d'attitudes ou de commentaires montrant que, pour ces enfants, le comptage constitue une solution de repli: à défaut de "savoir", ils semblent se "résigner" à compter. Ainsi: Jea (5;2), pour 7, commente: "Il faut que je les compte parce que je sais plus"; Lud (4;6¯), pour 5, regarde d'abord, puis se décide: "Je vas les compter"; Nic (3;7) de même pour 3, regarde d'abord puis se décide "Je vais compter". A propos de Nic, on peut d'ailleurs remarquer que, même s'il a un développement verbal (il est fils d'avocat !) et logique supérieur à la moyenne de son âge, pour dénommer 3, il semble avoir besoin de compter, alors que 2 sera dénommé instantanément par lui.
- de changements de méthode pour un même nombre : les enfants qui ont échoué en comptant et que l'on encourage à recompter (certains le font spontanément) utilisent toujours soit la même méthode de comptage, soit une méthode plus primitive, c'est-à-dire avec une manifestation plus nette de signes extérieurs. Ainsi: Pas (5;7) qui a trouvé 6, pour 7, par un comptage-pointage visuel, prend la décision de compter en pointant du doigt quand l'expérimentateur lui

* De manière plus générale, Wygotski (cf.WYGOTSKI 1934) avait remarqué que la part du langage égocentrique devenait toujours plus grande lorsque l'enfant se heurtait à une difficulté.

demande s'il est sûr:"Je vais compter comme çà" (il compte alors en pointant du doigt et arrive au résultat correct). Il semble même tenir compte de cette "mésaventure" initiale puisque ensuite pour 6, et même pour 4, après avoir donné la réponse correcte, par un pointage visuel pour 6 et instantanément pour 4, il vérifiera spontanément par un comptage-pointage du doigt qu'il ne s'est pas à nouveau trompé; le cas de Sté (6;4) est analogue : pour 7, il avait trouvé "6" par un pointage visuel (plus un léger mouvement des lèvres) puis sur incitation (Sûr ? Regarde bien!) il pointe du doigt, avec comptage à voix faible, et s'exclame: "Oh 7! Je me suis trompé".Ensuite, pour 5, 3 et 6, il pointe toujours visuellement en premier et vérifie par un pointage du doigt en justifiant sa vérification pour 6 qu'il avait trouvé juste au premier comptage: "Des fois je regarde parce que après je me trompe", ce qui pourrait signifier: Même si c'est juste, je vérifie des fois tout de même parce qu'il m'arrive de me tromper (comme Pas il semble donc se rappeler de sa "mésaventure" pour 7); Aud (5;6¯) trouve 5, pour 7,en pointant visuellement, puis sur incitation (Tu es sûre ? Regarde bien !), elle pointe avec le petit doigt très lointain et trouve 7 mais vérifie aussitôt encore une fois avec le doigt un peu plus proche cette dernière fois.

- des changements de méthode en passant d'un nombre à un autre

  Exemple: Jea (5;2) qui a compté pour 7, répond directement pour 5 en commentant: "J'ai cherché dans ma tête: j'ai oublié de compter"; Jac (5;11) qui avait compté à voix faible en pointant visuellement pour 7 et 5, répond pour 3: "Ca je trouve tout de suite: il y en a 3" (mais il vérifie tout de même par comptage !); Car (4;1) a compté-pointé pour 5,3 et 4, mais pour 2 elle répond instantanément sans avoir même eu le temps de lever complètement son bras (pour pointer du doigt).

Conclusion :

Les analogies ci-dessus soulignées nous amènent à l'hypothèse que l'a.r. des petits nombres par l'enfant, qui serait l'analogue de la reconnaissance en "un coup d'oeil" de Galperin, peut être l'étape ultime d'une intériorisation du comptage. De plus, la conséquence importante soulignée dans le 2) de l'Annexe 8, nous conduit à penser que le processus d'a.r. lui-même n'est pas un processus perceptif primaire. S'agit-il alors d'un comptage ? Gelman essaie de soutenir ce point de vue. Nous pensons que se pose,à ce niveau, un problème de définition (et de vérification !).

<u>Remarque</u> : L'intériorisation et les nombreuses répétitions du comptage risquent de rendre inconscient le processus d'a.r. : lorsqu'un enfant déclare ne pas avoir compté, il faut donc l'interpréter au sens de compter consciemment. Cette non-conscience, et surtout la définition d'un schème comme "une action possible, un décalque intériorisé des actions longtemps accomplies" (cf. GRECO 1962 a), nous donnent de plus envie de voir dans l'a.r. un schème (issu du comptage).

5) <u>Arguments en faveur de l'hypothèse précédente</u>

Pour argumenter en faveur de notre hypothèse, nous pouvons:
- signaler certaines conséquences vérifiées, par nous ou par d'autres, et compatibles avec elle;
- critiquer la théorie classique.

a)Pour le premier point, notre hypothèse, qui fait jouer un rôle essentiel au comptage et, corrélativement, un rôle négligeable à la perception visuelle, devrait avoir les conséquences suivantes:

(1) les enfants qui semblent dénommer n ($\geqslant 3$) par perception visuelle savent compter au moins jusqu'à n;

(2) chez les jeunes enfants, dans une tâche de construction d'une collection de n ($3 \leq n \leq 5$) objets (n fixé par l'expérimentateur), le type-unité (= donner 1 à 1) devrait prédominer par rapport aux types-somme (= donner plusieurs sous-groupes) et -groupe (= donner un seul groupe);

(3) la dénomination des nombres se fait dans l'ordre;

(4) la désorganisation de la perception visuelle, par exemple un angle visuel plus grand et un matériel hétérogène, n'augmente pas la difficulté;

(5) un temps d'exposition réduit, mais suffisant pour permettre une perception **directe**, diminue la capacité d'a.r. des jeunes enfants;

(6) les apparences perceptives des très petits nombres (2 et 3) ne devraient pas induire le jeune enfant en erreur;

(7) un temps de réaction progressivement plus long doit être observé lorsqu'on passe d'un nombre à son suivant;

(8) sous réserve que la phylogenèse et l'ontogenèse suivent des mécanismes suffisamment similaires, on peut aussi dire que les peuplades primitives ne sachant pas compter ne devraient pas, ou presque pas, avoir de codes absolus pour les nombres.

Pour (1), nous pouvons, à partir des tableaux 22 et 24 de BECKMANN 1923, construire le tableau suivant: dénomme les nombres par perception visuelle

jusqu'à . . .	0	1	2	3	4	5	
améliore sa performance en comptant	0	2	7	11	7	5	32
n'améliore pas sa performan- en comptant	3	2	4	2	0	0	11

Il apparaît alors que:

- 32, sur les 43 enfants (de 4;0 à 6;2) interrogés, comptent des nombres plus grands que ceux qu'ils perçoivent;
- les 11 restants ont une capacité de perception réduite (3 au plus) ou nulle.

Pour (2), nous pouvons reproduire-traduire directement le tableau 6 de BECKMANN 1923 (les données sont en pourcentage; les effectifs sont respectivement de 0,0,14,26,35,46,56 et 149).

	2;0	2;6	3;0 et 3;6	4;0	4;6	5;0	5;6	6;0
Type-unité	–	–	58,3	56,7	45,5	39,1	43,0	47,7
Type-somme	-	-	33,3	25,0	30,3	30,4	29,6	32,3
Type-groupe	-	-	8,3	18,3	24,2	30,5	27,4	20,0

On voit donc que le type-unité est bien toujours le plus représenté, en particulier chez les plus jeunes, alors que le type-groupe est toujours (à une petite exception près) le moins représenté et est presque inexistant chez les 3 ans.
Pour les conséquences (3) à (7), nous dirons simplement, en renvoyant pour toute précision complémentaire aux références indiquées, qu'elles ont été vérifiées par:

- nous-mêmes (voir VI,C,1) pour (3);
- Gelman et Tucker (cf.GELMAN 1975, GELMAN 1978) pour (4), (5)*, (6);
- Chi et Klahr (cf.CHI 1975) pour (7).

Pour (8) enfin, nous citerons Dantzig (cf.DANTZIG 1937) qui, après avoir souligné que "des expériences menées avec le plus grand soin ont conduit à la conclusion

---

* pour (5), voir aussi l'opposition Descoeudres-Filbig présentée en note dans IX,A,2

irréfutable que le sens direct visuel du nombre, chez un homme cultivé moyen, dépasse rarement le nombre 4 et que le sens tactile est encore plus limité" et que "les études anthropologiques sur les races primitives corroborent remarquablement ces résultats" écrit à propos de ces études anthropologiques: "elles révèlent que les sauvages qui n'ont pas encore atteint le degré d'évolution suffisant pour savoir compter sur leurs doigts sont presque complètement dépourvus de toute notion du nombre; c'est le cas de nombreuses tribus d'Australie, des îles des mers du Sud, d'Amérique du Sud et d'Afrique. Curr, qui a fait des observations étendues sur les Australiens encore non civilisés, déclare qu'il y a fort peu d'indigènes capables de discerner 4 et qu'aucun Australien à l'état sauvage n'est capable de concevoir 7. Les hommes de la brousse sud-africaine ne possèdent pas de noms de nombre en dehors de un, deux et plusieurs, et encore ces mots sont si peu articulés qu'on peut se demander si ces indigènes leur attachent une signification bien nette".

b) Pour le second point, nous pourrions discuter la théorie classique en elle-même:
la définition et même l'existence du seuil du subitizing, sa variation en fonction de la population, des conditions expérimentales, de l'entraînement des sujets,... Mais ce que nous voudrions discuter ici, c'est surtout l'application de cette théorie à de jeunes enfants. En effet, il est difficile de penser que ceux-ci réagissent de la même façon que, par exemple, les étudiants de collèges hautement sélectionnés (et dont chacun a donné plusieurs centaines de réponses) qui constituaient la population de KAUFMAN 1949. Et, de fait, les expériences avec de jeunes enfants que nous connaissons ne permettent pas de situer le seuil de subitizing au-delà de 3 ou 4 à l'entrée du CP:

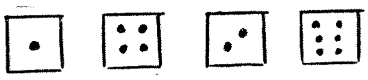
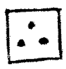
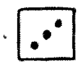
- Henck (cf.HENCK 1928), en 1903, avait trouvé, avec 56 élèves de début de CP, 89% de réussites pour 3, mais plus que 63% pour 4;
- Freeman (rapporté dans BECKWITH 1966), en 1912, avait situé la limite de p.g.d. à 4 pour les enfants de plus de 8 ans, et avait estimé non-testables les enfants plus jeunes;
- Filbig (cf.FILBIG 1923) a trouvé que la capacité d'appréhension simultanée est limitée, chez l'enfant de 70 mois, à des lignes de 2 ou 3, ou à des groupes de 3 ou 4, si on réduit le temps d'exposition à une seconde. De plus, une expérience de Strauss qu'il rapporte, la situe à 3 chez l'enfant qui entre à l'école ;

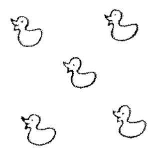
- Gréco (cf.GRECO 1960) situe la recognition immédiate des petits ensembles par l'enfant de 5-6 ans à 4 (à 6 pour certains arrangements figuraux privilégiés);
- Klahr et Wallace (cf.KLAHR 1976) ont établi, à partir des données de CHI 1975, que des enfants de 5 ans subitisent jusqu'à 3.

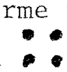
Remarque : A propos de la différence adultes-enfants, on peut signaler que Chi et Klahr (cf.CHI 1975) ont trouvé que, dans l'intervalle 1-3, le temps moyen de réaction augmente de 46 ms chez des adultes et de 195 ms chez des enfants de 5-6 ans, lorsqu'on passe d'un nombre au suivant.

6) Précisions complémentaires sur la perception des formes

a) Steffe et Thompson (cf. STEFFE 1979), dans une critique du point de vue de Gelman, disent qu'un enfant peut avoir conscience, même déjà à 2 ans, de certains groupes d'éléments grâce à une perception n'ayant pas de signification quantitative, et peut ainsi arriver, par exemple, à dire trois pour  . Or, si l'on ne peut nier l'existence de tels cas, d'ailleurs souvent signalés dans la littérature,

Ex. : dans GLAESER 1976, est rapporté le cas d'une fillette qui sait dénommer  mais pas  alors que pour  elle répond trois sans difficulté;

Churchill, dans CHURCHILL 1961 (illustration tirée de GINSBURG 1977), rapporte le cas de Stephen qui, à 5 ans, soutenait que  "ce n'est pas 5; il y a rien au milieu", montrant ainsi clairement que pour lui 5 canards c'était seulement 

Dans LAY 1898, mais il s'agit là d'une association forme perceptive-symbole, Lay signale le cas d'une fillette de maternelle qui à  associe le symbole écrit 4 mais qui, lorsqu'on lui demande combien il y a de points, les compte!

Il faut dire aussi que Beckmann (cf. BECKMANN 1923) avait, au cours d'une expérience dont le but était de voir si l'enfant est capable de s'abstraire d'une certaine constellation, observé que "seulement des enfants très faiblement doués ou ceux chez qui seul un fonctionnement incertain des actes numériques avait été atteint, avaient besoin de l'indication que, par exemple, 3 c'est pas seulement ∴ mais aussi • • • ", et a conclu, de manière générale, que "à l'intérieur d'un domaine dimensionnel et numérique permettant l'appréhension comme unité, le fonctionnement des actes de reconnaissance, distinction et dénomination, est indépendant de la forme de la constellation qui est présentée à l'enfant".

b) L'enfant peut reconnaître une forme perceptive sans pour autant savoir le nombre correct qui lui est associé.

Exemple: Ben (3;5) au cours de Jeu (4,3), à la présentation de 4 commence à compter : "10,4" mais s'arrête brutalement et s'exclame "Un carré!" . Puis à la présentation de 3, il dit tout de suite "Un triangle!" (au cours de l'épreuve de dénomination, il avait répondu 2 pour 3 et compté "10,4,10,9" pour 4).

Ben ne semble donc pas faire les liens carré = quatre et triangle = trois (malgré les analogies phonétiques). Il se peut donc que, pour le jeune enfant, la perception d'une figure géométrique ne soit d'aucune utilité pour trouver le nombre, ce dernier n'étant, selon Wallon (cf. WALLON 1962) ni une notion brute ni une notion uniquement perceptive, mais une mesure appliquée à la réalité et qui doit être élaborée. Autres exemples:

Fik (3;7), pour 4, remarque: "Un carré" mais les compte tout de même: "7,8,12,13".

Val (6;3) n'a reconnu ni 3, ni 4. Pourtant, en cours d'entretien, elle prend 4 (puis 3) jetons, les dispose en carré (resp. triangle) et demande à l'expérimentateur: "Qu'est-ce que c'est ?" et, sans lui laisser le temps de répondre, s'exclame "Un carré !" (resp. "Un triangle !").

c) L'association forme perceptive ⟷ nombre pourrait être une conséquence du comptage: les nombreux comptages de collections en carré par exemple conduiraient l'enfant, par un apprentissage empirique, à faire cette association; ou aussi elle peut être apprise à l'enfant, mais risque alors d'être artificielle et inopératoire.

Exemple :Oli (5;4) a compté incorrectement 7,5,3 et 6, et s'apprêtait à compter-pointer 4, mais s'arrête (alors qu'il était en train de lever le bras pour pointer): "Il faut que je réfléchis: c'est 4". Tu es sûr ? "Quand il y en a comme ça il y en a 4 comme ça". Compte les voir ! "1,2,3,2 : il y en a 2". Surpris par son résultat, il se reprend: "Attends, je recommence" et compte-pointe: "1,3,9,10: il y en a 10 et 9" , apparemment satisfait de ce dernier résultat.
Lorsqu'en fin d'entretien on lui demande de donner 4 jetons, il interroge: "C'est 10 ou 9 ?" puis il montre 1 jeton, puis 2 jetons, en demandant chaque fois si c'est 4. Finalement, il en prend 5, les compte: "1,2,5,9,10" et conclut: "Il y en a 4".
L'explication de sa reconnaissance de 4 nous est fournie par la maîtresse. Durant la semaine précédant l'entretien, Oli avait pratiqué longuement, en classe, un jeu dans lequel il fallait construire un carré avec des bâtonnets, et la maîtresse nous a dit avoir beaucoup insisté sur le fait que le carré est fait avec 4 bâtonnets.

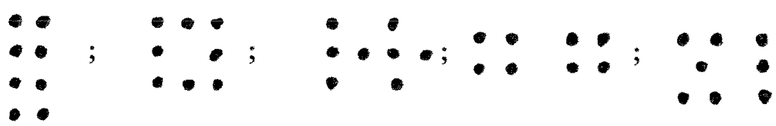
d) A partir du moment où la réponse de l'enfant n'a pas de signification quantitative, comme le pensent Steffe et Thompson, il s'agit d'une fausse réussite à la question "Combien ?" puisque l'enfant interprétant le nombre comme le nom d'une forme perceptive, répond en fait à la question "C'est quoi ?".
Et de telles fausses réussites ne semblent pas avoir trop affecté les résultats de notre épreuve de dénomination, sinon on verrait mal pourquoi la dénomination d'un nombre implique quasiment celle de ses précédents, par exemple, pourquoi reconnaître le carré 4 implique quasiment reconnaître le triangle 3.

e) A voir THOMPSON 1980, certains pédagogues essaient aujourd'hui encore de trouver des applications didactiques à la reconnaissance des nombres par perception de forme. Si nous ne nions pas l'intérêt d'une telle reconnaissance des nombres, nous voudrions cependant dire combien un apprentissage <u>initial</u> de la dénomination des nombres par reconnaissance de forme nous paraît coûteux. Pour justifier notre point de vue, nous pouvons nous inspirer de la critique qu'a faite Frege à l'empirisme de Stuart Mill* et nous demander

* Pour définir 3, Mill considère les groupements d'objets faisant cette impression ⸫ sur la sensibilité et explique alors que 2+1 font 3 du fait que de tels groupements peuvent être séparés en 2 parties comme • • •; puis il écrit : "Cette proposition accordée, nous appelons 3 toutes les répartitions analogues" (cf.FREGE 1884).

comment un enfant, pour qui trois c'est .˙. (ou analogue), reconnaîtra les 3 coups lorsque la pendule sonne 3 heures, comment il saura que le sucré, le sur et l'amer sont 3 sensations de goût et ultérieurement (s'il ne connaît que sa définition initiale de 3) comment il saura qu'il y a 3 moyens de résoudre une équation car "en aucun de ces cas, on ne trouve une impression sensible telle ˙.˙"(cf. FREGE 1884). Steffe et Thompson P.W. (cf.STEFFE 1979) expliquent bien qu'il existe des perceptions non visuelles du nombre, mais n'en faudrait-il pas une infinité ? On peut d'ailleurs remarquer que même en se limitant à des points sur une feuille, Thompson C.S. et Van de Walle proposent déjà 5 constellations * différentes pour 8; et on ne sait pas trop pourquoi ils se limitent à celles-là !

* Les constellations 8 (présentées sur des assiettes):



(réf. : THOMPSON 1980)

B) Dans la résolution des problèmes

"Le comptage forme le coeur de l'arithmétique pratique des enfants"
H. Ginsburg, 1977.

Introduction:

Alors que dans l'épreuve de dénomination le comptage permettait à lui tout seul, une fois que l'enfant avait eu "l'idée" de compter, de répondre à la question, il n'en est pas de même à l'épreuve de résolution de problèmes. Pour réussir à cette dernière, il faut non seulement du raisonnement mais aussi de la mémoire. Et 2 de nos plus jeunes sujets illustrent très bien ce dernier point:

Loi (3;4), le seul enfant du G.A. 3;3 à avoir réussi les 3 problèmes verbaux, avait d'abord répondu à Ani^{+}(2,1) et Pou^{+}(2,1): "Je sais plus", mais a trouvé ensuite après répétition de l'énoncé. A Jeu^{-}(5,2), il a répondu de manière encore plus révélatrice:"Je sais déjà plus";

Eri (3;2), le meilleur compteur-réciteur du G.A. 3;3 répond lui aussi: "Je sais plus" à pratiquement tous les problèmes, mais contrairement à Loi, ne profite pas d'une répétition de l'énoncé.

Il est donc assez difficile d'observer le rôle du comptage dans la résolution de problèmes, car les enfants qui ont les capacités de raisonnement et de mémoire nécessaires ont très souvent également un comptage très bien intériorisé. Même s'ils comptent on ne peut alors pas l'observer directement: à ce propos, il est intéressant de remarquer que les 9 grands qui ont totalement réussi à l'épreuve de dénomination sans manifester aucun signe extérieur n'ont pas non plus manifesté de signes extérieurs lors de la résolution des problèmes verbaux (et pourtant, ils ont un taux de réussite = 0,65 aux problèmes verbaux, nettement supérieur au taux général = 0,36 de réussite à ces problèmes).

De plus, certains enfants connaissent des résultats par coeur,

> Exemple : Ali (6;1), lorsqu'on lui demande comment elle a fait pour trouver 6 à $\text{Ani}^{+}(2,4)$, répond: "Je sais déjà calculer". Tu as compté ? Elle fait signe que non. Comment tu as trouvé ? "Par coeur".

ou même sont capables d'utiliser des résultats-relais.

> Exemple : Oli (6;2), pour $\text{Fru}^{+}(2,4)$ explique que "2 et 4 ça fait 6 parce que 3 et 3, 6".

ou encore utilisent leur connaissance, sans comptage, du nombre de doigts, en particulier le fait qu'une main comprend 5 doigts.

Tout ceci fait que nous n'avons observé en fin de compte que peu de comptages extériorisés: par exemple, on peut seulement dire que 1/4 environ des enfants ayant réussi $\text{Pro}^{+}(2,4)$ ont compté extérieurement.

Nous ne pouvons donc pas soutenir l'hypothèse que l'enfant résoud les premiers problèmes exclusivement par comptage. Nous nous contenterons en conséquence d'émettre l'hypothèse que le comptage joue un rôle important dans la résolution des premiers problèmes numériques par l'enfant.

1) Tests d'implications

Une conséquence probable de notre hypothèse est qu'un enfant sachant résoudre un problème dont le résultat ou une donnée est un nombre n, devrait aussi savoir compter ce nombre n. Ceci nous a conduit à tester les implications suivantes:

a) Chez les petits

réussir $\text{Ani}^{+}(2,1)$ (resp. $\text{Pou}^{+}(2,1)$) $\underset{q}{\Longrightarrow}$ savoir compter 3

savoir compter 3 \ réussir $\text{Ani}^{+}(2,1)$	0	n	
0	10	6	16
n	5	38	43
	15	44	59

i.i = - 1,79 s.

savoir compter 3 \ réussir $\text{Pou}^{+}(2,1)$	0	n	
0	10	6	16
n	6	37	43
	16	43	59

i.i = -1,66 s.

b) Chez les moyens:

réussir Ani$^+$(2,1) (resp. Pou$^+$(2,1)) $\underset{q}{\Longrightarrow}$ savoir compter 3

savoir compter 3 \ réussir Ani$^+$(2,1)	0	n	
0	34	10	44
n	5	15	20
	39	25	64

i.i = - 2,06 s.

savoir compter 3 \ réussir Pou$^+$(2,1)	0	n	
0	34	10	44
n	4	16	20
	38	26	64

i.i = -2,29 s.

c) Chez les grands :

réussir Bon$^-$(7,2) $\underset{q}{\Longrightarrow}$ savoir compter 7

savoir compter 7 \ réussir Bon$^-$(7,2)	0	n	
0	34	41	75
n	1	15	16
	35	56	91

i.i = -2,08 s.

Conclusion : Toutes les quasi-implications sont vérifiées au seuil de 0,05. Nous y voyons un argument en faveur de notre hypothèse.

Remarque : Le problème Bon$^-$ (3,1) ne peut donner lieu à une telle vérification puisqu'il y a plus de réussites à Bon$^-$(3,1) que d'enfants sachant compter 3. Il se peut donc que pour des problèmes très élémentaires notre hypothèse ne soit pas très pertinente*.

* Les cas de Loïc (3;6) et de Fan (4;3) examinés au paragraphe III,C semblent le confirmer.

2) Variété et subtilité des procédures de comptage

Les procédures de comptage explicitées par les enfants sont, même si nous n'en avons relevées qu'un nombre restreint, la preuve directe de l'importance du comptage pour la résolution des problèmes.

a) Le comptage concret :

L'enfant représente la situation ou simule l'action sur ses doigts et compte le résultat final.

Exemple : Mat (5;6$^-$) pour Fru$^+$(2,4)"met" 2 doigts sur une main et 4 sur l'autre et compte le tout:
"1,2,3,4,5,6: ça fait 6".
Ger (4;1) pour Ani$^+$(2,1) met 2 doigts (=2 lions) et consécutivement 1 autre (= 1 tigre) sur une main et répond: "Il y en a 1,2,3 (en comptant ses 3 doigts): il y en a 3".
Sté (6;2) pour Bon$^-$(7,2) met 7 sur ses doigts (Sté contrairement à la plupart des enfants garde recourbés les doigts qui"comptent"), puis lève 2 doigts de la main où il y en avait 5 et compte le restant des doigts recourbés.

b Le comptage abstrait

α) Le surcomptage pour les problèmes additifs : l'enfant part de l'un des nombres, qu'il a recompté ou non* et continue à compter jusqu'à ce que le cardinal de l'ensemble des nombres-mots ainsi comptés à la suite du premier nombre (on dira surcomptés au premier nombre) soit égal au deuxième nombre. Ceci oblige l'enfant à garder, d'une manière ou d'une autre, une trace du cardinal de l'ensemble des nombres-mots surcomptés. Et les solutions qu'apportent les enfants à ce problème sont diverses:

- beaucoup lèvent 1 doigt pour chaque nombre-mot surcompté et matérialisent donc physiquement l'ensemble ci-dessus, ce qui leur permet de "voir" son cardinal;
- Ric (6;5) sembler garder une trace visuelle: pour Ani$^+$(2,4), il compte-

* Habituellement, on exclut le recomptage du premier nombre lorsqu'on parle de surcomptage (="counting on" en anglais). Nous nous rallierons à cette habitude par la suite.

pointe en effet 4 points imaginaires et en ligne sur la table et continue à compter-pointer 2 points imaginaires en dessous des 4 premiers;

- quelques enfants semblent garder une trace auditive: on le remarque au fait qu'ils ne comptent à haute voix que les nombres-mots surcomptés;
- Cyr (5;10) semble garder une trace motrice: il accompagne son comptage pour Ani$^+$(2,4) de hochements de la tête (seulement le début du comptage était audible).

Bien entendu, toutes ces solutions peuvent être plus ou moins intériorisées. Elles ne semblent toutefois pas maîtrisées par une majorité d'enfants de fin de maternelle: nous en voulons pour preuve les nombreuses erreurs, en particulier la réponse 5 qui est l'erreur la plus fréquente, aux problèmes Pro$^+$(4,2) et Pro$^+$(2,4).

3) Le décomptage pour les problèmes soustractifs : l'enfant part du plus grand des nombres, qu'il a recompté ou non, et compte en arrière. Le même problème que pour le surcomptage, c'est-à-sire garder une trace du cardinal de l'ensemble des nombres-mots décomptés, se pose. De plus, la réponse n'est pas le dernier nombre-mot décompté mais celui qui le suit dans le comptage arrière. Cette technique, assez sophistiquée si elle est pratiquée abstraitement, est en fait "concrétisée" par les enfants: par exemple, Oli (6;2) qui trouve Bon$^-$(7,2) sans difficulté explique "quand on en a 7 et qu'on en mange 2, je sais que le 7 et le 6 ils sont supprimés".

Certains enfants arrivent d'ailleurs à éviter le comptage arrière : ils comptent pour Bon$^-$(7,2), "1,2,3,4,5,6,7" repérant ainsi vraisemblablement les 2 derniers nombres-mots, puis ils recomptent "1,2,3,4,5" en ne comptant plus ces 2 nombres-mots qui ont ainsi été décomptés par omission.

Exemple: Rém (6;3), à Bon$^-$(7,2), trouve 5 et explique: "Je compte d'abord 7 et puis après je compte plus 7 ni 8". Ni 6 (tu veux dire) ? "Oui".

3) Difficultés relatives entre problèmes verbaux

Introduction : Nous voyons dans les difficultés relatives entre problèmes verbaux trouvées dans VII, A un nouvel argument indirect en faveur de notre hypothèse. En effet, cette dernière permet d'interpréter assez facilement un des principaux résultats trouvés et ne contredit pas les autres.

a) Pas de différence de difficulté entre Ani$^+$(2,1) et Pou$^+$(2,1) :

Ce résultat, obtenu chez les petits et les moyens, paraît assez surprenant: en effet Pou$^+$ est un problème dynamique alors que Ani$^+$ est un problème statique, et de nombreux chercheurs ont souligné la facilité relative des problèmes dynamiques par rapport aux problèmes statiques. En particulier, K.C.Fuson (cf.FUSON

1979) émet l'hypothèse d'une telle différence pour les enfants très jeunes. Soulignons d'ailleurs que:

- Gelman et al. (cf. GELMAN 1980) ont mis en évidence la capacité des enfants de 3-4 ans à prédire les effets d'une transformation physique exercée sur un objet (et même à retrouver l'état initial d'un objet transformé, ou l'instrument médiateur entre 2 états);
- cette antériorité du dynamique sur le statique semble un phénomène assez général puisque, par exemple, dans l'usage initial que font les enfants russes (vers 2 ans) de l'accusatif, ils se contentent, dans un premier temps, d'appliquer le marquage grammatical qui le caractérise à un sous-ensemble d'expressions (sous-ensemble qui, du point de vue linguistique, n'a pas de raison d'être), celles qui précisément contiennent d'idée d'une action physique sur un objet tangible, action qui modifie l'état de cet objet (cf. SLOBIN 1981).

Mais remarquons aussi que la facilité relative des problèmes verbaux dynamiques a été vérifiée expérimentalement surtout pour les problèmes soustractifs (avec recherche de l'état final) par Le Blanc (cf. LE BLANC 1968), Moser (cf. MOSER 1980a) ou nous-mêmes (cf. FISCHER 1979), alors que pour les problèmes additifs Shores et Underhill (cf. SHORES 1976), Carpenter et Moser (cf. CARPENTER 1979), n'ont pas constaté de différences significatives.
Or, si le comptage est une procédure fréquemment utilisée par les jeunes enfants, les résultats de Gelman sur la précocité du principe d'abstraction laissaient prévoir un tel résultat. Elle a en effet montré que le jeune enfant ne manifeste aucune réticence à compter ensemble des objets différents (ici des lions et des tigres) pourvu qu'on puisse leur trouver une désignation commune (ici animaux). Et comme il suffisait de compter ensemble les 2 lions et le tigre pour résoudre $Ani^+(2,1)$ on voit bien que notre hypothèse rend notre résultat expérimental, a priori surprenant, tout à fait prévisible.

b) <u>Pas de différence de difficulté entre $Pro^+(4,2)$ et $Pro^+(2,4)$</u> :
Les données du problème étant indiquées à l'enfant dans le temps, on peut penser que cela va favoriser le surcomptage de la deuxième à la première: $Pro^+(2,4)$ devrait alors être plus difficile que $Pro^+(4,2)$. Le fait qu'il n'en est pas nettement ainsi prouve-t-il que les enfants ne comptent guère ? Ceci n'est pas sûr, car:

- avec certaines procédures de surcomptage, surcompter 4 à 2 n'est pas plus difficile que surcompter 2 à 4;
- ils peuvent utiliser d'autres procédures de comptage que le surcomptage;
- ils peuvent permuter les 2 données, par simple commutativité verbale, puisque les problèmes sont statiques, ou en appliquant le principe d'ordre quelconque.

Ce résultat ne contredit donc pas notre hypothèse.

c) Bil$^-$(5,2) plus difficile que Bon$^-$(5,2)

Si l'on considère que le problème Bil$^-$(5,2) induit une solution par comptage "3,4,5", alors que Bon$^-$(5,2) induit plutôt une solution par décomptage "5, 4, 3", et que le comptage est plus facile que le décomptage dans la mesure où ce dernier nécessite une récitation de la suite des nombres à l'envers, le résultat obtenu chez les grands paraît lui aussi a priori surprenant. Mais cette apparente contradiction avec notre hypothèse est vite levée lorsqu'on fait remarquer que, pour résoudre Bil$^-$(5,2) par comptage, l'enfant doit d'abord savoir ce qu'il doit compter. Et c'est là que se situe la difficulté. En effet, l'enfant doit d'abord réaliser une bijection entre les 2 billes et un sous-ensemble F, avec Card F=2, de l'ensemble E des 5 billes: ce n'est qu'alors qu'il pourra compter les éléments du complémentaire de F dans E. Et il faut dire qu'il s'agit là d'une opération logique difficile en dehors de la présence des objets réels (cf.MOSER 1980c), comme cela était le cas dans notre expérience, et surtout d'une opération non induite par l'énoncé statique Bil$^-$.
On voudrait d'ailleurs rappeler qu'une difficulté analogue se pose à propos des problèmes soustractifs statiques EEE$^-$: nous avions constaté (cf.FISCHER 1979) que l'enfant devait arriver à une bonne maîtrise de l'inclusion pour la surmonter.

d) Interprétation générale

Les résultats aux problèmes verbaux nous conduisent à l'hypothèse que la résolution des problèmes verbaux au niveau préopératoire est liée à la possibilité qu'a l'enfant d'appliquer directement (i.e. sans analyse logique préalable), par figuration, certains schèmes d'action (ajouter, enlever,...) ou/et instrumentaux (le comptage, la correspondance terme-à-terme,...).
En remarquant que, du fait qu'ils ne sont pas encore abstraits des actions qui les constituent, ces schèmes ne suffisent pas à définir une structure opératoire, on peut alors, comme le fait Gréco (cf. GRECO 1962b), parler de systèmes quasi- structurés et conclure que les êtres qui en résultent (nombres, opérations,...) ne sont pas encore vraiment arithmétiques.

e) Remarque

L'étude de telles résolutions initiales de problèmes par comptage est importante pour comprendre les difficultés ultérieures que peuvent avoir les enfants, car "les enfants interprètent souvent les mathématiques officielles avec leurs connaissances informelles d'arithmétique déjà disponibles, connaissances qui impliquent souvent des procédures basées sur le comptage"(cf. GINSBURG 1980).

4) Autres observations montrant l'importance du comptage

a) Les explications des enfants

Certains enfants à qui l'on a demandé comment ils ont trouvé, disent avoir compté et explicitent leur comptage, alors qu'ils n'avaient en cours de résolution manifesté aucun signe extérieur de comptage:

Exemple: Caroline (5ans) répond 4 à $Fru^+(2,2)$. Pourquoi ? "Parce que j'ai compté" .Comment tu as compté ? "Sans rien dire". Dis le maintenant! "1,2,3,4".

Nel ((6;4) explique qu'elle a trouvé 6 à $Ani^+(4,2)$ en comptant "1,2, 3, 4,5,6" 'elle accentue le 4 et ralentit ensuite son comptage: peut-être garde-t-elle une trace rythmique des nombre-mots surcomptés).

Benoît (5;7) réussit $Jeu^-(5,2)$ et explique: "Parce que tu m'en avais mis 2 dans une et puis après j'ai compté dans la tête et puis après je me suis souvenu. J'ai compté 1,2 et puis après je me suis souvenu qu'il y avait 3".

Angélique (5;10) réussit $Jeu^-(5,2)$ et explique: "Je savais qu'il y en avait 3". Comment tu as su ? "J'ai compté". Comment ? "1,2,3". Mais tu les voyais pas ! "Mais comme je les ai comptés avant".

b) Les erreurs dues à des suites idiosyncrasiques :

Exemple : Barbara (4;3), déjà citée dans le A,3, et qui a récité: "1,2,5,8 et 9" trouve 5 au problème $LE^+(2,1)$: elle a donc vraisemblablement compté avec sa suite idiosyncrasique.

c) Les comptages prématurés

Quelques enfants qui ne maîtrisent pas encore tous les principes du "Comment compter" comptent tout de même pour résoudre un problème.

Exemple : Yol (3;7) répond "2,4,9" à $Pou^+(2,1)$ et semble ainsi avoir compté les poupées alors qu'elle ne maitrise ni Pss(3) ni Pca(3) mais seulement Pbi(3).

d) Les comptages pas encore complètement intériorisés

Comme lors de l'épreuve de dénomination on a pu observer au cours de l'épreuve de résolution de problèmes toutes sortes de manifestations d'un comptage pas encore complètement intériorisé: mouvement de lèvres, voix à peine audible,...

e) Les cas particuliers

Mar (5;10) en échec électif dans le domaine du comptage (voir Annexes 6 et 7) ne réussit aucun problème impliquant des nombres supérieurs à 5 alors qu'elle réussit Bil$^-$(3,1), en général plus difficile.

Loi (3;4), le seul enfant du G.A. 3;3 ayant résolu correctement les 3 problèmes verbaux a utilisé le surcomptage avec accompagnement des doigts pour résoudre Ani$^+$(2,1) et Pou$^+$(2,1).

Remarque : Dav (4;6$^+$) (voir Annexe 5) semble être l'exception qui confirme l'implication du 1): il réussit en effet les problèmes verbaux sans savoir compter, mais il faut dire d'une part qu'il a un comportement original, d'autre part que son entourage a vraisemblablement essayé de lui apprendre l'arithmétique élémentaire (il est le seul enfant de son âge à utiliser les expressions mathématiques "plus" et "égale").

CHAPITRE X : Réflexions complémentaires ou supplémentaires sur le comptage de l'enfant

" ... fournissant la clef du monde extérieur dans la mesure où les objets de ce dernier sont matière à énumération directe- capable d'être comptés,- elle (= l'arithmétique) est la première grande étape dans la conquête de la nature"

National Education Association, 1895.

X.- Réflexions complémentaires ou supplémentaires sur le comptage de l'enfant

A) Ses caractéristiques

"Les noms de quelques-uns des premiers nombres sont appris très tôt; et les enfants apprennent souvent à compter aussi loin que 100 avant d'apprendre l'alphabet"

W. Colburn, 1821.

1) Sa précocité

Nos résultats (voir VIII,A,4 et VIII,A,2,b,β) montrent que:

- 75% des enfants de 3;6±6 appliquent déjà au moins un des principes du "Comment compter" pour 3;
- 75% des enfants appliquent l'ensemble des 3 principes du "Comment compter pour 5, vers 5;1.

De plus, il faut dire que notre méthode expérimentale ne conduit pas aux performances maximales dont seraient capables les enfants: en effet, et ceci concerne surtout les plus jeunes d'entre eux, certains enfants ont pu être "victimes" de leur émotion ou encore d'un manque de motivation. Il est également sûr qu'une répétition de certaines questions, par exemple sous forme d'un deuxième entretien à un autre moment de la journée, ou/et des encouragements supplémentaires, n'auraient pu qu'améliorer les performances maximales des enfants. D'ailleurs certains faits nous font penser que des améliorations auraient été possibles, par exemple:

- le fait que certains enfants améliorent leur performance initiale de la récitation au cours d'un comptage-pointage;
- le fait que la plus jeune des enfants, Anne (2;6) (voir VI,B,4) n'a fini par compter qu'après avoir été longuement encouragée par l'expérimentateur et surtout l'aide maternelle qui lui était très familière.

Et les résultats de Gelman, si toutefois la population examinée par elle ne diffère pas trop de la nôtre (voir le 4 suivant) montrent qu'il peut y avoir, chez les 3 ans, des différences importantes* entre des performances maximales (qu'elle a essayé d'atteindre) et les performances que nous avons obtenues. Si l'on tient alors compte du fait que nos résultats ci-dessus rappelés, surtout le premier, sous-évaluent les performances maximales dont seraient capables les enfants, ou encore si l'on se réfère directement aux performances maximales rapportées par Gelman, la précocité du comptage apparaît encore plus nettement. En effet, on peut signaler que Gelman trouve que 67% des enfants de

---

* Remarquons que ces différences peuvent partiellement être imputées à une certaine "générosité" de Gelman dans l'attribution des principes du comptage (voir VIII,A,4), mais partiellement seulement, car certains résultats de Gelman sont indiscutables (et même contrôlables !)

3 ans appliquent les 3 principes du "Comment compter 3" , que même les enfants de 2 ans tentent déjà presque tous d'appliquer certains de ces principes, ou encore rappeler le fait étonnant que 16/48 = 1/3 des enfants de 3 ans qu'elle a examinés réussissent, si on leur laisse suffisamment de temps, à dénombrer correctement 11 objets.

Même déjà avant 2 ans, de nombreux psychologues ont observé et souligné les débuts du comptage:

-L., l'enfant observée par Dearborn (cf. DEARBORN 1910), à 1;6 disait spontanément "1,2,3", à 1;8 comptait des images avec sont doigt en disant "1,2,1,2 1,2" jusqu'à 6, à 1;9 disait "1,2,3,4,5" mais pas toujours (suivant ses caprices);

-Stephen H.C., observé par Riess (cf. RIESS 1943), comptait, en accompagnant l'expérimentatrice, jusqu'à 6 à 1;3, puis tout seul, en séparant les objets d'une pile, jusqu'à 10 à l'âge de 1;6 (sans savoir au terme de son comptage combien il avait d'objets);

-Hilde, la fille aînée des psychologues W.et C. Stern disait déjà "1,2" en marquant le pas à 1;2 (rapporté dans DECROLY 1912).

Il semble maintenant difficile de remonter encore plus loin car à ce dernier âge, la langue elle-même ne fait que débuter. Il existe cependant des rudiments non-verbaux de comptage. Par exemple, la simple mise en série répondant à une individualisation par répétition ou par persévération (cf.WALLON 1962). Si l'on s'intéresse donc à de tels rudiments, on peut souligner que:

- Gesell et al. situent à 1 an le comportement "un par un", i.e. la manipulation d'objets l'un après l'autre, consécutivement (cf. ILG 1951);
- Riess (cf. RIESS 1943) distingue 2 types de comportements pré-numériques: l'agrégation et l'isolation. Elle a observé l'isolation chez un enfant de 1;0 qui vidait son assiette de petits pois en les mettant l'un après l'autre dans sa cuillère et l'agrégation chez un autre de 11 mois qui collectionnait des cônes de pin dans son jardin en les mettant dans un panier avec lequel il se promenait .

De plus, si l'on s'intéresse au pointage du doigt qui, ultérieurement, accompagne très souvent le comptage, on peut encore souligner que:

- des observations individuelles anciennes (Tiedemann en 1787, Shinn en 1900) situent l'émergence du geste de pointage durant le neuvième mois (cf. LEMPERS 1977);
- les observations plus systématiques de Shirley (cf.SHIRLEY 1933) sur 25 enfants montrent que l'âge médian d'apparition du pointage avec l'index est de 42 semaines. Shirley a trouvé aussi qu'en présentant consécutivement 10 images à des enfants, à 42 semaines, 42% d'entre eux pointaient une partie de l'une au moins des images, et à 50 semaines, 90 %;

- une recherche plus récente (COLE 1974) a confirmé l'accroissement considérable de la fréquence des pointages spontanés entre le dixième et le onzième mois.

Enfin, même si le pointage du doigt n'a pas encore émergé, on peut voir, comme le font Starkey et Cooper qui semblent avoir mis ces suivantes en évidence (cf.STARKEY 1980), dans les capacités à discriminer le nombre exact d'items que possèdent les enfants de 22 semaines, des précurseurs du comptage verbal.

2) Sa fiabilité

Dans ROBINET 1980, les auteurs constatent que:

- dans des tests de comparaison entre 2 collections (niveau: CP et CE1), les enfants de Montrouge ont plus tendance que les autres à compter, mais que cela leur réussit assez bien (chapitre II, p.33);
- dans des tests de dénombrement où toutes les rangées contiennent 10 objets, la fiabilité du comptage 1 par 1, dans les conditions particulières de ces tests, ne semble pas inférieure à celle du comptage de 10 en 10 (chapitre III, p.3).

Mais ce n'est pas tellement comparativement à d'autres procédures que nous voudrions souligner la fiabilité du comptage, car il est clair que, dans certains problèmes de comparaison par exemple, la superposition suffit pour résoudre le problème, et est, de manière évidente, plus fiable (surtout si le nombre d'objets est grand) que le comptage. C'est plutôt par rapport à la complexité propre du comptage-pointage que la fiabilité de ce dernier nous paraît grande: en effet, et F. Pécaut (cf.PECAUT 1921) l'avait déjà souligné, si la récitation des nombres-mots dans leur ordre est un mécanisme simple qui s'enregistre facilement dans les centres nerveux, le comptage-pointage est un mécanisme plus compliqué car il faut passer machinalement d'un nombre-mot au suivant et, en outre, intercaler entre chaque passage un acte d'attention à un objet. Et ce mécanisme coordonné doit être répété (n-1)fois, sans qu'aucun "raté" ne soit toléré, si l'on veut arriver à un comptage-pointage correct de n objets.
Ceci fait qu'il est finalement assez étonnant que, dans l'expérience ci-dessus référée, sur 3 enfants de CP qui ont compté jusqu'au bout plus de 100 objets (de plus , deux fois), un seul se soit trompé (chapitre II,p.20). De même,

en nous reférant à notre propre expérience, le fait que dès 6 ans la quasi-totalité des enfants comptent-pointent correctement 7 jetons ne doit pas être sous-estimé, d'autant que la disposition en cercle * des jetons identiques nécessitait dans ce cas un repérage précis(et une mémorisation de ce repérage) non trivial du jeton numéro 1 et une attention particulière pour le jeton central.

3) Son attrait parfois irrationnel

Brownell (Cf. BROWNELL 1930) avait posé 16 combinaisons additives à chacun des 32 enfants après 2 années d'un enseignement par "dressage" (répétition mécanique jusqu'à connaissance par coeur). L'interview révéla que 116 (= 22,7% des 512) combinaisons ont néanmoins été comptées. Mais l'expérience ne s'arrêta pas là. Durant le mois suivant cette première interview, Brownell consacra chaque jour 5 minutes à l'apprentissage par dressage des combinaisons additives, en veillant à ce que chacune d'entre elles soit présentée au moins 2 fois par jour. Il reposa alors les 16 combinaisons et put observer, lors de cette seconde interview, que "si les enfants avaient compté leur combinaison lors de la première interview ils persistaient à compter un mois après en dépit de l'instruction journalière".
Lankford (cf. LANKFORD 1974) a trouvé que, sur un total de 176 élèves en 7ème année d'école qu'il a interrogé, "de manière surprenante il y avait 63 élèves qui utilisaient le comptage dans la multiplication des nombres entiers". Exemple: un élève qui ne connaissait pas 7x8 = a dit "7x7 = 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56" en s'arrêtant après avoir compté 7 doigts après 49.
Robinet et Artigue (cf. ROBINET 1980) ont observé:

- dans des tests de comparaison entre 2 collections, une nette prédominance du comptage,
- dans les mêmes tests de dénombrement que ci-dessus, le comptage 1 par 1 reste fréquent même pour des quantités importantes (jusqu'à 251) .

Comiti et al. (cf. COMITI 1980b) soulignent, dans la construction d'une collection équipotente à une collection de cardinal m:

* Beckwith et Restle (cf.BECKWITH 1966) ont vérifié sur 18 enfants de 7;3 à 9;10 que compter 12 (resp.15,16,18) objets identiques disposés en cercle leur demandait en moyenne plus de temps et provoquait plus d'erreurs que compter 12 objets (resp.15,16,18) disposés en ligne. Le premier comptage a conduit à 5 (resp.3,5,4) erreurs alors que le second n'en provoquait que 1 (resp. 2, 3,3): ces résultats confirment notre point de vue mais ne sont cependant pas très nets.

- au CP, en mars et pour m=15, une attraction des enfants vers le comptage, phénomène qui s'amplifie encore lorsque l'on passe de cette tâche de construction à la tâche de vérification de l'exactitude du résultat obtenu (p.177);
- au CE, en novembre et pour m = 37, un recours massif au comptage, bien que dans la tâche proposée la méthode de comptage soit loin d'être économique (p.178).

Audigier et Chartier (cf. AUDIGIER 1981) rapportent des résultats d'une enquête, au CP, de l'INRP. On peut y voir que:

- pour trouver le cardinal de la réunion d'une collection de 47 jetons et d'une autre de 8, collections qui venaient d'être comptées par les enfants, 72% des 495 enfants examinés comptent ou surcomptent;
- pour comparer une série de 8 allumettes (ligne brisée) et une autre de 7 (file plus longue), 81% des 208 enfants qui ont réussi ont (ou disent avoir) compté.

Tout commentaire nous semble inutile: les expressions soulignées et les proportions citées suffisent pour rendre compte de l'attrait du comptage. Et si nous avons qualifié cet attrait de "parfois irrationnel", c'est que le comptage, dans beaucoup de cas, est loin d'être la procédure la plus économique.

4) Son universalité

a) En Allemagne*, autrefois

Henck (cf. HENCK 1928) rapporte une expérience avec 56 élèves en début de C.P. faite en 1903. Savent compter: jusqu'à 3 → 100%, 5 → 98%, 10 → 93%; 15 → 68%, 20 → 57%, 40 → 23%, 50 → 14%, au-delà de 50 → 7% et jusqu'à 100 → 5%.

Lietzmann(cf. LIETZMANN 1912) rapporte une expérience de Räther portant sur les 1217 élèves des écoles publiques de Breslau entrant au C.P. (Lietzmann ne précise pas l'année: nous pensons qu'elle est rapportée dans un livre de Räther daté de 1892):

10% ne savaient pas compter jusqu'à5; 78% savaient compter au moins jusqu'à 10, 4% jusqu'à 100 et 0,6% au-delà de 100.

* En Allemagne, les enfants doivent avoir 6 ans révolus pour entrer à l'école primaire: ils ont donc en moyenne quelques mois de plus (par rapport aux enfants français) au début de la 1° année.

Filbig (cf. FILBIG 1923) situe les possiblités de comptage des enfants de 45 mois à 2 , de 50 à 8, de 60 à 13, de 65 à 20 et de 70 à 20 aussi.

Enfin Eckhardt (voir Annexe 15) qui a interrogé, en 1907, 45 garçons durant les premières semaines de leur entrée à l'école (classe d'accueil d'une école secondaire de Francfort / Main) indique des performances dont il dit être lui-même étonné. Et il y a de quoi: 28 enfants comptent au moins jusqu'à 100, alors que seulement 3 n'arrivent pas 10.

b) Aux Etats-Unis, par la suite

Baldwin et Stecher indiquent, dans BALDWIN 1925, que, en moyenne, l'enfant arrive à compter (éventuellement sans Pca) approximativement 2 jetons à 3 ans, 9 à 4 ans, 21 à 5 ans et 28 à 6 ans.

Pour le développement du comptage d'après Gesell et al., nous renvoyons à l'Annexe 16.

Estes (cf. ESTES 1956) rapporte que 7/14 enfants de 4 ans, 17/20 de 5 ans et 18/18 de 6 ans ont compté correctement 3 arrangements différents de 10 objets.

Saxe mentionne dans SAXE 1977, que sur 42 enfants de 3;1 à 7;3 interrogés, seulement 3 (des 17 enfants de 3 ans) ne savaient pas compter mécaniquement jusqu'à 9.

Kurtz (cf. KURTZ 1978) rapporte une enquête à grande échelle, 277 maîtresses et 11000 enfants concernés, faite récemment aux Etats-Unis et selon laquelle 82% des maîtresses américaines estiment qu'à la sortie de l'école maternelle entre 76 et 100% de leurs élèves savent réciter jusqu'à 20, 13% ... entre 51 et 75% ...,3%... entre 26 et 50%... et 2% ...entre 0 et 25%...

Enfin les articles récents, référés sous FUSON, permettent de construire le tableau suivant qui indique la longueur moyenne de la (meilleure) suite (récitation) pour des enfants américains en fonction de l'âge et du milieu social (entre parenthèses, les longueurs extrêmes):

milieu \ G.A.	3.3 ± 3	3;9 ± 3	4.3 ± 3	4;9 ± 3	5;3 ± 3	5;9 ± 3
population suburbaine	11.8 (4-29)	16.1 (6-39)	20.8 (8-49)	33.7 (6-75)	43.6 (9-90)	83,9 (16-122)
population urbaine		14.5 (9-29)	15.8 (11-35)	32.1 (14-100)	36.0 (11-100)	30.6 (13-59)
école privée (27 enfants) + école publique* (60 enfants)		14.2 (4-29)	17.2 (10-39)	29.6 (12-100)	40.2 (11-100)	38.2 (13-90)

* dont la population reflète celle de la ville de Chicago

<u>Remarque</u> : A titre comparatif, nous avons trouvé qu'à 3 ans, 11/62 = 18% des enfants savent réciter jusqu'à 9; à 4 ans, 5/64 = 8% jusqu'à 20; à 5 ans, 10/64 = 16% jusqu'à 28; ou encore qu'en fin de maternelle 28/64 = 44% des enfants savent réciter jusqu'à 20. La connaissance de la suite des nombres par les enfants américains semble donc assez nettement supérieure à celle que nous avons trouvée pour les enfants de notre population expérimentale.

c) <u>Dans d'autres pays</u>

Au Japon, Hatano, (cf. HATANO 1979) rapporte qu'une recherche faite en 1966 montre que, en dernière année de maternelle, 90% des enfants savaient compter jusqu'à 21 ou plus.

En Allemagne de l'Est, Sieber et Butzke (cf. SIEBER 1968) écrivent que presque tous les enfants entrant à l'école connaissent la suite des nombres jusqu'à 10.

En Suisse, Gréco (cf. GRECO 1960) situait dans les savoirs numériques des enfants de 5-6 ans, la mémorisation de la suite verbale des nombres, jusqu'à 8-9 chez les plus jeunes, 15-20 pour la plupart, rarement plus loin, et la pratique du dénombrement dans les mêmes limites.

5) <u>Son absorption par l'enfant</u>

En se référant à Maria Montessori, on peut attribuer l'acquisition précoce du comptage (voir Note 2 ci-après) à l'"esprit absorbant" (voir Note 1 ci-après) de l'enfant. Cet esprit absorbant explique par exemple "la faculté véritablement miraculeuse de l'enfant à absorber ce que l'on appelle faussement 'le langage maternel' dans tous ses détails phonétiques et grammaticaux, alors qu'il n'a pas encore les facultés mentales nécessaires pour apprendre". Et Maria Montessori en continuant son commentaire, " ce qui a été absorbé à cette période d'inconscience, grâce à la force de la nature, est ce qui persiste le plus profondément chez l'individu" (cf. MONTESSORI 1926), nous semble très bien expliquer pourquoi l'homme adulte fatigué ou contesté revient souvent par "atavisme ontogénétique" donc, au comptage 1 par 1, alors que d'autres formes de comptage seraient certainement plus rapides. Cela explique aussi, bien entendu, pourquoi l'enfant d'âge scolaire est attiré par le comptage et, en conséquence, pourquoi tout autre savoir lui permettant de trouver le cardinal d'un ensemble doit être, parfois longuement, institutionnalisé. Quant à préciser d'où vient ce désir de l'enfant d'absorber la connaissance et de reproduire avec ordre et discipline ce qu'il a retenu, on peut seulement dire, avec A. Berge (rapporté dans PORTNOY 1970), qu'il est lié au développement libidinal de l'enfant.

Note 1 :"L'esprit de l'enfant, dit Maria Montessori, est absorbant, c'est-à-dire qu'il a le pouvoir - actif, donc proprement créatif - d'attirer à lui-même les éléments qui lui sont indispensables ou utiles, de se les approprier, d'en faire sa chair, sa substance vitale, à la manière de l'organisme qui n'imite pas ni ne copie les matériels qui lui sont offerts par l'extérieur, mais les assimile en les transformant en sa propre substance, en tissus qui vivent en augmentant de force et d'extension" (cf. CALO 1956).

Note 2 : En reprenant une observation générale faite par Maria Montessori (rapportée dans CALO 1956), on peut décrire l'acquisition ou l'appropriation du comptage par l'enfant, de la manière suivante:

- d'abord, il y a une période plus ou moins longue dans laquelle des expériences s'accumulent - souvent avec ce caractère, qu'on remarque chez le petit, d'une répétition insistante du même exercice, comme pour se donner à lui-même la preuve que la chose est vraiment comme ça (par exemple, que le matin il a encore les 10 doigts qu'il avait la veille), qu'il en est le maître, qu'il la possède définitivement -, des mécanismes se composent (par exemple, coordination entre pointage du doigt et récitation de la suite des nombres) et se définissent (par exemple, répéter le dernier nombre-mot ou lui donner une intonation plus forte), les instrument divers s'organisent (par exemple, séparer les objets comptés de ceux qui ne le sont pas encore), pendant qu'une raison et une volonté, non encore autoconscientes, semblent veiller (comme le montrent les autocorrections faites par l'enfant) et attendre jusqu'à ce qu'une découverte éclate, qu'une révélation vienne au jour et que l'esprit saisisse subtilement un sens et une fin (ce qui explique qu'avant l'enfant pouvait compter sans appliquer Pca, i.e. sans connaître le but de son comptage) à laquelle tout ce matériel servait;

- ensuite ce matériel s'intériorise, devient une vérité ou une valeur par lesquelles l'enfant se sent mieux inséré dans le communauté spirituelle des hommes (ce qui peut expliquer la réaction de Kat (6;5) "vexée" par l'expérimentateur, qui lui demandait si elle savait déjà compter-pointer 7 jetons et auquel elle fit savoir qu'elle n'était pas un bébé).

Remarque : Maria Montessori pense que les "écoliers difficiles" sont précisément ceux qui ne suivent pas un développement naturel tel que celui décrit ci-dessus. Et le tableau d'Eckhardt (voir Annexe 15) semble corroborer cette opinion: en effet, on peut y observer que les piètres(resp. brillants) compteurs à l'entrée à l'école sont ceux qui, aussi bien en calcul que dans l'ensemble des matières, ont de mauvaises (resp. bonnes) notes au cours et à la fin des deux premières années de scolarité.

B) Ses fonctions *

"Le comptage, parce que le temps n'a qu'une dimension, est l'unique opération à laquelle on peut ramener toutes les autres"

Schopenhauer

1) Il permet au jeune enfant de mesurer et décrire la réalité

a) Le comptage n'est pas simplement un procédé verbal de dénomination des collections ou quantités, il est un mesurage dont la suite des nombres est un instrument quasi-idéal puisque extensible à l'infini. Cet instrument n'a d'ailleurs été trouvé que tardivement par l'homme: celui-ci a d'abord été obligé de se rapporter à des suites concrètes, souvent les parties de son corps, et ce n'est que grâce à son deuxième système de signalisation qu'il a pu substituer aux suites concrètes la suites des nombres.

Or mesurer la réalité est un problème qui se pose bien vite à l'enfant. Par exemple, s'il veut savoir combien il a de petites voitures, ou aussi s'il veut savoir s'il en a plus que son camarade. Il n'est donc pas étonnant que l'enfant ait très vite recours au comptage, sous forme extériorisée d'abord, intériorisée ensuite. Le comptage lui donne en effet réponse aux questions ci-dessus: d'une part, le comptage en tant que procédé de mesurage, conduit à la mesure des collections (= au cardinal des ensembles); d'autre part, le comptage, par suite de l'homomorphisme pour la relation d'ordre entre les ensembles et leurs mesures (cf. VERGNAUD 1981), permet la comparaison indi-

---

* Nous ne revenons pas sur sa fonction de dénomination (voir IX,A)

recte des collections, ce qui peut être commode (par exemple, si son camarade refuse de lui prêter sa collection de voitures, pour matérialiser une éventuelle correspondance terme à terme !).
On peut aussi penser que le comptage est le seul moyen que possède l'enfant pour mesurer certaines réalités moins scolaires que les jetons bien disposés de notre expérience ou les points des classiques constellations (pour lesquels un dénombrement par reconnaissance figurale est possible), par exemple, les voitures qui passent dans la rue durant un certain intervalle de temps ("collection" pour laquelle la perception simultanée ou/et la reconnaissance figurale semblent exclues). L'exemple de Vincent (3;5) illustre bien ce dernier fait: son oncle, en mettant la table, lui demande combien ils seront (réponse:3) pour manger; l'enfant répond d'abord instantanément 4, puis devant la désapprobation de son oncle et sur l'incitation de son frère (qui est dans la salle de bain, à proximité, mais non visible par l'enfant), se met à compter-pointer en commençant par lui, "1", puis son oncle, "2", et se rend alors dans la salle de bain pour y pointer son frère et crier triomphalement "3". Vincent aurait-il pu trouver directement (indirectement, il aurait pu représenter chaque personnage par un doigt levé et percevoir, directement par reconnaissance de forme, leur nombre) ce résultat sans compter ?

b) Si le comptage, en conduisant au nombre cardinal, permet à l'enfant d'atteindre une certaine précision dans la description des réalités, n'oublions pas non plus de dire que cette dernière est également favorisée par le nombre ordinal auquel conduit aussi le comptage: en effet, le nombre ordinal, souvent appelé numéro dans le langage des enfants, permet de distinguer des objets a priori non, ou difficilement, discernables.

2) Il permet les premiers calculs *

Introduction : A la fin du siècle dernier et au début de ce siècle, de nombreux pédagogues et méthodologues du calcul ont fermement soutenu le point de vue que le comptage est la base du calcul. Citons:

- "Le comptage est l'opération arithmétique fondamentale" et "toutes les autres opérations arithmétiques sont de simples moyens d'activation utilisant un comptage mémorisé au lieu de refaire chaque fois le travail détaillé" (cf. NEA 1895);

---

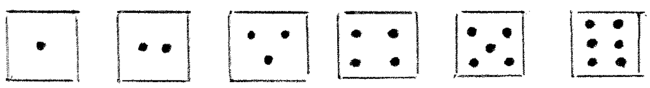
* Rappelons que le mot "calculer", étymologiquement, veut dire "compter au moyen de cailloux" (cf. BOLL 1941).

- "Tout le calcul repose sur le comptage" (cf. Diesterweg cité dans HENCK 1928);
- "La base de tout le calcul est le comptage" (cf. Böhme cité dans HENCK 1928);
- "Enlevez à l'homme sa faculté de compter, et vous lui enlèverez par là-même son habileté à calculer!" (cf. Knilling cité dans KOLAR 1937);
- "L'élément de base pour le calcul est le comptage" (cf. GERLACH 1914);
- "(Le comptage est) la condition, la base de tout le calcul" (cf. HENCK 1928);
- "Sans comptage pas de calcul" (cf. KOLAR 1937).

Mais nous ne nous contenterons évidemment pas de ces réflexions des pédagogues anciens pour soutenir notre point de vue. Nous nous appuierons aussi et surtout sur:

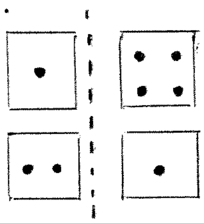
a) <u>Les travaux de Beckmann</u>

Beckmann (cf. BECKMANN 1923) a étudié de manière approfondie le développement de l'"addition" chez l'enfant. D'abord, il a, avec les 6 sortes suivantes de dés (toutes les faces d'un dé sont identiques),



étudié les actes d'

α) <u>addition + construction</u> : l'expérimentateur prend un dé, dit qu'il y a a $(1 \leq a \leq 5)$ points, et demande à l'enfant de poser un deuxième dé à côté du premier, de manière à ce qu'il y ait c $(2 \leq c \leq 6$ et $c > a)$ points en tout. Les solutions consistant à placer un dé puis à vérifier par comptage ne sont pas admises.

β) <u>addition + distinction</u> :  L'expérimentateur demande à l'enfant de montrer où il y a, par exemple, 3 points.

γ) <u>addition + dénomination</u> : l'enfant lance 2 dés et l'expérimentateur lui demande de dire combien il a lancé en tout.

Les conclusions de Beckmann sont les suivantes:

β est en général plus réussi que α : cela pourrait résulter, entre autres, du fait que l'enfant peut compter explicitement les points;

γ est en général plus réussi que β : c'est probablement parce que, pour la plupart des enfants, l'épreuve se réduit à une simple action de compter.

Mais, outre les réussites brutes, Beckmann a aussi analysé les procédures utilisées par les enfants au cours de β et γ . Il distingue ainsi les procédures de comptage, de perception (Explication-type: "je le vois") et d'addition (Explication-type: "Je sais que 2 et 2 c'est 4"). Pour les actes β et γ il donne les tableaux montrant les procédures utilisées par les enfants qui ont réussi, en fonction de la somme à trouver et de l'âge des enfants: La procédure de comptage est en général privilégiée.
Dans le tableau relatif à l'acte d'addition-dénomination, elle apparait même étonnamment privilégiée: ainsi, dans la tranche d'âge 5;6, 48,9% des 58 enfants ont réussi 1+1 en comptant, 65,3% ont réussi 2+2 en comptant alors que, pour cette dernière somme, seulement 10,7% ont réussi par addition et aucun par perception!
Beckmann a ensuite affiné son expérience, dans le but de préciser la nature de la procédure de perception: il a, avec les mêmes enfants, observé les performances et procédures dans une épreuve d'addition + dénomination, d'une part en permettant aux enfants de voir simultanément les dés (comme précédemment), d'autre part en empêchant cette vision simultanée (les enfants ne pouvaient voir les dés que successivement). 30 enfants de 4;3 à 6;2 ont été interrogés dans cette expérience: sur les 11 enfants qui ont utilisé la perception lorsque la vision simultanée était possible, 7 réalisent des performances (sans comptage) moindres* lorsqu'elle ne l'est plus. On peut en conclure que pour ces 7 enfants il semble bien y avoir perception simultanée.
Mais cette conclusion n'est pas très nette, car:
- d'une part, la baisse de performance est faible: 2 enfants qui étaient arrivés à 3+1, arrivent encore à 2+1, 1 enfant passe de 4+2 à 3+2 et 1 autre de 2+1 à 1+1, enfin chez les 3 enfants pour lesquels les performances initiales disparaissent complètement, ces dernières étaient très faibles (2 étaient arrivés à 2+1, 1 à 1+1);

---

* Beckmann a rangé préalablement et expérimentalement les sommes suivant leur difficulté dans l'ordre 1+1, 2+1, 3+1, 2+2, 4+1, 5+1, 3+2, 4+2, 3+3. Il indique, dans le tableau que nous discutons, les performances maximales pour chaque condition expérimentale.

- d'autre part, il peut aussi y avoir une légère baisse de performance pour le comptage, alors que ce dernier ne devrait pas être influencé par l'impossibilité de la vision simultanée.

De plus, on peut remarquer que:

- à 1 enfant près, sur les 11 concernés, la procédure de perception ne permet pas aux enfants de trouver des résultats supérieurs à 4;
- pour les 4 enfants qui renouvellent leur performance, la perception n'a aucune raison d'être simultanée;
- 19 enfants (pas nécessairement autres que les 11) ont trouvé certains résultats par la procédure de comptage, malgré la possibilité de perception simultanée.

Notre conclusion sera donc que, si l'on ne peut exclure le fait que la perception simultanée peut jouer un rôle dans la reconnaissance du nombre-somme de 2 collections simultanément visibles, ce rôle ne peut être que très limité.

b)Les travaux récents des psychologues américains

Brainerd (cf. BRAINERD 1973) a observé, sur des bases expérimentales assez larges (plusieurs centaines d'enfants canadiens), qu'un renforcement du concept d'ordinal a un effet positif sur la compétence arithmétique, alors qu'un renforcement du concept de cardinal n'a pas d'effet significatif: on peut en conclure avec lui que la compétence arithmétique de l'enfant est fondée sur une compréhension préalable du concept d'ordinal, dont l'exemple le plus courant est le comptage, et non sur celui de cardinal.

Hebbeler (cf. HEBBELER 1977) a étudié les proportions de comptages au cours de la résolution de problèmes additifs en fonction de l'âge. Voici les résultats:

	Preschool (Moyenne: 5;2)	Kindergarten	1° année	2° année (moyenne: 7;10)
avec objets	71	70	50	40
sans objets	37	70	50	40

Houlihan et Ginsburg (cf. HOULIHAN 1981) ont étudié les méthodes d'addition de 26 + 31 enfants de 1ère et 2ème année d'école. Le tableau de distribution de ces dernières fait apparaître (un peu plus nettement en 1ère année qu'en 2ème) que la majorité des enfants (utilisant une méthode appropriée et déterminable) utilise une méthode avec comptage, et ceci quelque soit la taille des nombres

à additionner.
Par exemple, pour additionner un nombre à 1 chiffre et un nombre à 2 chiffres, la totalité des enfants de 1ère année utilise une méthode avec comptage.

Posner (cf. POSNER 1978) dans une recherche interculturelle trouve qu'à 9 ans, des enfants africains non scolarisés et illettrés de Côte d'Ivoire font eux aussi un usage efficace du comptage pour résoudre des problèmes arithmétiques.

Ginsburg et al. (cf. GINSBURG 1979) trouvent que, même sans matériel, les enfants non-scolaires développent des procédures relativement habiles pour résoudre des problèmes arithmétiques, procédures souvent basées sur le comptage.

Carpenter et Moser (cf. CARPENTER 1979) dans une étude longitudinale avec 150 enfants, remarquent que, pour les problèmes additifs et avant apprentissage scolaire, "la plupart des stratégies sont basées sur le comptage" et, pour tous les problèmes verbaux (additifs ou soustractifs), que "les enfants utilisent des techniques de comptage variées pour représenter directement l'action ou la relation décrite dans le problème".

c) Des analyses théoriques

L'addition est une opération sur des nombres. Or, fait remarquer Vergnaud (cf. VERGNAUD 1979), un enfant qui compte un premier puis un deuxième ensemble, les réunit, et compte enfin leur réunion, n'a pas fait d'opération sur les nombres mais seulement des opérations (réunion, comptages) sur des ensembles. On peut donc se demander si ce sont bien les comptages de l'enfant qui sont à l'origine de l'opération d'addition. Vergnaud répond qu'il est probable que l'évidence du théorème

$$\text{card } (A \cup B) = \text{card } (A) + \text{card } (B) \ / \ \text{pourvu que } A \cap B = \emptyset$$

est progressivement construite à travers des sortes de situations dans lesquelles le comptage est trouvé utile et déjà fastidieux et à travers des procédures intermédiaires telles que le surcomptage (voir Note ci-après).

Pour sa part, Keseling (cf. préface de GALPERIN 1976) précise, en décrivant la théorie de l'intériorisation de Galperin, que: "Dans une addition, les ensembles ne sont plus, par exemple, comptés, réunis et consécutivement à nouveau comptés, mais l'ensemble du processus se réalise automatiquement et au-delà du seuil de conscience", et en déduit qu'en cas de difficulté, l'enfant pourra toujours revenir à la procédure initiale non encore automatisée.

Enfin, disons un mot sur les modèles théoriques construits à partir de l'étude des temps de réaction (T-R):

- Groen (cf. GROEN 1972) a étudié les T-R de 37 enfants en 1ère année d'école aux Etats-Unis (aucun algorithme n'avait été spécifiquement enseigné). Les T-R à des sommes élémentaires a+b observés sont compatibles avec un modèle consistant à reconstruire le résultat par surcomptage du min (a,b) au max (a,b) si a $\neq$ b, à retrouver de mémoire les sommes a+a;
- Svenson (cf. SVENSON 1975) a étudié les T-R de 13+12 enfants de 3ème année d'école. Les T-R observés sont également compatibles avec un modèle ayant les 2 caractéristiques ci-dessus (mis à part l'utilisation de décompositions du type 10+c, par certains enfants, et pour les nombres dépassant 10). Notons qu'un des maîtres concernés par cette expérience avait enseigné à additionner 2+9 en passant par 10, i.e. utiliser 2+9= (2+8)+1 : tous les enfants observés par Svenson ont néanmoins commencé par 9!

Note : Des expériences d'apprentissage semblent confirmer que de nombreux exercices de comptage total conduisent au surcomptage. Par exemple:

- Steffe et al. (cf. STEFFE 1976) ont trouvé que des élèves de 1° année d'école, piètres conservants (= conservants sur des bases visuelles), ont besoin de 5 semaines d'entraînement avec des procédures de comptage total avant de passer à un surcomptage;
- Groen et Resnick (cf. GROEN 1977) ont appris à des enfants de 4 ans ½ à résoudre par comptage total des problèmes symboliques visuels avec des nombres allant de 1 à 5: la moitié (=4 ou 5 sur 10) d'entre eux a alors eu des temps de réaction permettant raisonnablement de supposer un surcomptage du plus petit nombre au plus grand.

d) Des analyses cliniques d'enfants en difficultés

Le fait que le comptage est à l'origine des premiers calculs est peut-être indirectement confirmé par l'usage qu'en font des enfants, plus âgés, en difficulté. Cet usage a par exemple été observé par la rééducatrice Stella Baruk qui le décrit ainsi:

"Ces enfants (= enfants scolairement handicapés) n'avaient d'autre recours que de compter - compulsivement - sur leurs doigts. Le tout à travers une émouvante - et dérisoire - tentative de dissimulation. S'il fallait, par exemple, additionner sept à cinq, le sept se constituait par la pression des cinq doigts de la main gauche sur la cuisse, et la crispation de deux doigts de la main droite sur le stylo: main qui aussitôt se paralysait, et lèvres muettes mais qui remuaient, regard éperdu parce qu'en comptant et recomptant ça ne faisait pas toujours la même chose" (cf. BARUK 1977),

ou par Herbert Ginsburg, qui a interrogé les 3 enfants en difficulté d'une classe de 3e année de l'école élémentaire, et souligne que:

"Les plus grandes forces de l'enfant impliquent généralement une certaine forme de comptage. Stacy (= l'une des 3 enfants) savait additionner en comptant des ensembles ou en surcomptant à partir du nombre le plus grand. Nous avons vu de manière répétée que les enfants utilisent une certaine variante de comptage dans leur travail arithmétique" (cf. GINSBURG 1977).

C) Ses conséquences

"L'enfant fait ses premiers pas dans la science mathématique grâce au processus de comptage. Il compte ses doigts et répète les mots 1,2,3,4,5,6,7 8,9,10 jusqu'à ce qu'il associe à ces mots les idées de 1 ou plus, et acquiert ainsi ses premières notions de nombre "

Davies, 1850.

1) Il donne une intuition de la grandeur d'un nombre

J.B. Grize rappelle, dans GRIZE 1967, que les mathématiciens sont partagés quant à la nature des nombres. Il cite, entre autres, ceux qui estiment que l'intuition de la suite des nombres, si elle existe, n'a rien d'immédiat, mais est au contraire abstraite de l'expérience sensible. Parmi ces derniers, le plus fameux, selon Grize, est le mathématicien physicien et physiologiste allemand H. von Helmholtz (dans son exposé "Le comptage et le mesurage, vus du point de vue de la théorie de la connaissance": cf. VON HELMHOLTZ 1887). Même si l'on n'approuve pas l'interprétation que donne l'école piagétienne (cf. PIAGET 1950 et GRIZE 1967) du point de vue de Helmholtz, il est sûr que c'est bien l'expérience sensible qui nous évite de déboucher sur des nombres que K. Menninger (cf.MENNINGER 1933) qualifie de "vides". D'ailleurs, les éducateurs d'enfants * qui ne disposent pas, ou pas encore, de structures logi-

* Dans une bibliographie des articles pour l'enseignement des mathématiques en Education Spéciale parue dans Arithmetic Teacher, vol. 28 n°7 (mars 1981), on relève un article de Ogletree, Rackauskas et Buergin dont le titre est très suggestif:"Enseigner le sens du nombre par le comptage rythmé".

ques nécessaires à une construction logique du nombre ont très bien vu que l'expérience sensible était, pour ces enfants, une (et même probablement la seule) voie d'accès au nombre. On peut ainsi rappeler les exemples célèbres de Maria Montessori et Ovid Decroly, ou plus récemment celui de Brauner (cf.BRAUNER 1969), pédagogues qui se sont occupés d'enfants déficients mentaux et ont ensuite montré la fécondité de leur méthode d'éducation sensorielle avec des enfants normaux de maternelle. Soulignons d'ailleurs les performances étonnantes auxquelles parvenait Maria Montessori: elle apprenait le calcul arithmétique jusqu'à 100 aux enfants de 5 ans (cf. SAFFIOTTI 1914), et a montré, en tout cas avec ceux de 6 ans, qu'il était possible de leur faire conserver le souvenir de la formule algébrique du cube d'un quadrinôme (cf. MONTESSORI 1926). Cette importance de l'expérience sensible entraîne alors celle du comptage, puisque ce dernier s'avère être un outil quasi-parfait pour la procurer à l'enfant. En effet, le comptage met en jeu à la fois des sensations audirives, motrices ou kinesthésiques, tout en corrigeant les impressions visuelles trompeuses. De plus, il faut dire que par son déroulement dans le temps, le comptage associe au nombre une impression de durée. Il en résulte cette intuition de la grandeur d'un nombre, comme annoncé en titre du paragraphe et comme l'avait déjà souligné le pédagogue allemand K.Kühnel (cf. KUHNEL 1916).

2) Il favorise la construction des notions de quantité, de correspondance et de nombre

a) La notion de quantité

Gréco (cf. GRECO 1962a) avait souligné que "l'énumération (que suppose le comptage) transforme la collection globale comme classe en un ensemble somme d'unités". Nous voudrions de plus remarquer que le comptage nécessite une récitation de la suite des nombres-mots dans une ordre précis et invariant. Il détermine ainsi un critère (sensible) de comparaison entre 2 classes: une classe est numériquement plus petite qu'une autre si, lors du comptage de la deuxième on retrouve tous (ou plus simplement le dernier) les nombres-mots utilisés pour le comptage de la première; de manière analogue, une classe est numériquement égale à une autre si, lors du comptage des éléments de la deuxième, on retrouve exactement (i.e aucun autre nombre-mot) tous les nombres-mots utilisés lors de la première (ou plus simplement si lors du comptage de la deuxième, on trouve le même dernier nombre-mot que lors du comptage de la première). L'importance de dernier critère est d'ailleurs

soulignée par Comiti lorsqu'elle remarque que, pour la moitié des 16 enfants (début CP) de l'expérience relatée dans COMITI 1980a," "autant que" ou "pareil" semblent vraiment liés au fait qu'ils s'arrêtent sur le même nombre (ordinal) lorsqu'ils dénombrent les deux collections" - ou aussi par Morf (cf. MORF 1962) lorsqu'il remarque qu'à un certain stade du développement de l'enfant, "l'énumération verbale est utilisée d'abord de façon très curieuse, au même titre qu'un mesurant physique: le "point atteint" dans l'énumération sert à comparer objectivement deux collections,...".
Si l'on admet alors que c'est la détermination d'un critère de comparaison qui transforme la classe en quantité, on peut conclure que le comptage favorise le passage de la classe à la quantité numérique. Remarquons d'ailleurs, qu'une telle conclusion rejoint le point de vue de von Glasersfeld (cf. GLASERSFELD 1981) lorsqu'il écrit que "l'aspect quantitatif (des collections, lots ou nombres) est le résultat d'une progression dans le développement des activités de comptage de l'enfant", ou encore que "le concept de numérosité (= quantité dénombrable), malgré certaines racines préliminaires dans l'expérience sensori-motrice surgit avec le développement de l'habileté consciente à compter".

b) <u>La notion de correspondance (un à un)</u>:
<u>Remarque préalable</u> : le Pbi étant l'un des principes du comptage, on pourrait croire que l'enfant doit avoir compris la notion de bijection pour compter correctement. Mais en fait, comme l'ont montré Mierkiewicz et Siegler (cf. MIERKIEWICZ 1980), l'enfant peut ne connaître que des règles d'éxécution de la procédure standard de comptage, et non pas nécessairement les principes généraux correspondants. De plus, il faut distinguer une bijection purement perceptive (par exemple optique) de la notion logique de bijection.

α) Dedekind écrivait: "Si l'on suit exactement ce que nous faisons en comptant l'ensemble ou le nombre d'objets, on est nécessairement amené à la notion de correspondance ou d'application" (cf. DEDEKIND 1872). Gréco, pour sa part, remarque, à propos de la correspondance: "Sans doute est-elle déjà implicite à la simple mise en oeuvre du dénombrement verbal" (cf. GRECO 1962a). On peut alors penser que les nombreux comptages qu'un enfant effectue ne peuvent que favoriser la construction de la notion de correspondance terme à terme. Ginsburg (cf. GINSBURG 1977) va même plus loin. Il écrit: "La pratique du comptage semble nécessaire au développement de stratégies effectives pour considérer les choses 1 et 1 seule fois et pour parfaire la correspondance un à un".

β) D'ailleurs, l'une des très rares enfants ayant, dans notre expérience, éprouvé des difficultés électivement dans le domaine du comptage-pointage (voir Annexe 6), illustre très bien un tel point de vue. En effet, à 5;6, alors qu'elle avait déjà un bon niveau à un test d'inclusion (voir Annexe 7), elle échouait encore par contre à un test de correspondance terme à terme. De manière précise, devant 2 collections, l'une de 7 perles bleues, l'autre de 6 perles rouges, disposées comme suit:

• • • • • • • (← bleues)
• • • • • • (← rouges)

elle répond que c'est "pareil", "parce qu'il y a une rouge en face d'une bleue chaque fois".
L'expérimentateur lui demande alors de montrer pour chacune des perles celle qui est en face: elle le fait systématiquement, la perle rouge étant de plus en plus décalée vers la droite, et arrive donc ainsi à l'avant-dernière bleue à laquelle elle fait correspondre la dernière rouge; et puis, sans nullement être troublée par ce fait, elle fait correspondre à la dernière bleue la dernière rouge (qui est juste en face, mais qu'elle venait de faire correspondre avec l'avant-dernière bleue), et ne rectifie évidemment pas son jugement initial.

γ) Une vérification plus statistique du fait qu'un enfant qui ne sait pas compter n, ne sait pas non plus, ou au moins ne pense pas à, bijecter n (= faire une bijection entre 2 collections de n objets chacune), peut être faite pour n=6 à partir du tableau 18, page 150 de PERRET-CLERMONT 1979.
En effet, en considérant les 64 enfants (entre 4;0 et 7;0, la moyenne d'âge de l'ensemble des 140 enfants est de 5;6: celle des non-conservants doit être inférieure) non-conservants, on peut construire le tableau suivant (précisons qu'il s'agit d'une épreuve classique de conservation avec en plus vérification si l'enfant sait compter):

n'a pas bijecté	ne sait pas compter		
	oui	non	
oui	16	14	30
non	2	32	34
	18	46	64

la quasi -implication
(ne sait pas compter n) $\underset{q}{\Longrightarrow}$
(n'a pas bijecté n)
est admissible (ii = -2,45)

Même si (n'a pas bijecté) ne signifie pas (ne sait pas bijecter), il n'en demeure pas moins que seulement 2 des 18 non-conservants qui ne savent pas compter ont bijecté, les 16 autres ayant procédé par perception globale (des collections).

δ) Notre point de vue rejoint celui de Klahr et Wallace (cf. KLAHR 1976) qui soutiennent que la correspondance un à un apparaît relativement tardivement dans le développement et dépend de l'existence préalable de procédures de comparaison quantitative basées sur les opérateurs de quantification (= subitizing, comptage et estimation). Pour ce faire, Klahr et Wallace s'appuient, entre autres, sur une étude de Renwick (cf. RENWICK 1963) qui cite des exemples de réponses de jeunes enfants indiquant que l'établissement d'une correspondance un à un n'est pas d'abord regardée comme donnant une information valable sur le nombre relatif d'objets dans 2 collections, et qui soutient que c'est seulement quand l'acte d'appariement est connecté avec l'opération de comptage que sa signification numérique est appréciée et est acceptée comme une alternative valable au comptage comme source de comparaison de l'information numérique.
Notons également que ce point de vue est en accord avec un résultat expérimental de Russac (cf. RUSSAC 1978). Celui-ci a en effet vérifié que si l'on exige des correspondances "collinéaires" (même ligne et pas de superposition), pour éviter les solutions perceptives, alors construire une collection équivalente à une autre (une dizaine d'objets) est significativement plus facile par comptage que par correspondance terme à terme pour des enfants en fin de maternelle, 1ère et 2e années de l'école élémentaire.

c) La notion de nombre

Le rôle essentiel que pourrait avoir le comptage dans la construction du nombre a récemment été souligné par Lifschitz et Langford (cf. LIFSCHITZ 1977) : après avoir montré la possibilité d'induire, à partir de 4 ans, chez des enfants non-conservants des jugements stables de conservation des nombres et des liquides par le comptage et la mesure, ces chercheurs avancent au vu des acquisitions importantes observées et qui progressent encore plus de trois mois après l'apprentissage, que la synthèse de la série et de la classe, dont Piaget fait l'hypothèse qu'elle construit le nombre, s'opère à travers la médiation fonctionnelle du comptage et de la mesure.
Encore plus récemment, les travaux de l'équipe américaine de Georgie* (cf. GLASERSFELD 1981, STEFFE 1981, RICHARDS 1980 et 1981, + communications orales au congrès PME de Grenoble) mettent en évidence "le fait que pour l'enfant, compter est au coeur même de sa conception du nombre", le lien entre le comptage et le nombre étant l'opération d'unitisation (= concevoir plusieurs unités comme un tout) appelée intégration (= prendre une suite d'actes de comptage comme un tout, une unité abstraite) et présentée comme le résultat d'une abstraction réfléchie. Cette importance du comptage est soulignée aussi bien par:

- von Glasersfeld lorsqu'il dit que leur groupe a acquis la conviction que le passage de la pluralité (ex: des tasses) au nombre (ex: 3 tasses) n'est possible que grâce au comptage;
- Richards lorsqu'il caractérise les comportements numériques par:
  . La conservation : un ensemble d'objets une fois compté n'est plus recompté si les objets sont déplacés;
  . L'intégration: une suite d'actes de comptage est prise, potentiellement ou effectivement, comme une unité;
  . Le double-comptage: par exemple 5 + . = 11 est trouvé par 6, c'est 1, 7 c'est 2,...

ou lorsqu'il distingue, toujours exclusivement par référence au comptage, 3 étapes dans la construction du nombre:
  . La récitation de la suite des nombres-mots;

---
* L'équipe comprend Steffe, von Glasersfeld, Richards, Coob et Thompson. Elle travaille sur le projet Interdisciplinary Research on Number.

. Le comptage, défini comme une production de nombres-mots telle que chaque nombre-mot est accompagné par la production d'un objet-unité;

. Le nombre lui-même: un nombre particulier est produit par un double acte d'abstraction; la première abstraction conduit l'enfant à prendre un objet comme une unité, la seconde à prendre une multitude d'unités comme une unité.

- Steffe lorsqu'il distingue en termes de comptage, 4 concepts de position dans la suite des nombres, suivant que la position est basée sur:

  . Le comptage avant;

  . Le comptage bidirectionnel: Steffe pense voir dans la réversibilité de la direction du comptage une similarité avec la notion piagétienne d'inversion par réciprocité (cf. PIAGET 1961 b);

  . La déclinaison numérique: c'est l'intégration tacite d'actes de comptages arrière implicites;

  . La réversibilité des extension (= intégration tacite d'actes de comptage avant implicites) et déclinaison numériques.

3) <u>Il favorise les interactions sociales</u>

Il résulte des travaux de Montagner (cf. MONTAGNER 1974) que l'acquisition d'une gestualité, signifiante, semble revêtir une grande importance dans la formation et le développement des relations sociales du jeune enfant. Or, le comptage-pointage pourrait bien être (la partie pointage du moins) une telle gestualité et devrait alors remplir les fonctions des actes ritualisés: établissement et renforcement des liens interindividuels, communication non ambigüe, canalisation de l'agression. On ne peut donc plus guère, aujourd'hui, ne s'intéresser qu'aux développements moteur et linguistique, et à la mécanique de la coordination entre les deux, qui sont en jeu dans l'apprentissage du comptage-pointage. Il faut aussi voir ce dernier sous son aspect de schème signifiant (acte ritualisé) qui permet au jeune enfant d'être accepté et intégré dans un milieu d'enfants à gestualité signifiante. Et les travaux d'A-N. Perret-Clermont (cf. PERRET-CLERMONT 1979) confirment l'importance du comptage au cours des interactions sociales entre enfants: c'est ce langage commun

qui permet souvent à des sujets non-conservants d'entrer en matière avec un camarade de niveau supérieur et ainsi d'éventuellement progresser sur le plan opératoire.
N'oublions pas non plus que, pour les enfants en difficulté, le comptage et les pratiques à base de comptage, sont souvent les seules occasions de manifester certaines compétences, et peuvent de ce fait, avoir d'heureuses répercussions. En témoigne cette description du comportement de Stacy, une enfant "troublée" de 3e année d'école, rapportée dans GINSBURG 1977: "Quand l'expérimentateur réussit à découvrir certaines compétences (= essentiellement des compétences dans le domaine du comptage) de Stacy, et les lui fit utiliser, sa manière entière changea: elle sembla plus alerte, plus vivante, et avait certaines étincelles. Stacy semblait prendre plaisir à se voir une enfant capable"; ou cette analyse que fait Bettelheim, dans BETTELHEIM 1967, du cas de Marcia, mutique et autistique, qui, à presque 11 ans, ignorait tout du langage organisé:

> "Comme d'autres enfants souffrant de semblables difficultés, Marcia semblait avoir moins de difficultés pour apprendre les nombres et les concepts numériques que pour comprendre des phrases ou des pensées. Dès qu'elle eut saisi les concepts de plus grand et de plus petit, elle apprit assez facilement à compter et à manipuler des concepts numériques simples. La raison en est peut-être que, pour ces enfants, les nombres et le fait de s'en servir, ne semblent pas impliquer un engagement de leur part. Dire une phrase signifie exactement cela: dire quelque chose. Et dire quelque chose, c'est agir. Cela implique un engagement vis-à- vis du monde et de soi-même : on affirme ou on nie. Compter ou ne pas compter des objets apparaît bien moins comme un engagement personnel. C'est pourquoi ces enfants semblent plus avides d'apprendre des choses abstraites comme les nombres. D'une certaine façon, compter est pour eux comme la participation à un jeu, et la plupart des premiers jeux de société auxquels jouent les enfants ne sont, après tout, que de simples jeux de nombres".

Soulignons enfin, dans ce paragraphe sur les interactions sociales, que le comptage remplit souvent une fonction de preuve. Pour illustrer cette dernière, nous pouvons citer un exemple, joli et convaincant, rapporté par Gelman : dans une expérience de GELMAN 1972, une ligne de 5 souris-jouets vertes était le gagnant, et une autre de 3 le perdant. L'une des enfants

S.M. (3;6), quelque peu exaspérée par le fait que l'expérimentateur lui demandait pour la 3e fois de justifier que la ligne de 5 était le gagnant, fit compter l'expérimentateur (pour qu'il soit, une fois pour toutes, convaincu qu'il y en a 5): "Eh bien, elle (= la ligne) a 5 souris. Compte (pause). Un (pause). Dis un !" - Un - "Maintenant dis deux" - Deux - "Dis trois" - Trois - "Dis quatre" - Quatre - "Dis cinq" - Cinq - "Tu vois, cinq souris" !

D) Ses origines

"L'obscurité de la source n'empêche pas le fleuve de couler"

H. Poincaré.

1) Origine de son association avec le pointage de l'index

Alors que les sujets de notre expérience peuvent , lors de l'épreuve de dénomination, utiliser une méthode sûre, par exemple sortir les jetons de la boîte au fur et à mesure qu'ils ont été comptés, pour distinguer les jetons comptés de ceux qui ne le sont pas encore, peu d'entre eux le font. Beaucoup préfèrent compter-pointer du doigt, de l'index plus précisément. Et la plupart de ceux qui n'ont pas compté de cette manière ont montré, au cours de l'épreuve de comptage-pointage, qu'ils savaient néanmoins le faire: ils comptaient donc probablement de cette façon à un stade antérieur. D'où vient cette association privilégiée du comptage avec le pointage de l'index ? Elle pourrait être favorisée par l'universalité et la précocité (voir le A,1) du pointage, avec l'index et sans comptage, pointage dont il est intéressant d'examiner ici l'ontogénèse:
Pour le tout premier de ces pointages, citons une jolie description faite par Shinn (cf. SHINN 1900), d'une enfant, au cours du 9e mois:
"Le pouvoir de communication a été considérablement accru ce mois-ci par l'acquisition d'un signe excessivement utile. Le chemin de son développement est un exemple intéressant de l'évolution de tels signes. D'abord, le bébé commença à utiliser l'extrémité de son index pour des explorations très proches; à la même période, elle avait l'habitude d'étendre sa main vers un objet qui l'intéressait - par association, sans doute, avec les mouvements de toucher et de saisie. En combinant ces deux habitudes, elle commença à garder son index séparé des autres doigts quand elle lançait ainsi sa main vers un objet intéressant; puis, durant la deuxième semaine du mois, elle dirigeait ce doigt seul vers ce qui l'intéressait; et la 3e semaine, le geste de pointer était absolument en usage... Elle pointait, au lieu de simplement regarder, en

réponse aux questions: "Où est papa ?" "Où est Muzhik ?" "
Mais à ses débuts, le pointage n'est pas encore accompagné de vocalisation: par exemple, Murphy (cf. MURPHY 1978) qui a observé des enfants de 9, 14, 20 et 24 mois (8 chaque fois), regardant des livres d'images assis sur les genoux de leur maman, n'a noté aucune vocalisation accompagnant les pointages des 4 enfants de 9 mois qui pointaient déjà. De telles vocalisations n'apparaissent qu'au 14e mois, visiblement encouragées par les mamans qui, dès qu'elles pensent que leur enfant est capable d'en faire autant, i.e. vers 14 mois, nomment elles-mêmes davantage (qu'à 9 ou 20 mois) les images qu'elles pointent. Enfin, en vue du comptage, l'enfant doit aussi apprendre à pointer une collection, c'est-à-dire pointer 1 et 1 seule fois tous les objets de la collection. Potter et Lévy (cf. POTTER 1968) ont observé un tel pointage, sans comptage ni accompagnement verbal, sur 58 enfants de 2;7 à 4;3. Leur observation montre que la difficulté de ce pointage croît avec le nombre d'objets: par exemple, pour 3 (resp. 4,5,6 et 9) objets, elles ont enregistré 6 (resp. 7,20,30 et 59) % de pointages erronés. Elle montre aussi que l'arrangement (disposition) des objets a un effet considérable sur l'exactitude du pointage.
Pour terminer, et parce que nous avons souligné l'influence de l'environnement (= les mamans dans l'expérience de Murphy) dans cette genèse du pointage, soulignons aussi que l'enfant ne se contente pas de copier les stratégies de l'adulte (ou d'un aîné) dans son apprentissage du pointage, mais semble au contraire les élaborer lui-même, avec ses moyens propres. Ainsi Potter et Lévy (cf. POTTER 1968 et ci-dessus) ont noté une préférence de l'enfant à débuter son pointage à un bout inférieur de rangée, le coin droit (resp. gauche) étant presque toujours choisi par ceux qui utilisent la main droite (resp. gauche), alors que dans un groupe d'adultes confrontés à la même tâche, tous ont suivi un ordre de toucher correspondant à l'ordre conventionnel de lecture, c'est-à-dire commençant par le coin gauche supérieur. Ainsi aussi et surtout Shannon (cf. SHANNON 1978) a trouvé que pour compter-pointer 10 objets dans les 2 configurations suivantes :

les enfants de 3 ans utilisaient plutôt des stratégies de proche en proche (un jeton une fois pointé, l'enfant choisit le suivant en fonction de sa proximité), ceux de 4 et 5 ans, des stratégies périphériques (l'enfant contourne extérieurement la collection puis pointe les jetons à l'intérieur) et ceux de 6 ans des stratégies linéaires (l'enfant pointe en colonne en montant et descendant , en ligne en avant et en arrière ou systématiquement de gauche à droite). De plus Shannon signale que la stratégie périphérique n'est guère utilisée ni par les enfants de 2 ans qu'elle a interrogés informellement, ni par les enfants de 8 ans interrogés dans l'expérience de Beckwith et Restle (cf. BECKWITH 1966). Elle interprète cette évolution des stratégies par les faits que:

- l'enfant de 2-3 ans ne "subitise" pas plus de 2 ou 3 objets;
- l'enfant un peu plus âgé perçoit davantage l'ensemble;
- l'enfant de 6 ans ou plus est influencé par la lecture.

<u>Conclusion</u> : Le comptage semble donc, tout naturellement, prolonger le - et être associé au pointage (de l'index principalement). D'ailleurs, Wang et al. (cf. WANG 1971) ont constaté, sur une population de 78 enfants de 4;6 à 6;0 et dans une épreuve de comptage d'objets déplaçables, que la plupart des enfants ne profitaient pas de la possibilité d'enlever les objets déjà comptés. Ils commentent:

"En l'absence d'instruction explicite, le comptage n'est pas nécessairement appris comme un processus consistant à enlever successivement les objets (comptés) de l'ensemble".

Ceci est compatible avec notre point de vue que le comptage-pointage est la méthode naturelle et primitive de comptage. Mais, bien entendu, nous ne pensons pas que l'enfant pointe en comptant simplement parce qu'il sait déjà pointer avant de compter ! Le pointage a vraisemblablement des fonctions importantes: il peut, par exemple, permettre à l'enfant de s'appuyer sur des mémoires de position kinesthésique et visuelle, pour "retenir" les objets déjà comptés. De plus, soulignons que si le pointage est déjà bien automatisé avant le comptage, son intégration à ce dernier s'en trouve facilitée.

2) <u>Digression sur son innéité partielle</u>

Comme pourrait l'illustrer l'ontogénèse du pointage décrite ci-dessus et comme le soutient en tout cas Morin (cf. MORIN 1973), certaines structures innées ne peuvent s'opérationnaliser qu'à partir de l' éducation socioculturelle, et que dans un milieu social complexifié par la culture. Mais si la contribution de la culture est évidente dans le cas du comptage, ne serait-ce que par la transmission de la suite conventionnelle des nombres-mots, on voit en revanche plus difficilement ce qui pourrait être inné (et comment cela pourrait se transmettre). Et c'est cela qu'il importerait de préciser, car dire que quelque chose est inné, par exemple dans le fonctionnement, tout le monde en convient, même le constructiviste J. Piaget (cf. PIAGET 1968b et 1979)*.

A défaut de pouvoir apporter de telles précisions, soulignons néanmoins quelques faits, vérifiables ou vérifiés,

- la précocité et la quasi-universalité du comptage;
- l'existence de suites idiosyncrasiques chez les jeunes enfants, suites dans lesquelles Gelman voit une productivité mathématique par analogie avec la notion chomskienne de productivité linguistique;
- la capacité des jeunes ou très jeunes enfants à distinguer numériquement 2 collections suffisamment petites, capacité qui a conduit Binet (cf. BINET 1890)à parler de numération instinctive, Bower (cf. BOWER 1976) à affirmer une capacité primitive à compter, Starkey et Cooper (cf. STARKEY 1980) à suggérer l'existence de précurseurs du comptage verbal chez les enfants de 6 mois (qui distinguent entre elles, indépendamment de leurs longueurs, des lignes de 2 et 3 points) et d'un processus d'énumération perceptive chez ceux de 2 ans;
- la capacité (cf. KOEHLER 1941) qu'ont les oiseaux d'apprendre à reconnaître (non figuralement et non rythmiquement) jusqu'à 6 objets, capacité qui pourrait laisser croire qu'ils s'appuient sur une mélodie interne d'accents qualitativement différents et bien ordonnés (= le remplaçant de notre suite de nombres-mots),

et thèses, qui le sont peut-être un peu moins,

- la thèse lorenzienne qui cherche à expliquer les comportements par des évolutions phylogénétiques, thèse qui pourrait laisser croire que l'acte de compter est issu de sortes d'actes individuels fréquemment répétés par nos ascendants et par suite généraux;
- la thèse jungienne selon laquelle le nombre est un "archétype de l'ordre devenu conscient" (cf. FRANZ 1971), thèse qui pourrait faire voir dans le comptage un instinct dont le nombre serait l'archétype transcendental qui en détermine la forme et la fin,

---

* Pour montrer qu'il ne refuse pas de voir quelque chose d'inné dans le fonctionnement, Piaget souligne (cf. PIAGET 1979, un débat oral,il est vrai!) qu' "on n'a jamais réussi à faire un homme intelligent d'un imbécile".

qui peuvent laisser croire que l'acte de compter-pointer s'appuie sur des structures innées.

Mais soulignons aussi, qu'aux faits ci-dessus recensés, on peut objecter précisément

- que la précocité peut être le résultat d'un apprentissage précoce, et que l'universalité d'un comportement ne permet pas, dans le cas des êtres humains, d'inférer un déterminisme génétique de l'aptitude à apprendre ce comportement (cf. LANGANEY 1979);
- que les suites idiosyncrasiques stables * que nous avons observées sont rares et ne traduisent pas nécessairement une activité créatrice de l'enfant: lorsqu'un enfant compte "1,2,3,4,6" a-t-il créé sa propre suite ou oublie-t-il systématiquement le 5 dans la suite conventionnelle ?
- que dans un jugement de comparaison numérique la nécessité de passer par une sorte de comptage, ou même plus généralement par un code absolu pour chacune des 2 collections, n'est pas évidente;
- que Koehler écarte clairement l'hypothèse que l'oiseau compte: il soutient seulement que les oiseaux ont 2 facultés de base, facultés qui sont aussi impliquées dans le comptage humain et qui, avec d'autres, ont conduit à ce dernier,

et, plus généralement, que l'homme , dès qu'il en a eu le pouvoir, a donné une réponse culturelle, et non pas génétique comme d'autres espèces, aux contraintes venant du milieu extérieur (cf. JACQUARD 1978).

---

* La plus "importante" que nous ayons observée semble celle de Stéphane (3;11): "1,2,5,6,8,9,10,11".

CHAPITRE XI: Analyse historico-critique de la didactique du comptage

"Mettons-nous suffisamment l'accent sur le comptage dans notre curriculum ?"

H. Ginsburg, 1977.

XI.- Analyse historico-critique de la didactique du comptage

A) L'avant 1940 (en Allemagne)

"Compter et toujours encore compter, c'est ce qui fait progresser les enfants"

A. Gerlach, 1914.

Introduction

Pour les visuels, partisans d'un nombre-percept, le nombre est une forme perceptive inséparable d'une manière de conquérir l'environnement par des voies perceptives. Leur précurseur pourrait être le grand pédagogue suisse (cf. PESTALOZZI 1801), H. Pestalozzi, qui a introduit les tables d'unités (voir Annexe 11) destinées à visualiser les nombres, et construit toute l'arithmétique élémentaire à partir de ces tables. A sa suite, et durant tout le XIXe siècle et même au début du XXe siècle, les visuels recherchèrent les meilleures visualisations des nombres. En fait, deux problèmes non-indépendants se posent :

(α)Le choix des objets: objets homogènes ou non, objets réels ou dessins, traits ou points, ... ?

(β)Pour un choix d'objets précis, quelle est la meilleure disposition ?

En réponse à ces questions Lay (cf. LAY 1898) a vérifié expérimentalement que:

(α') les constellations quadratiques (= Lay:voir Annexe 11) sont mieux identifiées que les traits, les doigts, les boules de la machine russe,...

(β') parmi les constellations, dont les premières ont été introduites à la fin du XVIIIe siècle par le philanthrope Busse, beaucoup d'autres ayant été "inventées" par la suite (voir Annexe 11), ce sont aussi les constellations quadratiques qui sont le plus facilement identifiées par les enfants (on trouvera un tableau des résultats comparatifs de Lay en annexe 11).

Mais les compteurs défendent fermement leur point de vue. Henck (cf. HENCK 1928) par exemple, écrit:

"Employer les constellations comme point de départ et d'exercice unique, nous le laissons à ceux qui croient encore à une appréhension simultanée de telles images. Nous arriverons peut-être un jour à rendre compte, à la loupe, des processus mentaux; je suis convaincu qu'une telle démonstration prouvera la véracité de mon affirmation que même l'apparente appréhension simultanée de 4 est apprise."

La bataille entre visuels et compteurs est importante car ce n'est évidemment pas seulement l'identification des premiers nombres qui est en jeu, mais toute l'arithmétique élémentaire: il en résulte certaines positions extrêmes, chez

les compteurs principalement, dont nous avons déjà donné un aperçu dans le chapitre précédent.
Mais la psychologie essaie de montrer assez vite qu'il est vain de vouloir trancher nettement *. Citons K. Bühler : "Ni le développement naturel des fonctions du nombre chez l'enfant, ni l'analyse du calcul mental chez l'adulte ne justifient une démarche suivant exclusivement l'une des deux méthodes (perceptive ou par comptage). Bien mieux, on reconnaît clairement qu'il existe au moins 2 racines indépendantes du concept de nombre, à savoir la conception de groupe et l'activité de sériation" (cf. BUEHLER 1936).
Notons enfin que dès 1929, J. Wittman semble annoncer, en Allemagne, l'ère piagétienne puisqu'il pense (rapporté dans ODENBACH 1965) qu'à l'entrée de l'école le concept de nombre n'est pas encore acquis (même pas jusqu'à 4) et souligne tout ce que suppose la compréhension du nombre cardinal; il semble même annoncer la réforme de 1970 puisqu'il affirme (rapporté dans LAUX 1969) que le nombre ordinal ne peut se développer qu'à partir du nombre cardinal !

1) Les comptines

Elles sont surtout utilisées pour mémoriser la suite des nombres-mots, dans l'ordre croissant ou décroissant, les groupes de nombres-mots et même les sommes, différences, ou produits élémentaires. Exemples:

α) 1, 2 - Polizei (= police)
3, 4 - Offizier (= officier)
5, 6 - alte Hex (= vieille sorcière)
7, 8 - gute Nacht (= bonne nuit)
9, 10 - laßt uns gehen (= laissez-nous)

(réf. HENCK 1928)

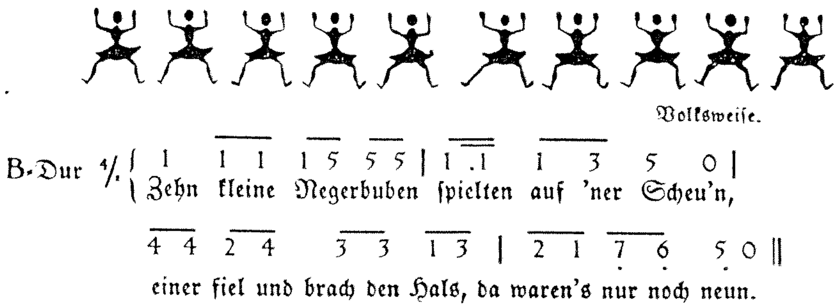
β) 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,
Die Soldaten gingen auf Danzig
(= les soldats sont allés sur Danzig)
Danzig fing an zu brennen
(Danzig commença à brûler)
Die Soldaten an zu rennen;
(= les soldats à courir)

*La didactique influencée par le nazisme a pris nettement position en faveur des visuels (voir par exemple TIETJEN 1936).

γ) Ohne Strümpf und ohne Schuh
(= Sans chaussettes et sans chaussures)
Liefen sie nach Frankreich zu.
(= ils coururent vers la France).
(réf. KEMPINSKY 1911)

δ) Dix négrillons

Zehn kleine Negerbuben.



10 petits garçons-nègres jouaient dans une grange,
un tomba et se rompit le cou, ils n'étaient plus que 9.
9 petits nègres allèrent à la chasse,
un se tira à travers la tête, ils n'étaient plus que 8.
8 petits nègres ne savaient rien du vol,
un vola et fut pendu, ils n'étaient plus que 7.
7 petits nègres taquinèrent un troupeau,
un d'entre eux fut happé, ils n'étaient plus que 6.
6 petits nègres marchèrent sans chaussettes,
un mourut d'une catarrhe, ils n'étaient plus que 5.
5 petits nègres étaient un jour assis autour d'une bière,
un but trop et éclata, ils n'étaient plus que 4.
4 petits nègres firent cuire une bouillie,
un mangea trop et mourut, ils n'étaient plus que 3.
3 petits nègres voyagèrent en Turquie,
un fut frappé par un coup de soleil, ils n'étaient plus que 2.
2 petits garçons-nègres commencèrent à pleurer,
un pleura à en mourir, il n'en resta plus qu'un.
1 petit garçon-nègre s'installa,
prit femme et éleva 10 petits garçons-nègres.
(réf. HENCK 1928)

2) Le cours de comptage de H.Knoche (cf. KNOCHE 1908)

Pour Knoche, le comptage et ses conclusions sont le mortier de toute construction intellectuelle. Il condamne l'étude monographique de Grube (milieu du 19 e siècle) et souhaite que l'on compte d'abord jusqu'à 10, le calcul ne venant qu'après. De manière précise, il propose, dans l'intervalle 1-10, la progression suivante:

a) l'appréhension des nombres de 1 à 10, par comptage, sans intermédiaires du type 3+2, 4+3,...

Ce premier but est atteint quand les enfants savent:
- réciter la suite des nombres de 1 à 10 et 10 à 1;
- compter 10 objets dans un tas plus important;
- démarrer un comptage ascendant ou descendant à partir de n'importe quel nombre de l'intervalle 1-10;
- dire 1 de plus (resp. de moins) qu'un nombre donné;
- etc...

b) le comptage en proposition. Exemples:

1+1 = 2 , 2+1 = 3, 3+1 = 4, etc...

10-1 = 9, 9-1 = 8, 8-1 = 7, etc...

1+1 = 2 , 1-1 = 0, 2+1 = 3, 2-1 = 1, etc...

c) l'addition (resp. soustraction) par surcomptage (resp. décomptage)

α) surcompter (resp. décompter) 2 ou 3 et conclure:

Exemple: $\left.\begin{array}{r} 5+1+1 = 7 \\ 1+1 = 2 \end{array}\right\} \longrightarrow 5+2 = 7$

β) surcompter (resp. décompter) 3 ou 4, rechercher des compléments ou des différences de 3 ou 4, en décomposant 3 (resp. 4) sous la forme 2+1 (resp. 2+2). En plus: 5+5 et 10-5.

d) découverte de certaines propriétés :

α) permutation des termes de la somme: 2+3 = 3+2

β) rapport entre 5+3 = 8, 3+5 = 8, 8-3 = 5 et 8-5 = 3.

3) Les 32 variantes de comptage de J.Kühnel (cf. KUEHNEL 1922)

Pour Kühnel, la suite des nombres se construit par le comptage, et seulement par le comptage; et le comptage ne s'apprend que par le comptage: il faut donc seulement compter et toujours seulement compter. Aussi propose-t-il la progression suivante:

- le comptage simple durant la première moitié de l'année (d'entrée à l'école élémentaire), aussi loin qu'arrivent les enfants;
- puis les premières additions et soustractions par comptage;
- enfin, pour le dernier quart de l'année, le comptage rythmé.

Après avoir distingué entre compter les éléments d'un ensemble (aufzählen) et compter x éléments de cet ensemble (abzählen), Kühnel précise 32=8x4 variantes * de comptage, suivant la forme (compter en déplaçant les objets, en pointant, ..) du comptage et la nature (objets réels, symboles,...) des objets. Il souligne aussi que, dans les calculs, le problème du passage de la dizaine ne se pose pas. Par exemple, si l'enfant mange 3 pommes prises dans 41, il dira: Je mange les 41., 40. et 39., il reste 38 .

4) Les recommandations de Kempinsky (cf. KEMPINSKY 1911)

a) Les étapes du comptage de l'enfant : Kempinsky distingue 3 étapes :

- début (2e année): "1, encore 1, encore 1, etc...
- ensuite: "1, 2, 3, 4, 7, 100, 1000";
- enfin: découverte du rôle particulier du dernier nombre-mot.

b) Le comptage abstrait : Kempinsky indique quelques comptines rimées et pense qu'il n'est pas dommageable que les enfants plus âgés entraînent les débutants à réciter la suite des nombres-mots jusqu'à 20 ou 30, ou même 100, bien avant de débuter l'étude de ces nombres.

c) Les recommandations de Kempinsky pour le comptage concret :

α) compter des objets de même nature: l'enfant doit être intéressé par l'ensemble des objets à compter.

β) motiver l'enfant, par exemple en écrivant une lettre à un oncle ou une tante, lettre dans laquelle l'enfant dessine l'école et la décrit (nombre de fenêtres,...)

γ) compter sans nommer les objets. A ce sujet, Kempinsky cite Wundt : "Le comptage au sens le plus large du mot résulte de la mise en relation d'actes de pensée consécutifs, quand nous faisons complètement abstraction du contenu de ces derniers".

δ) compter autour d'un "centre d'intérêt" et non pas "compter les baguettes !"

---

* l'une de ces variantes, "pour adultes", consiste par exemple à compter le nombre de litres que l'on met dans un seau à l'aide d'un récipient de 1/2 litre.

"Qu'y a-t-il 5 fois dans la salle" ? "Compter combien de fois je frappe sur la table"! etc...

ε) faire beaucoup dessiner les enfants car comme les jeunes enfants dessinent surtout de mémoire (et non pas ce qu'ils voient directement), ils sont obligés de compter au préalable.

d) Ce que l'on peut compter : Kempinsky consacre 19 paragraphes à ce qui peut être compté (les pas de l'enfant, les doigts, ...) et un chapitre spécial au surcomptage en vue de l'addition.

5) Le comptage rythmé de A. Gerlach

L'importance du comptage: "Compter et toujours encore compter, c'est ce qui fait progresser les enfants", et le fait que: "Surcompter et décompter sont les procédures de base. Toutes les autres peuvent s'y ramener..." (cf. GERLACH 1914) conduit les didacticiens allemands à accorder une place de choix au comptage rythmé préparant le surcomptage et le décomptage (aussi la multiplication). Exemple (pour 3):

$\breve{1}$ $\breve{2}$ $\bar{3}$, $\breve{4}$ $\breve{5}$ $\bar{6}$, $\breve{7}$ $\breve{8}$ $\bar{9}$, ... $\breve{2}$ $\breve{3}$ $\bar{4}$, $\breve{5}$ $\breve{6}$ $\bar{7}$, $\breve{8}$ $\breve{9}$ $\overline{10}$, ...

$\breve{3}$ $\breve{4}$ $\bar{5}$, $\breve{6}$ $\breve{7}$ $\bar{8}$, $\breve{9}$ $\breve{10}$ $\overline{11}$, $\breve{12}$ $\breve{13}$ $\overline{14}$, ...

Un tel comptage rythmé est destiné à développer la sensation de groupe. Il peut être favorisé par un accompagnement visuel mettant en évidence le nombre-mot dont l'intonation doit être accentuée, par exemple :

.	.	.	$\breve{1}$	$\breve{2}$	$\bar{3}$
.	.	.	$\breve{4}$	$\breve{5}$	$\bar{6}$
.	.	.	$\breve{7}$	$\breve{8}$	$\bar{9}$, ...

Pour additionner 3 à 6 par exemple, l'enfant doit alors surcompter un groupe de 3 à 6 :

6 + 3, nous avons 6, 7, 8, 9, 6 + 3 = 9.

Pour dire combien 9 c'est de plus que 6, il dira:

6 est le petit nombre, 9 c'est 7, 8, 9 de plus, et 7, 8, 9, ce sont 3 (par perception du rythme 3).

Pour décompter : 9-3; 9, 8, 7 d'enlevés, alors, il reste 6.

Gerlach (cf. GERLACH 1908 et 1914) ayant ainsi présenté le comptage rythmé souligne d'autres possibilités, par exemple pour 4+3, on peut calculer 4+1 = 5, 5+1 = 6, 6+1 =7 ou encore 4+1 = 5, 4+2 = 6, 4+3 = 7, mais préfère le comptage rythmé car "le rythme c'est le mouvement, la vie", et "le calcul, c'est du mouvement, rien que du mouvement". Il suggère en conséquence d'accompagner le comptage rythmé par des hochements de la tête, des frappés de la main sur la table, ...

B) L'ère piagétienne

> " Il n'est donc pas exagéré de dire que ce facteur verbal (= la numération parlée) ne joue guère de rôle dans le progrès même de la correspondance et de l'équivalence".
>
> J.Piaget, A. Szeminska, 1941.

1) Le comptage et les premiers nombres

a) Introduction

PIAGET 1949b, que nous allons citer partiellement et discuter dans ce paragraphe, est le texte d'un exposé fait par Piaget au congrès des institutrices et inspectrices de maternelles (Lyon, 1949). Il est donc bon de le resituer dans le contexte didactique français de l'époque. Les visuels avaient fait une percée importante avec l'article de l'inspecteur général F.Pécaut, dans la Revue Pédagogique d'octobre 1921, article dans lequel il écrit :

> "L'énumération de termes successifs peut-elle donner le nombre ? Logiquement, ce serait à discuter. Mais, il y a, à ce passage, des difficultés psychologiques, qui équivalent pratiquement à l'impossibilité; un esprit qui n'aurait jamais vu du simultané dans l'espace et ne percevrait que des termes successifs, aurait beau les faire correspondre à une série de mots, il n'arriverait pas à penser leur nombre cardinal. C'est la vision simultanée qui permet la cardinalisation de la série et la met à la portée de l'enfant" (cf. PECAUT 1921).

Dans GOUMY 1933, l'auteur, qui donne une présentation paradigmatique du nombre 7, ne fait pas explicitement allusion au comptage.

Lacour (cf. LACOUR 1934) rappelle la citation de Pécaut ci-dessus et suggère l'utilisation des constellations de type quadratique (= Lay: voir Annexe 11). Mais il accorde encore un place importante au comptage, par exemple, pour l'étude de 5, il écrit:

> "Pour faire apprendre la suite naturelle des nombres, nous faisons compter autant que nécessaire tout en montrant les collections et en insistant beaucoup plus souvent sur la suite "quatre-cinq". Faisons saisir que la place des objets ne change rien au nombre; les 5 objets étant en ligne, puis en

désordre, nous comptons en commençant par une extrémité, puis par l'autre;..."
En fait, le véritable tournant semble se situer en 1945, avec les nouvelles Instructions Officielles pour le CP: non seulement le comptage (1 à 1) disparaît des programmes eux-mêmes (voir Annexe 14), mais encore et surtout dans les instructions complémentaires, il est demandé d'habituer l'enfant "à reconnaître sans énumérer, d'1 à 5 objets; d'abord sur des dispositions géométriques, puis ..."

b) Le point de vue de Piaget

Piaget prétend (cf. PIAGET 1949 b), après avoir rappelé que selon les statistiques de Mademoiselle Descoeudres, le nombre deux est acquis à deux ans, le nombre trois à trois ans, le nombre quatre à quatre ans, etc... jusqu'à six ou sept ans, où toute la suite des nombres se décroche, "que ces nombres, antérieurs au moment où l'enfant a compris l'itération de l'unité, ne sont pas encore de vrais nombres; ce sont des figures perceptives; l'enfant distinguera fort bien un ensemble de deux d'un objet unique, un ensemble de trois d'un ensemble de deux, il le distinguera à la figure perceptive, à la figure géométrique si l'on veut, ce qui peut donner lieu à des manipulations pratiques mais non pas encore opératoires. La preuve, c'est que, à ce niveau préopératoire, nous n'avons pas encore de conservation des ensembles et..."

Remarque : A propos de la distinction de 2 ensembles, on notera la prudence de Piaget qui ne "s'aventure" pas au delà de 3: si les premiers nombres se limitaient à 1, 2 et 3, la pertinence de notre commentaire serait considérablement réduite. Mais le rappel des statistiques de Mademoiselle Descoeudres ne laisse pas d'ambiguïté: les premiers nombres vont bien pour lui jusqu'à 6 ou 7. Ceci est d'ailleurs confirmé par d'autres parties de son oeuvre, par exemple PIAGET 1967, où il parle de "petits nombres" allant de 1 à 7, ou 8.

c) Une critique de ce point de vue

Il faut d'abord dire que si, comme le soutient Siegel (cf. SIEGEL 1980), les enfants (de 5 et même 4 ans) peuvent avoir une notion du cardinal qui ne dépend pas des relations spatiales, alors l'interprétation des premiers nombres comme des figures perceptives n'est pas suffisante.
Mais ce que nous voulons surtout dire, à propos de cet exposé, c'est combien la réduction des premiers nombres à des figures perceptives paraît curieuse (dans la bouche de Piaget). En effet:
α) Piaget n'ignorait pas que les enfants savent non seulement distinguer les petits

ensembles, mais les dénommer. Or il esquive ici le problème de la dénomination. Comme il a par ailleurs très bien su souligner que la dénomination "n'est pas la simple attribution d'un nom, mais l'énoncé d'une action possible" (cf. PIAGET 1946), ou encore que "la conduite verbale est une action, sans doute amenuisée et demeurant intérieure,... mais une action tout de même" (cf. PIAGET 1949a), on peut en particulier s'interroger pourquoi Piaget n'a pas cherché à préciser la nature de cette action intérieure amenuisée (dans la dénomination des nombres).

β) Piaget, par son structuralisme génétique, a su dépasser le structuralisme sans genèse (cf. PIAGET 1968a) qu'est la psychologie de la forme. Il paraît alors étonnant que Piaget se contente ici, pour les premiers nombres, d'une explication qui satisferait pleinement un gestaltiste*, d'autant que, dans PIAGET 1949a, il reprochait justement une telle négligence à la théorie de la Forme: "La théorie de la Forme néglige cependant, tant dans le domaine perceptif que dans celui de l'intelligence, la réalité du développement génétique et la construction effective qui la caractérise".

γ) Piaget s'adressait à des maîtresses de maternelle et n'ignorait donc pas la portée pédagogique de son exposé. Il faut bien alors se demander pourquoi l'auteur de la théorie opératoire de l'intelligence qu'il est, cautionnait implicitement, en réduisant les premiers nombres à des figures perceptives, par exemple des auteurs comme ceux de MORGENTHALER 1948, lorsqu'ils écrivent:

"L'expérience de beaucoup de maîtres tend à prouver en effet que dans ce domaine (= les premières connaissances en calcul) les perceptions visuelles sont d'un secours plus efficace que les manipulations effectives d'objets",

ou ceux de BRACHET 1955 qui écrivent:

"Ce n'est pas, nous semble-t-il en remuant l'un après l'autre les 4 jetons d'une collection que l'enfant forme la notion de 4 et des décompositions. Ce serait plutôt, croyons-nous, en contemplant, à bonne distance, et d'une vue d'ensemble, simultanée, la constellation de 4 objets, que l'enfant sera <u>illuminé</u> par le nombre 4, qui est 2+2 et 3+1 ... Seul l'oeil contemplant saisit la forme d'ensemble de la collection constellante par delà les unités et permet à l'esprit de l'enfant de concevoir en lui la notion numérale en dehors de toute action réelle".

---

* Wertheimer, un célèbre gestaltiste, avait fermement mis en garde contre l'ignorance par les maîtres, à leurs périls, de la perception par l'enfant de formes et de structures (rapporté dans BRYANT 1974), formes et structures (numériques) dont il soutenait la prépondérance et l'antériorité génétique par rapport aux nombres et au comptage (cf. WERTHEIMER 1912).

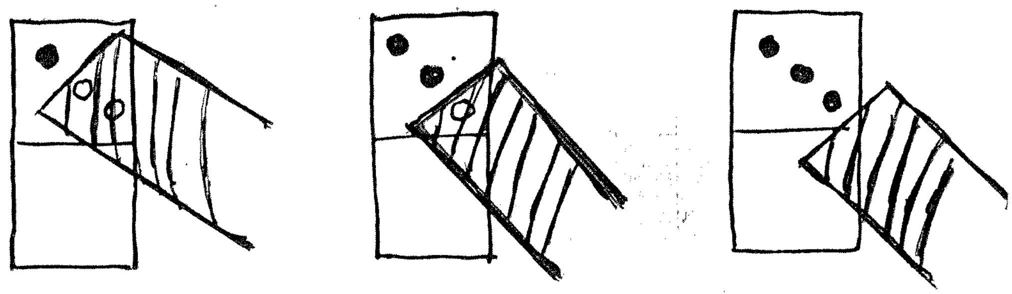
d) Conclusion

L'exposé de Piaget n'a pu que renforcer cette tendance à recourir à des "figures numériques" pour introduire les premiers nombres. Ces dernières, définies comme "des dispositifs géométriques d'unités, propres aux petits nombres" donnant à ces derniers "une physionomie particulière" qui conduit à "une perception instantanée sans qu'il soit besoin de compter" (cf. BRACHET 1955), font l'objet de recherches expérimentales:

- la forme ronde a été reconnue la meilleure, les formes longues sont les moins bonnes (inconvénient des bûchettes);
- la distance la plus convenable entre deux cercles d'un carré est un écartement qui ne doit pas être inférieur aux 3/4 du diamètre d'un cercle et pas supérieur à ce diamètre. La bonne distance entre ces deux groupes est le double de ces distances. Les couleurs vives et contrastées sont favorables à la perception et à la fixation des souvenirs.
  (rapporté dans NANTA 1979).

Les livres, pour maîtres ou élèves, suivent en général cette nouvelle orientation. Ainsi :

- dans BRANDICOURT 1955, qui cite l'exposé de Piaget, on conseille dans les premières leçons de calcul de ne s'occuper que du nombre cardinal. De plus: "Devant le domino de trois points, l'enfant ne montre pas les points un par un (avec le doigt ou la règle), mais, avec un volet de carton, il découvre à la fois, soit un, soit deux, soit trois points, suivant la demande qui lui en est faite,



  ou suivant ce qu'il énonce".
  Pour 5, on dit que "c'est aussi le nombre de points d'un quinconce, un point mis au centre d'un carré";
- dans 14 livres examinés (voir Annexe 12), la plupart présente de nombreuses dispositions géométriques pour chaque nombre. Néanmoins, l'une de ces dernières est souvent privilégiée, par exemple:
  . 5 livres privilégient des constellations construites, pour les nombres

$\geqslant$ 5, à partir du quinconce comme le suggèrent indirectement les Instructions Officielles *;

. 2 livres privilégient des constellations analogues à celles de Born;

. 2 livres privilégient des constellations analogues à celles de Lay.

2) Le comptage et la conservation

a) Introduction

Le problème de la conservation du nombre a intéressé de nombreux psychologues et didacticiens. Les premiers parce qu'ils ont considéré que la conservation du nombre marque une étape importante du développement cognitif de l'enfant. Les seconds parce qu'ils ont cru que les activités numériques de l'enfant non-conservant ne sont que savoir transmis, pratiques aveugles acquises par dressage, connaissances verbales ou imagées mais incohérentes entre elles, ...

Il en est résulté que le problème de l'accès à la conservation est lui-même devenu un problème central, l'un des aspects de ce problème étant le rôle du comptage. Précisons d'abord la position de Piaget sur ce dernier point.

Pour Piaget, la numération parlée ne joue guère de rôle dans le progrès même de la correspondance et de l'équivalence. Il illustre son point de vue par des cas d'enfants qui trouvent le même nombre d'objets pour 2 collections, mais répondent néanmoins que l'une a plus d'objets que l'autre.

> Ex: FUR (5;9), cité dans PIAGET 1941, doit comparer 7 fleurs et 7 sous, les fleurs étant plus serrées que les sous:
> Il y a la même chose ? "Non, il y a plus de sous. Il y en a un qui dépasse". - Compte les fleurs "Sept" - Et compte les sous "Un ... sept". - Alors il y a la même chose ? "Non. Il y en a qui dépassent". - On va voir (on recommence l'échange un contre un, qui réussit). - Alors c'est la même chose ? (Il se tait, évidemment ébranlé dans sa convic-

---

* A l'école maternelle, Herbinière-Lebert avait, à l'époque, introduit les constellations de type Born, mais présentées verticalement.

tion). Si on comptait les sous et les fleurs (celles-ci sont maintenant plus espacées) il faudrait compter plus longtemps ou ce serait la même chose ? "Il faudrait compter plus longtemps les fleurs".

De ce point de vue de Piaget, certains didacticiens ont déduit que le comptage de l'enfant non-conservant est inutile, voire dommageable, pour la construction du nombre et pour sa conservation. L'objet de ce paragraphe est de montrer la non-évidence d'une telle déduction, et même que le comptage favorise chez beaucoup d'enfants les premiers jugements corrects de conservation. Pour ce faire, nous nous appuierons sur les résultats de certaines expériences d'apprentissage, sur des explications et observations de jeunes ou nouveaux conservants, enfin sur le fait, mis en évidence par Gréco, que la conservation de la quotité précède la conservation de la quantité.

b) Les expériences d'apprentissage

Les premières expériences d'apprentissage de la conservation par comptage semblent plutôt avoir conduit à des conclusions négatives. Ainsi:

- Wohlwill et Love (cf. WOHLWILL 1962), qui avaient tenté un apprentissage de la conservation en faisant, en cas d'erreur, vérifier l'enfant par comptage, ont conclu à un effet négligeable d'un tel entraînement. Notons cependant que Zimiles (cf. ZIMILES 1963) critique cette expérience (période d'apprentissage trop courte) et sa conclusion, et soutient que le passage du stade 1 de conservation au stade 2 nécessite une assimilation du comptage et d'autres pratiques numériques;
- Gruen (cf. GRUEN 1965) ne trouve pas non plus d'effet significatif ($p = 0,05$): les 15 sujets (moyenne d'âge $\simeq 5;1$) ayant subi un entraînement par comptage exclusivement donnent en moyenne 1,80 réponses de conservation (6 maximum possible) au post-test, alors que ceux du groupe contrôle en donnent 0,67.

Mais des expériences plus récentes sont beaucoup plus encourageantes quant à la possibilité d'arriver à des jugements corrects de conservation grâce à un apprentissage du comptage. Ainsi:

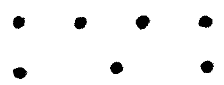
- Lifschitz et Langford (cf. LIFSCHITZ 1977) ont montré la possibilité d'induire, à partir de 4 ans, chez des enfants non-conservants, des jugements stables de conservation des quantités discontinues (nombre) et des quantités continues (liquide) par le comptage et la mesure. Ils en concluent que : "Compter et mesurer peuvent être plus importants pour le développement des concepts de conservation que l'ont cru Inhelder et Piaget. Les méthodes d'apprentissage qui n'utilisent pas ces procédures ne conduisent qu'à une acquisition temporaire ";

- Perret- Clermont (cf. PERRET-CLERMONT 1979 et SCHUBAUER-LEONI 1980) trouve qu'un apprentissage de la conservation par interaction avec d'autres enfants produit des effets positifs et qu'un tel apprentissage est possible grâce au langage commun que constitue le dénombrement ou la comptine. Elle en conclut même :"... Si donc le dénombrement, voire la "comptine", n'est pas à retenir comme critère de conservation du nombre, il semble constituer pourtant une compétence nécessaire pour que l'enfant non-conservant puisse profiter de l'interaction avec un camarade de niveau supérieur".

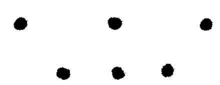
c) Les observations et explications d'enfants

Rothenberg (cf. ROTHENBERG 1969) a interrogé 210 sujets de 4;3 à 6;0 et dégagé 7 catégories d'explications. Les 3 catégories d'explications adéquates sont: la catégorie symbolique regroupant les explications qui rapportent ce qu'a fait l'expérimentateur ("Vous avez bougé ceux-là"); la catégorie nombre regroupant celles qui consistent à trouver le nombre, en particulier à compter, et la catégorie appariement regroupant celles qui consistent à apparier un (ou plusieurs) objet avec un objet de l'autre rangée. Le résultat qui nous intéresse est que sur les 200 explications des jugements (corrects) de conservation, celles de la catégorie nombre sont, à égalité avec celles de la catégorie symbolique, les plus fréquentes (51/200), alors que celles de la catégorie appariement sont 3 fois moins fréquentes; de plus, les explications des jugements de non-conservation appartiennent plus fréquemment à la catégorie symbolique (140/806) qu'à la catégorie nombre (80/806).
Cowan (cf. COWAN 1979) observe que sur 18 enfants (âge moyen: 5;6) interrogés à un test de conservation avec 15 objets, 7, sur les 12 qui ont quantifié extérieurement (l'une des 2 formes de quantification extérieure est le comptage), conservent, alors qu'un seul des 6 enfants qui n'ont pas quantifié extérieurement en fait de même. Baroody (cf. BAROODY 1979) observe que sur les 66 enfants examinés "il y a eu très peu de cas où l'expérience du comptage n'apparaissait pas jouer un rôle (essentiellement indirect) dans l'acquisition de la conservation du nombre".

Dans PERRET-CLERMONT 1979, les 2 enfants cités (Dor et Oli) par l'auteur comme exemples de grands progrès aux épreuves de conservation (à la suite d'interactions avec des camarades) donnent tous les 2, à la première question "Comment tu sais (qu'il y en a la même chose) ?" du post-test, exactement la même réponse: "Parce que j'ai compté".
Bien qu'il ne s'agisse pas d'une expérience typique de conservation, mentionnons pour terminer LAWSON 1974. Dans cette expérience, Lawson et al. ont demandé à 27 enfants de 2;10 à 5;0 de comparer les nombres et les longueurs de 2 rangées présentées dans différentes configurations, par exemple les configurations 4 ou 5 ci-dessous:



configuration 4



configuration 5

En se référant aux réponses verbales de certains enfants, les auteurs concluent que "leurs jugements étaient le résultat de comptage, même si le comptage n'était pas appliqué de manière appropriée ".
Par exemple: en réponse à la question de comparaison des longueurs des rangées de la configuration 4, un enfant a répondu: "Regarde, 1,2,3,4: celle-là est plus longue"; et à la configuration 5, après avoir jugé que les 2 rangées ont même longueur: "Je sais qu'elles ont la même longueur parce que j'ai compté, 1,2,3; 1, 2,3". Notons d'ailleurs que, dans cette expérience, sur les 18 enfants qui ont émis des jugements cohérents, 12 ont assimilé la longueur au nombre et 6 seulement le nombre à la longueur.

d) <u>La conservation de la quotité précède la conservation de la quantité</u>

Indiquons d'abord un critère précis de ce que Gréco (cf. GRECO 1962a) appelle conservation de la quotité: devant 2 collections A et B dont l'enfant a admis l'égalité, on transforme B en B' (on écarte ou empile par exemple les jetons de B). On lui demande alors de dénombrer A et, en cachant B', de dire ensuite (sans compter) combien il y a de B'.
Gréco voit dans la conservation de la quotité un produit de l'action, car compter, mettre en correspondance, c'est agir sur des réalités et en conclut que "c'est bien, si précaire qu'elle reste encore avant 7-8 ans, une notion opératoire". Il s'écarte ainsi de son maître, Piaget. Citons le pas-

sage où il le fait explicitement: "Nous n'aurons pas la sévérité de Piaget. Tout en refusant comme lui, au nombre de la quotité conservée, le label de "nombre opératoire", nous ne le vouerons pas à l'enfer des contrefaçons. Nous ne l'appellerons pas "pseudo" mais quasi-nombre: quasi veut dire "comme si". Ce n'est pas une fausse monnaie - la monnaie du verbe - c'est une monnaie qui a parfois cours: la monnaie des schèmes. Car enfin, c'est bien sur la correspondance que s'appuie la prévision de retrouver sept. Et si la correspondance forme le schématisme dont nous avons parlé, alors..."
Relevons aussi que Gréco a trouvé que 75% des 23 sujets qui sont encore au niveau II (= correspondance terme à terme méthodique) dans une épreuve de construction d'un ensemble équivalent à un ensemble donné admettent déjà l'égalité des lignes apparemment inégales si le dénombrement leur attache le même cardinal. De ce fait, joint à d'autres, Gréco ne conclut pourtant pas à une dissociation effective entre les conservations et le dénombrement instrumental et pense même, vu le parallélisme de leur évolution génétique, qu'il est "assez plausible de supposer, dans tous les cas, des mécanismes communs".
Si donc mécanismes communs il y a, nous en déduisons nous-mêmes qu'un apprentissage de l'un devrait bénéficier à l'autre, transfert que l'on expliquerait aisément par le fait que le premier engendre ou développe des schèmes (de correspondance par exemple) communs aux deux.

De manière plus générale, il a été trouvé aussi que les enfants font un usage sensé du comptage avant de conserver. Par exemple:

- Saxe (cf. SAXE 1979) au terme d'une étude avec 66 enfants de 4,5 et 6 ans conclut que "contrairement aux dires de Piaget qui considère le comptage de l'enfant pré-conservant plutôt comme un aspect d'une connaissance mécanique, les présents résultats indiquent que le comptage est l'objet d'une construction intellectuelle signifiante avant le développement de la conservation du nombre";
- Baroody (cf. BAROODY 1979) qui a observé 66 enfants de maternelle conclut que "le développement du comptage sensé précède, pour la plus grande part, la conservation du nombre".

De manière encore plus générale, il a été établi également que la conservation n'est pas une condition nécessaire pour le raisonnement arithmétique. Par exemple:

- Mpiangu et Gentile (cf. MPIANGU 1975), au terme d'une expérience d'apprentissage conduite avec 58 + 58 sujets, concluent que leurs résultats "présentent une forte évidence que l'hypothèse que la conservation est une condition nécessaire pour la compréhension mathématique soit fausse";
- Pennington et al. (cf. PENNINGTON 1980) soulignent que leur étude, faite avec 123 enfants de 1ère année d'école, "confirme l'hypothèse que les enfants qui échouent au test piagétien de conservation peuvent néanmoins avoir peu de difficultés à comprendre et utiliser le comptage et l'arithmétique".

e) Conclusion

Les résultats rapportés ci-dessus semblent donc montrer que le comptage:
- peut accélérer les jugements de conservation;
- est utilisé par un certain nombre d'enfants pour justifier ou établir leur jugement de conservation;
- est utilisé "intelligemment" par les enfants avant la conservation.

Nous n'en déduisons pas pour autant que la conservation pourrait simplement être une conséquence du comptage résultant par exemple d'une généralisation par induction à partir du recomptage de collections transformées. D'ailleurs l'expérience de Saxe (cf. SAXE 1979), qui montre que des enfants qui ne comptent pas exactement peuvent néanmoins conserver, serait une sérieuse (bien que le nombre, 8, de tels enfants est faible) objection à une telle hypothèse. Nous soulignerons cependant qu'une hypothèse faisant jouer un rôle au comptage serait davantage compatible avec le fait que l'on observe des jugements corrects à tous les âges dans un contexte où la réduction des éléments permet leur évaluation numérique, ces jugements augmentant avec l'âge (cf. le bilan proposé dans BIDEAUD 1980), que ne l'est l'hypothèse de Piaget (= utilisation spécifique d'un indice perceptif: cf. PIAGET 1941 et 1968b) ou celle de Mehler (= réussite précoce, vers 2 ans, qui disparaîtrait ensuite, vers 3;6 pour ne reparaître qu'aux âges indiqués par Piaget: cf. MEHLER 1967 et 1968, BEVER 1968). Nous soulignerons également que l'idée piagétienne que la conservation est la résultante de 3 composantes primitives- l'inversion, l'identité et la compensation - pose un problème, puisque ces 3 composantes s'appliquent aussi bien à des situations de conservation qu'à des situations de non-conservation, problème que Mehler n'a pas manqué de soulever (cf. MEHLER 1979). Il est donc (en particulier dans le cas de la conservation du nombre) impossible de savoir a priori (c'est-à-dire sans avoir vérifié empiriquement, par exemple dans le cas qui nous intéresse, par comptage) qu'il y a compensation exacte * entre 2 variations (dans notre cas, densité et longueur). Et ce problème n'est pas seulement théorique: Fischbein (cf. FISCHBEIN 1979) a par exemple trouvé que les meilleurs élèves, en prévoyant une compensation exacte, échouaient davantage que les autres dans une épreuve où il fallait trouver la limite de l'aire d'un rectangle lorsque sa longueur augmente mais que son périmètre reste constant !

---

* L'école piagétienne "explique" la compensation par la réversibilité. Par exemple, Piaget (cf. PIAGET 1959) écrit que la réversibilité "conduira elle-même tôt ou tard à la compensation" et Gréco (cf. GRECO 1962a): "Le caractère conservant de celles-ci (= transformations) est tiré des structures générales de la coordination des actions intériorisées et réversibles; les modifications figurales produites par les T (= transformations) se compensent donc exactement".

C) La réforme de 1970

"... n'attachons pas trop d'importance à la comptine"
N.Picard, 1966.

1) La référence sélective à Piaget

C'est vers 1970, avec la réforme des programmes de l'école élémentaire, que le problème du comptage s'est posé de la manière la plus aigüe. En effet, l'idée de donner à l'enfant la notion de nombre avant de lui donner les noms des nombres, principalement en lui faisant refaire à son niveau une construction analogue à celle qui conduit le mathématicien à la notion de cardinal, permettait enfin de faire de l'introduction des petits nombres une matière authentiquement scolaire (on pouvait programmer les activités, et c'est effectivement l'époque où apparurent les premiers "organigrammes" décrivant le chemin que doit parcourir l'enfant pour arriver à la notion de nombre: voir Annexe 10). Mais un obstacle gênant nuisait alors aux différentes progressions : l'enfant sait compter et connait, grâce au comptage, au moins les premiers nombres.

La nécessité de discréditer le comptage était donc impliquée par cette nouvelle didactique du nombre. Lorsque l'on considère alors l'importance du phénomène de comptage mise en évidence dans les 10 premiers chapitres de cette étude, on voit le problème quasiment insoluble auquel étaient confrontés les réformateurs de 1970. Ils trouvèrent pourtant une aide dans la psychologie de Piaget. D'où (entre autres) la popularisation, dans les milieux didactiques*, de certains écrits de Piaget. Mais de certains seulement car, pour ce qui concerne généralement la didactique du nombre, les points de vue de Piaget et des réformateurs paraissent parfois difficilement compatibles. Ainsi peut-on se demander si:

- l'introduction des nombres dans un ordre quelconque

  ex: . Dans MANESSE 1977, l'auteur écrit que "les nombres sont volontairement présentés sans aucun ordre" et, dans le livre pour élèves correspondant, elle introduit d'abord le nombre 8, puis 6, 2, ...

  . Dans TOUYAROT 1967, l'auteur pense "qu'il est préférable (plutôt que d'introduire les nombres dans l'ordre) de commencer par deux et de progresser avec quatre, puis six avant de revenir à un, puis trois

---

* Malgré des mises en garde parfois très sévères. Par exemple, C. Gattegno, qui a popularisé les nombres en couleurs de Cuisenaire et introduit Piaget dans le monde anglophone, écrivait:" pour découvrir la vérité sur l'enseignement des mathématiques, il ne faut pas croire ce que Piaget a dit sur l'apprentissage du nombre, parce que ce n'est pas vrai" (cf. GATTEGNO 1963).

et cinq"

. Dans PICARD 1970, l'auteur écrit que si, à la suite d'un jeu, on est amené à mettre l'étiquette 7 "il se trouverait que le signe 7 serait introduit avant le signe 4, ce qui évidemment, quant à la compréhension du nombre et de son écriture, n'a strictement aucune importance",

est compatible avec les affirmations de Piaget que "chez l'être humain, les nombres se construisent en fonction de leur suite naturelle" (cf. PIAGET 1941) ou que "les nombres 15 ou 10 pourraient ainsi (= par une construction logique) être construits avant le 1 et le 2, ce qui est antipsychologique, mais montre surtout qu'à négliger la récurrence on n'atteint pas la réalité fondamentale qui est la suite même des nombres" (cf. PIAGET 1960);

- une introduction cardinale du nombre est compatible avec le point de vue de Piaget que l'emboîtement des parties dans un tout qui se conserve et la sériation des éléments sont les 2 conditions préalables pour que le nombre se construise et que l'opération de correspondance "n'est précisément pas une opération très primitive" (cf. PIAGET 1949b). En effet, ce point de vue conduit à privilégier l'ordre et la comparaison des nombres et, dans le livre de Beauverd (cf. BEAUVERD 1967) dont Piaget a écrit une préface élogieuse, on introduit bien le nombre par égalisation des différences d'une part, sous sa forme ordinale (le premier, ..., le huitième, le dixième) d'autre part, et cela dès le chapitre II.

Dans le même ordre d'idées, il faut aussi rappeler les mises au point récentes de Piaget.

- lorsqu'il précise (cf. PIAGET 1976) qu'"un ensemble supposerait la construction et surtout la conservation du nombre", point de vue difficilement compatible avec un organigramme tel que celui proposé par I. Marault-Derouard (voir Annexe 10);
- lorsqu'il souligne (cf. PIAGET 1971) "l'insuffisante information psychologique" de Dienes dont on connaît la contribution importante à la réforme de 1970;
- enfin lorsqu'il se défend (cf. PIAGET 1972) d'avoir soutenu la primitivité de l'un des aspects du nombre:"De nombreux auteurs (Freudenthal, etc...) semblent avoir compris que je pensais que l'aspect ordinal du nombre est plus primitif que l'aspect cardinal, ou le contraire. Je n'ai jamais dit cela ..."

De telles incompatibilités ou contradictions sont rarement soulignées et ce n'est qu'au prix d'une double-interprétation du mot équivalent, dénoncée par

Feudenthal (cf. FREUDENTHAL 1973), que les positions de Piaget et des réformateurs de 1970 se rejoignent quant à une introduction cardinale du nombre.

2) Les critiques du comptage

a) Le comptage n'est que du vocabulaire

Nicole Picard écrit: "Beaucoup de maîtresses de maternelle pensent qu'elles peuvent bien faire écrire 2+3=5 puisque les enfants connaissent les nombres beaucoup plus loin que 5. En fait ils connaissent le nom des nombres, c'est très différent, c'est du domaine du vocabulaire, vocabulaire bien utile d'ailleurs car il est plus facile de mettre sur une notion nouvelle un mot déjà familier à l'oreille. Donc, dans un sens comme dans l'autre (avant le passage que nous citons, N. Picard avait signalé que certains maîtres déplorent qu'en arrivant en classe, les enfants sachent compter), n'attachons pas trop d'importance à la comptine" (cf. PICARD 1966).

Elle réduit donc le comptage à la connaissance des nombres- mots. Or, nous avons vu qu'à 5 ans environ, les enfants savent compter 5 objets, c'est-à-dire utilisent des procédures de comptage respectant Pbi(5) et Pss(5) et connaissent la règle cardinale: une telle réduction ne nous paraît donc pas correcte. D'ailleurs Piaget (cf. PIAGET 1960) lui-même semble avoir admis que l'acquisition de la série verbale n'est pas pur verbalisme :
" ... les résultats de Gréco (= GRECO 1962 a) semblent indiquer que l'acquisition de la série verbale, même sans conduire à la découverte de sa structure propre, ne reste pas purement verbale : ..."

b) Le comptage est inutile

Pour montrer que le comptage est inutile, on a souvent cité l'exemple des bergers sumériens qui contrôlaient l'effectif de leur troupeau en plaçant pour chaque mouton une bille d'argile dans un petit récipient et qui n'avaient donc pas besoin de dénommer les nombres. Evelyne Laurent conclut même, à ce propos, que l'"on peut ainsi "compter" sans connaître de noms de nombres ou de systèmes de numération" (cf. LAURENT 1979): cette conclusion, dans le cadre où elle a été faite (car dans le cadre de notre problématique du I, elle serait très pertinente !), et même si le mot compter est entre guillemets, veut traduire une certaine inutilité du comptage, avantageusement remplacé par une simple bijection.

Or, nous avons suffisamment montré que le comptage, par les principes qui le sous-tendent et par les résultats auxquels il conduit (le nom des nombres en particulier) est plus qu'une simple bijection: la conclusion de E. Laurent est donc difficilement admissible. De plus, si on analyse complètement l'exemple des Sumériens, on peut s'apercevoir que l'histoire dit aussi que le comptable qui recensait les effectifs des troupeaux comptait les billes d'argile !

Remarque : la fonction de comptable montre bien que compter était déjà nécessaire à l'époque; et le statut social du comptable, supérieur à celui du berger, montre aussi que compter, c'est plus que faire une bijection !

c) Le comptage n'a qu'une fonction sécurisante

Le comptage ne jouant pas, pour certains auteurs, de rôle dans la dénomination des nombres petits, à laquelle l'enfant parviendrait directement, il fallait lui trouver une autre fonction: celle-ci est, d'après Thirioux et al. (cf. THIRIOUX 1976) , une fonction sécurisante. Ainsi, après avoir souligné que le comptage est dû au comportement de l'adulte devant l'enfant, ces auteurs soulignent-ils :
"Nous croyons que l'enfant a une vision globale, instantanée, des ensembles les plus simples. Le comptage un, deux, trois ... est sécurisant, mais il ne vient qu'en second lieu".

Bien que cette réflexion soit quelque peut ambigüe: S'agit-il d'une vision globale instantanée d'un ensemble ou du nombre de cet ensemble ? S'agit-il d'une antériorité génétique de la vision globale instantanée sur le comptage ou d'un comptage-vérification qui suivrait une dénomination par p.g.d.?
nous pouvons dire:

- pour le premier point, que même si l'enfant a une vision globale instantanée des ensembles simples, ceci ne lui permet pas toujours de trouver le nombre d'éléments de cet ensemble en réponse à la question "combien ?"
- pour le second point, qu'une antériorité génétique de la p.g.d. sur le comptage serait contredite (sauf pour 1 et 2) par nos résultats expérimentaux et que, si le comptage-vérification existe bien chez le jeune enfant, il s'interprète très bien avec notre hypothèse sur l'a.r.

En effet, en comptant très vite et de manière intériorisée, l'enfant prend des risques et en a conscience :
Ex: Kat (6;5) dit "7" pour 6, puis rectifie "6" et commente: "Je me trompe toujours un petit peu".
Ceci explique alors beaucoup mieux son besoin de sécurité, car l'idée que le jeune enfant qui aurait trouvé la réponse (à condition qu'il ne s'agit pas d'une estimation) par p.g.d.ait ensuite le souci de vérifier son résultat par la méthode différente et indépendante que serait le comptage, n'est guère en accord avec la psychologie du jeune enfant.

3) Le comptage sous-estimé

a) Une sous-estimation des possibilités de comptage de l'enfant

Fauvergue et Briançon (cf. FAUVERGUE 1972) écrivent:

"Il est actuellement très fréquent qu'un enfant arrivant au CP sache énumérer les nombres dans l'ordre jusqu'à 5 ou 6 ..."

Or la plupart (= plus de 75%) des enfants en fin de maternelle (GA 5;9 + GA 6;3) de notre expérience connaissent la suite des nombres au moins jusqu'à 13. D'ailleurs, tous les résultats expérimentaux, même anciens, que nous connaissons sont supérieurs à ce que signalent ces auteurs. Exemples:

- Meljac (cf. MELJAC 1979) indique que, à 6 ans, en maternelle, 75% des enfants connaissent la suite jusqu'à 15;
- Descoeudres (cf. DESCOEUDRES 1921) avait déjà trouvé qu'à 5 ans, 75 % des enfants savent répéter la suite des nombres jusqu'à 10 (la répétition ne constituant pas un grand avantage, ce résultat ne surestime pas trop celui d'une récitation);
- voir aussi les statistiques du X,A,4 et le développement du comptage selon Gesell (donné en Annexe 16), en notant toutefois que Gesell a obtenu ses résultats (au moins pour les plus de 5 ans) par l'étude d'une population de jeunes américains bien doués.

On peut dire que Fauvergue et Briançon soit ignorent la réalité, soit enfreignent la loi linguistique d'exhaustivité en ne disant pas le maximum de ce que savent les enfants !

On voudrait d'ailleurs leur signaler les cas suivants :

- Benoît (5;3) * était ennuyé pour dire jusqu'où il sait compter: il savait compter jusqu'à 1 million !
- Cor (6;1), lorsque nous lui avons demandé jusqu'où elle sait compter, répond: "Je sais plus, tellement je sais compter"!

b) La p.g.d. surestimée (par rapport aux limites indiquées antérieurement)

Le tableau (voir Annexe 9) donnant la limite de la p.g.d telle qu'elle a été estimée par différents didacticiens depuis un siècle, montre que les 8 documents issus ou postérieurs à la réforme 1970 (ceux référés avec une date $\geq$ 1970 + TOUYAROT 1967 qui anticipait sur cette réforme) s'opposent assez nettement aux 9 antérieurs à 1945. En effet, les premiers, sauf BROUSSEAU 1977, indiquent toujours une limite $\geq$ 5, alors que les seconds indiquent pour leur part, sauf GERLACH 1914 (mais l'indication concerne les adultes), une limite $\leq$ 4. Et l'opposition entre les extrêmes est très nette: LAY 1898, KNOCHE 1899, HENCK 1928, LACOUR 1934 et OEHL 1935 n'indiquent que 3, alors que TOUYAROT 1967, MONTEILLET 1973 et BESSOT 1978 indiquent 6. Remarquons que :

α) Lay, et son "disciple" Lacour, qui sont de grands visuels estiment très bas cette limite : ceci pourrait a priori paraître paradoxal, mais ils justifient ainsi la nécessité de bien regrouper les objets à dénombrer; et le meilleur regroupement, selon eux, est celui des constellations quadratiques (= de Lay);

β) la limite, 5, indiquée par Morgenthaler et Isnard (cf. MORGENTHALER 1963) rend "possible d'adopter un schéma constellant dominant (le ⁙ par exemple)";

γ) Les réformateurs de 1970, en particulier M.-A.Touyarot, en indiquant une limite assez haute purent ainsi introduire les premiers nombres jusqu'à 5 ou 6 sans comptage, puis les suivants comme sommes des premiers, et cela toujours sans comptage.

En conclusion, il faut donc se demander, et ceci est plus particulièrement vrai pour les ouvrages issus de 1970, dans lesquels aucun résultat expéri-

---

* Il était intéressant de voir si un enfant de 5;3, sachant compter jusqu'à 1 million, réussissait les classiques tests piagétiens d'inclusion: réponse en Annexe 7.

mental sur la p.g.d. n'est rapporté, si c'est bien la limite de p.g.d. qui a influencé la didactique des petits nombres ou si ce n'est pas plutôt l'inverse !

c) Le comptage ignoré

Beaucoup de livres du maître issus de la réforme de 1970, soucieux d'expliquer la nouvelle présentation des nombres, en arrivent à oublier de dire que les enfants savent compter et, en conséquence, ne font évidemment aucune liaison entre la construction des nombres qu'ils préconisent et la connaissance de ces nombres qu'a l'enfant par l'intermédiaire du comptage (la seule liaison que font certains d'entre eux, consiste à dire qu'il faut éviter ce dernier). Citons un exemple net :

> I. Marcault-Derouard (cf. MARCAULT-DEROUARD 1974) explique aux maîtres la didactique du nombre, pages 43 à 55 de son livre, sans utiliser une seule fois le mot compter (ou analogue). L'auteur se contente de dire, dans une parenthèse*, que "les enfants du CP connaissent tous, ou presque les nombres 1 et 2" et qu'"il convient d'utiliser ces connaissances" (on pourrait lui faire une critique analogue à celle que nous avons faite à Fauvergue et Briançon : voir le a)

Il faut alors s'interroger:

> Les auteurs qui suivent une telle démarche, i.e. ignorent le comptage, n'essaient -ils pas de construire un édifice à côté de ses fondements ?

4) Les " compteurs "**oubliés

a) Les mathématiciens Dedekind et Lebesgue

α) Dedekind peut être considéré comme un compteur car :

- il considère le nombre ordinal comme "originaire" (rapporté dans SINACEUR 1978);
- il "regarde la totalité de l'arithmétique comme une conséquence nécessaire, ou

---

* Souvent les remarques sur le comptage ou les connaissances numériques de l'enfant sont "dissimulées". Dans EILLER 1972, on trouve ainsi, en note, au bas de la page 157 et en petit, à propos d'un exercice du type 4+...= 6, que "en fait, l'enfant complète par comptage".

** L'appellation "compteur" est bien entendu à relativiser. Gréco, par exemple, a écrit à propos des pratiques numériques de l'enfant :"Il est des pratiques aveugles, imposées du dehors, cristallisées par l'exercice répété, ..." (cf. GRECO 1960).

au moins naturelle, de l'acte arithmétique le plus simple, celui de compter,..." (cf. Dedekind cité dans BRAINERD 1979,p.45);

- sa réflexion sur le comptage: "Si l'on suit exactement ce que nous faisons en comptant l'ensemble ou le nombre d'objets, on est nécessairement amené à la notion de correspondance ou d'application" (cf. DEDEKIND 1872) pourrait traduire une antériorité du comptage sur la notion générale de correspondance ou d'application;
- sa réponse principale et initiale à la question "A quoi servent les nombres ?" qui est : "ils doivent servir comme moyen pour nous aider à saisir plus facilement la diversité des objets" peut être interprétée dans le sens d'une distinction, par le numéro qu'on leur attribue, d'objets semblables, et ceci est une fonction spécifique du comptage (voir Annexe 13);
- Lay, un célèbre visuel (voir l'introduction de XI,A) presque contemporain de Dedekind, classe ce dernier parmi les mathématiciens dont la pensée n'est pas perceptive (ou intuitive), en l'opposant à Poincaré (cf. LAY 1898, p.176).

Mais alors que les idées de Cantor ont été assez vite diffusées en France, on y a en revanche longtemps sous-estimé l'effort propre de Dedekind à la constitution de concepts fondamentaux et des procédures spécifiques de la Théorie des Ensembles (cf. DESANTI 1978). Précisons toutefois que ce sont surtout les travaux de Dedekind sur les fondements des mathématiques qui, jusqu'à une époque récente (parution de DUGAC 1976 et DEDEKIND 1978), n'ont pas été étudiés attentivement, car d'autres parties de son oeuvre, par exemple les coupures, ont joui d'une certaine faveur dans l'enseignement de l'Analyse (cf. DIEUDONNE 1976).
Un détail semble illustrer l'ignorance de la partie de l'oeuvre de Dedekind soulignée ci-dessus: dans son "Cours d'Algèbre" (cf. GODEMENT 1963), le mathématicien R. Godement attribue (p.84) à Dedekind la célèbre phrase de Kronecker :" Dieu nous a donné les nombres entiers, tout le reste est l'oeuvre de l'homme", ce qui est assez amusant lorsque l'on sait que Dedekind a écrit à propos de Kronecker qu'"il se fait parfois des idées" (cf. DUGAC 1976), mais aussi et surtout que pour Dedekind "les nombres sont de libres créations de l'esprit humain" et que "dans le domaine scientifique, ce qui peut être démontré ne doit pas être cru sans démonstration", ces 2 réflexions constituant les premières phrases de la préface de DEDEKIND 1888, ouvrage dans lequel il donne justement une construction des nombres naturels.

β) Quant à Lebesgue, c'est Davydov, un psychologue soviétique, qui, dans un récent papier présenté au colloque du Wisconsin (= DAVYDOV 1979), écrit: "l'important mathématicien et enseignant qu'est le scientifique français H.Lebesgue a décrit en détail le rôle fondamental du concept de quantité dans les programmes de mathématiques à l'école". Mais en France, dans les années 1970, la réflexion pédagogique de Lebesgue avait été quelque peu oubliée. En effet, alors que l'on se référait volontiers à la définition du nombre donnée par Dienes,

> Dans DIENES 1966, Dienes et Golding écrivent :"On ne répétera jamais assez que le nombre n'est pas du tout une chose. C'est une propriété, tout comme la rougeur des joues ou la noirceur de la nuit ou la rondeur des tours. Ces propriétés ne sont ni des objets réels, ni des événements. La rondeur d'une tour n'est pas la tour elle-même. La noirceur de la nuit n'est pas la nuit. Ce sont des propriétés, elle n'existent pas indépendamment. De même, des nombres comme deux, trois, quatre, n'existent pas "concrètement": ce sont des propriétés des ensembles d'éléments auxquels ils se rapportent; "deux" est la propriété de tout ensemble de deux objets, trois est la propriété de tout ensemble de trois objets".

la définition complète du nombre donnée par Lebesgue, à savoir " la description de l'opération qui le fournit" (cf. LEBESGUE 1935) n'a guère été citée.

b) Les psychologues Wallon et Gréco.

α) L'article "Pluralité et nombre chez les enfants de 4ans 1/2 à 7 ans" de Wallon et Sauterey (cf. WALLON 1962) aurait dû, au moment où il est paru, attirer l'attention des réformateurs. Cela d'autant plus que Wallon était considéré comme le "premier" psychologue français de l'enfant (Piaget est suisse !). Mais il n'en fut rien, et aujourd'hui encore on peut noter qu'il ne figure pas dans PEN 1979* où l'on a pourtant réuni une assez vaste bibliographie sur le thème "Approche du nombre", en particulier sur les problèmes psycho-pédagogiques de la construction du nombre chez l'enfant (pp.12-14). Cette ignorance dans laquelle est resté WALLON 1962 contraste avec la large diffusion de PIAGET 1949b, un simple exposé oral de Piaget fait à un congrès, exposé reproduit dans les Cahiers de Pédagogie Moderne (Bourrelier) "Initiation au Calcul", traduit

---

*L'un des objectifs du colloque des Professeurs d'Ecole Normale, d'où est issu PEN 1979, était de rassembler une bibliographie, la plus complète possible, sur certains thèmes: les participants étaient en particulier invités à signaler les travaux, relatifs à ces thèmes , qu'ils connaissaient.

en allemand dans l'ouvrage introduit par ODENBACH 1965, cité dans Grand N n°14 et même dans la "grande" presse ou littérature, par exemple dans "Le Monde de l'Education" (cf. LAURENT 1979) ou dans le livre d'un nouveau philosophe (cf. BENOIST 1980).
Or, qu'écrivent les auteurs de cet article ? Dès l'introduction, ils soulignent que "le nombre suppose une série normative",que" ce qui est essentiel, c'est la nécessité de rapporter chaque terme nouveau du dénombrement à une série" et que "l'enfant dissocie des ensembles syncrétiques pour en faire surgir des séries normatives". Ils mettent donc tout de suite l'accent sur l'importance du comptage et la suite de leur article confirme cette importance: par exemple, leurs résultats expérimentaux montrent l'antériorité génétique d'une certaine forme de comptage (mise en série) par rapport à l'organisation d'une pluralité en figure perceptive et leurs conclusions sont qu'"aussi bien la figure que la série supposent une énumération", que " <u>le nombre n'est que le terme d'une énumération systématisée</u>", enfin qu'"avec l'enfant, la série est non définie et pas dénombrée jusqu'au jour où la série devient la série des nombres qui se substitue à l'énumération concrète d'objets assimilés entre eux, et qui, sous sa forme verbale, peut être indéfiniment prolongée".

β) Quant à l'article de P. Gréco* "Quantité et quotité" (cf. GRECO 1962a) dans le tome 13 des EEG, c'est, à notre avis, l'étude la plus importante de l'école piagétienne sur le comptage de l'enfant et ses conséquences. Cet article est, unanimement et mondialement nous semble-t-il, considéré comme une référence en son domaine. Nous en voulons pour preuve les faits que:
- J. Bideaud (cf. BIDEAUD 1980), dans un bilan sur les travaux (mondiaux) récents concernant la construction du nombre écrit que l'on peut "toujours avancer ce que Gréco écrivait déjà en 1962, à savoir que..."(elle cite un passage de GRECO 1962a);
- l'article est cité par les didacticiens allemands, Müller et Wittmann (cf. MUELLER 1977) qui le résument ainsi: "Des réactions des enfants, Gréco tire la conclusion que l'aspect compteur des nombres n'est pas, comme Piaget le pense, pur verbalisme, mais a une signification rela-

---

* Cet article ayant déjà (partiellement) été analysé dans le B,2,d précédent principalement, nous ne justifierons plus son placement dans ce paragraphe.
E.E.G = Etudes d'Epistémologie Génétique

tivement particulière et peut fructifier d'autres aspects, peut-être l'aspect cardinal des nombres", et par Schmidt (cf. SCHMIDT 1981);
- l'article est également mentionné par les psychologues français Meljac (cf. MELJAC 1979) et Vergnaud (cf. VERGNAUD 1981), par certains livres ou articles américains (WOHLWILL 1962 , SCHAEFFER 1974, KLAHR 1976, SAXE 1979) ou suisse (PERRET-CLERMONT 1979).

Nous pouvons donc nous étonner que cet article ne figure ni dans PEN 1979, ni dans les articles référés par nous sous BESSOT ou COMITI, surtout que PIAGET 1941 (ou le tome 11 des EEG) y est mentionné systématiquement (ou presque) et que Gréco, dans GRECO 1960, annonce qu'il reviendra, dans GRECO 1962a, sur la thèse soutenue par Piaget "pour en préciser certains points, comme le rôle de la correspondance bi-univoque".

c) Le philosophe Husserl* (cf. HUSSERL, 1891)

Husserl, le "fondateur de la phénoménologie" et "tout simplement le plus grand philosophe apparu depuis les Grecs" avait été lu par les étudiants de philosophie tour à tour de 1930 à 1955. Mais, depuis, il traverse une "sorte de purgatoire, ou plutôt d' imperceptible effacement, qui affecte comme on sait les plus grandes oeuvres" (cf. GRANEL 1974). Son premier essai important - La philosophie de l'Arithmétique (référé sous HUSSERL 1891)- n'a évidemment pas échappé à cet effacement général **. Et ceci est peut être regrettable, car la lecture de l'ouvrage d'Husserl aurait sûrement encouragé certains réformateurs à approfondir leur réflexion, entre autres et en particulier sur les points suivants:

(a) l'obtention ou la définition des nombres;
(b) la facilité relative des différentes méthodes de comparaison des quantités;
(c) le développement naturel du comptage.

---

* L'appellation compteur doit , pour Husserl aussi, être nuancée. Ainsi, Husserl explique l'évaluation instantanée des nombres ≤ 5 par des "moments figuraux", et rejette la thèse d'un dénombrement inconscient. De plus, l'une des thèses fondamentales du livre est la prééminence généalogique des nombres cardinaux.

** Notons cependant que, récemment, von Glasersfeld (cf. GLASERSFELD 1981 et X,C,2,c) se réfère à l'ouvrage d'Husserl et semble influencé par lui dans ses réflexions sur les concepts d'unité, de quantité, d'unitisation,...

En effet, Husserl y soutient respectivement que :

(a) on a "tout à fait le droit de désigner, sinon la totalité, du moins la presque totalité des multiplicités et des nombres, comme des résultats de processus, et, dans la mesure où notre volonté y participe, comme des résultats d'activités, d'opérations consistant à collectionnner et à dénombrer", mais que, par contre, personne n'a jamais eu l'idée d'appeler quatre une multiplicité de noix " parce qu'elle appartient à une certaine classe de multiplicités infiniment nombreuses qui peuvent se mettre mutuellement en correspondance biunivoque";

(b) l'idée de faire l'économie d'un travail mental en comparant 2 quantités par correspondance biunivoque sans déterminer les nombres eux-mêmes est une idée fausse et explique: "Etant donné la facilité du processus bien connu de dénombrement symbolique, la détermination du nombre est, de tous les moyens, celui qui se trouve le plus près de nous. Et c'est un procédé qui est totalement mécanique; nous le suivons sans penser aux concepts eux-mêmes, et nous sommes cependant certains que le nom de nombre qui en résulte, quand nous nous rendons présente à la conscience sa signification, représente effectivement le concept du nombre juste. Qu'y a-t-il donc de plus simple que de comparer les deux quantités en ce qui concerne leur nombre, en les dénombrant toutes les deux dans le sens symbolique ? Et nous obtenons ainsi non seulement la conviction de l'égalité (ou de l'inégalité) des nombres, mais aussi ces nombres eux-mêmes. Il n'est pas du tout besoin de montrer que le processus du dénombrement mécanique, déjà quand il s'agit de multiplicités d'une numération relativement peu élevée, se déroulera avec incomparablement plus de rapidité et de certitude que le processus apparemment si simple de la correspondance biunivoque";

(c) "la systématique des nombres et des dénominations de nombre a résulté du dénombrement systématique, celui-ci à son tour de certaines habitudes naturelles de dénombrement, qui, en vertu du caractère similaire des dispositions humaines, ont dû se former chez les peuples les plus différents à une certaine étape culturelle".

d) D'autres compteurs

α) Alors que la réforme de 1970 était en train de se mettre en place en France, Wang et al. (cf. WANG 1971), en conclusion d'une recherche impliquant 78 enfants de 4;6 à 6;0, écrivaient déjà: "Alors que l'on peut théoriquement enseigner à un enfant à reconnaître et à lire les symboles de nombres comme un acte associatif mécanique, il est probable qu'il apprendra beaucoup plus facilement après une expérience considérable avec le comptage d'objets", ou encore: "Sur la base des présents résultats, par exemple, un curriculum mathématique introductif optimal devrait insister sur les opérations de comptage, en les introduisant simultanément avec les correspondances terme à terme. Un tel curriculum devrait retarder l'introduction des nombres jusqu'à ce que le comptage soit bien établi, mais il introduirait probablement les nombres pour les ensembles petits aussitôt que l'enfant peut compter ces derniers, au lieu d'attendre jusqu'à ce qu'il ait développé des stratégies de comptage plus importantes".

β) Pour montrer combien il était difficile à certains compteurs de défendre leur point de vue, il nous plaît aussi de rapporter les deux anecdotes suivantes: la première concerne J.Leray, éminent mathématicien et professeur au Collège de France, qui, dans les années 1970, avait écrit un article sur l'enseignement des mathématiques, mais s'est vu refuser sa publication dans le bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques (rapporté dans CHAUVIN 1975). Quel qu'ait été le contenu de cet article, on ne peut manquer de remarquer que J.Leray a, par ailleurs (dans "L'Ecole Libératrice", le journal du Syndicat National des Instituteurs) pris nettement position en faveur d'une introduction des nombres par le comptage. Dans LERAY 1973, il explique en effet comment il conçoit un enseignement modernisé et élémentaire de la notion de nombre naturel: "On compte un à un les éléments de quelques ensembles (finis) et l'on constate empiriquement que le nombre que l'on obtient est indépendant de l'ordre dans lequel on choisit ces éléments..."
La seconde concerne le sort qu'a réservé Piaget à l'article (cf. ESTES 1956) de la psychologue Estes qui, bien que son article soit discutable, avait plus ou moins conclu que lorsqu'on fait compter les enfants, le problème de la conservation ne se pose pas. Dans PIAGET 1964, Piaget cite cette expérience, mais il la cite, avec beaucoup d'autres, entre des études de Gréco, qui a trouvé un 4e stade dans la conservation*, et de chercheurs, qui ont retrouvé les 3 stades classiques dans divers pays: un lecteur non-informé sur le contenu de ESTES 1956 ne risque-t-il pas de croire que l'expérience d'Estes confirme les thèses de Piaget ?
Ces anecdotes expliquent peut-être pourquoi les principaux défenseurs du comptage, ou plus généralement d'une introduction ordinale des nombres, furent surtout étrangers: Estes (cf. ESTES 1956), Van Hiele (cf. VANHIELE 1959), Wang et al. (cf. WANG 1971), Brainerd (cf. BRAINERD 1973), Freudenthal (cf.FREUDENTHAL 1973),

* il s'agit de la conservation de la quotité (signalée précédemment) qui précède la conservation de la quantité.

Galperin (cf. TALYSINA 1973),... alors qu'en France ils ne se manifestèrent que plus tardivement: Halbwachs (cf. HALBWACHS 1979), Baruk (cf. BARUK 1973, mais surtout, pour la défense du comptage, BARUK 1977),...

D) Quelques tendances actuelles

> "... dans une perspective de didactique des mathématiques, elle (= la recherche PERRET-CLERMONT 1979) suggère peut-être que la conduite de comptage a été trop souvent sous-estimée ou dévalorisée".
>
> M.L.Schubauer-Leoni, A.N. Perret-Clermont, 1980.

Introduction :

Pour parler du présent et de l'avenir du comptage, il faut dire quelques mots sur la réforme en général. Deux citations, l'une pour l'école élémentaire, l'autre pour l'école maternelle, suffiront à montrer que cette réforme donne parfois lieu à des prises de conscience accompagnées de remords à peine voilés. Dans BESUDEN 1978, le didacticien allemand H. Besuden, écrit: "Dans l'enseignement mathématique à l'école élémentaire, le calme est en effet revenu à propos de la réforme, une réforme qui, sous des points de vue structuraux, a apporté de nouveaux contenus à l'enseignement mathématique initial: algèbre des ensembles, logique élémentaire et système de numération non décimaux. Les écoliers noirs des pays africains et les écoliers bruns d'Indonésie s'occupent à l'heure actuelle de ces sujets, alors qu'aux USA, il n'y a plus guère de livre scolaire pour l'école élémentaire qui utilise les notions ensemblistes ou traite les systèmes quaternaire et binaire.
Prudemment chez nous, les nouvelles recommandations de 1976 du KMK* pour l'école élémentaire, retirent ce qui était encore- dans certains lands jusqu'à satiété - exigé en 1972. Prudemment et discrètement : personne ne veut en prendre la responsabilité ".
Dans l'introduction de TOURTET 1979, L. Tourtet, inspectrice des écoles maternelles, écrit, après avoir remarqué que les tris et les rangements engendraient l'ennui, en particulier chez les Grands (de maternelle): "Ici (= dans ce livre) nous retrouvons d'anciennes préoccupations d'accession au nombre

---

* Kulturministerkonferenz

que nous avions voulu *, un temps, mettre entre parenthèses, pour bien nous imprégner de l'esprit des mathématiques modernes, mais que nous accueillons maintenant sans complexe à travers des problèmes de commandes, de partages, de choix, de jeux gagnants ...".
On voit donc que le contexte général se prête assez bien à une révision de certains jugements discréditants, un peu hâtivement portés sur le comptage.

1) <u>En France</u>
S.Baruk (cf. BARUK 1977) défend le comptage, en particulier le comptage sur les doigts. En des termes excessifs et provocants elle accuse la Pédagogie: "... il est des enfants sensibles que la Pédagogie mutile - presque - pour de bon...Chez ces enfants-là, tout l'acquis 'naturel' qui se maintient chez les autres en dépit de la répression scolaire est détruit. Il faut alors patiemment tout reconstruire à l'aide de la seule comptine, recours ultime, ...", ou ironise à propos des pédagogues modernes: "Il a beau se trouver des pédagogues modernes pour s'en désoler, phénomène linguistique commun, la comptine appartient au babil enfantin et fait partie de son trésor de mots ".
Ceci n'a pas empêché les mots "compter", "calculer" et aussi "nombre", de disparaître complètement dans les instructions officielles 1977 de maternelle. Notons d'ailleurs que même le mot "mathématique" n'y figure qu'une seule fois: c'est pour dire que "la 'créativité', à la fois effet et source de l'intelligence divergente, trouve également sa place en mathématiques où certains croient devoir cultiver exclusivement l'intelligence convergente".

Examinons maintenant quelques livres récents:

- dans VERGNAUD 1981, un livre pour éducateurs et chercheurs, l'auteur indique que la suite numérique parlée atteint 5,6 ou 7 chez la plupart des enfants de 5 ans, qu'elle peut atteindre 10 et au-delà chez certains (si l'on interprète 5 ans comme 5; 0, ces données ne s'écartent pas trop de nos propres résultats);
- dans THEVENET 1981, il n'est demandé (explicitement) de compter (1 à 1) qu'une seule fois (p.33) et, au plus, 6 objets;

---

*Signalons que cette volonté n'a pas été générale. Dans SARAZANAS 1974, auquel ont collaboré 14 autres inspectrices et directrices d'école maternelle, Réjane Sarazanas, inspectrice générale des maternelles, écrit:"...<u>le nombre</u>, tel qu'il se présente, à l'école maternelle, <u>doit être utilisé par les enfants aussi fréquemment possible</u>" ou encore: "Il serait regrettable que, sous prétexte de purisme mathématique, l'institutrice laisse à "l'école parallèle" le soin de révéler les nombres à l'enfant...". Notons d'ailleurs, à propos de l'école parallèle, que l'une des enfants, Mar (5;10), citée en Annexe 6, a "reproché" à sa grande soeur de vouloir tout le temps jouer au lieu de lui apprendre à compter !

- dans GUYOT 1980 (fiches de préparation pour le maître), l'auteur ne parle qu'une seule fois de comptage: c'est pour dire (fiche 32) qu'"Il n'est pas utile de faire compter le nombre d'objets de l'ensemble 'beaucoup'";
- dans DAUBET 1980, un livre (dans les cahiers correspondants le mot compter ne figure pas) pour élèves de CP, les nombres sont présentés dans le désordre: 6, 5 et 3 (p.15) et 4, 1 et 2 (p.16). Nicolas, l'un des personnages, ne sait d'abord compter que jusqu'à 9 (p.24), puis il compte 27 os mais en faisant des groupes (p.33), enfin il arrive à compter 36 billes (p.46). Le lecteur, c'est-à-dire l'enfant de CP, quant à lui, est invité à compter 17 prems en base trois et 14 en base cinq (p.32), mais jamais (explicitement) en base dix;
- dans MYX 1981, un livre pour enseignants de CP, les auteurs proposent une progression dans laquelle figurent des comptines, mais il s'agit de comptines non-numériques. Les parents auront ainsi la surprise d'apprendre que si l'on compte les points du domino "huit", on arrive à 3 oeufs! Et les enseignants de CP, "qui n'aiment pas en général que les enfants récitent la COMPTINE des NUMEROS : un, deux, trois, ..." car "cette 'sériation' apprise par coeur les gêne", seront, pour leur part étonnés d'apprendre qu' "ils ont préféré (cf. programme 1970) l'approche cardinale du nombre" !

Mais les travaux français les plus importants sur le comptage sont certainement ceux de l'équipe grenobloise de C. Comiti et A. Bessot. Les premiers de ces travaux, qui suivent et chevauchent la réforme de 1970, reprennent ou confirment certaines idées caractéristiques de cette dernière. Ainsi :

- dans BESSOT 1976, les auteurs concluent, à partir d'une proportion importante d'enfants entrant au CP mais n'ayant pas atteint le stade de la conservation numérique, qu'"il semble peu raisonnable d'étudier systématiquement (souligné dans le texte original) le nombre au premier trimestre";
- dans COMITI 1977a * , l'auteur écrit que, à l'entrée du CP, les enfants quelquefois ne connaissent pas du tout les nombres et, en général, ne les connaissent pas au-delà de 5;
- dans BESSOT 1978, les auteurs proposent un modèle d'appréhension du nombre
  . de 0 à 6 (ou 7): perception globale ;
  . de 7 à 20(ou 25):correspondance terme à terme;
  . au-delà : correspondance paquet par paquet;

  dans lequel le comptage n'apparaît pas et qui ne résume qu'imparfaitement le modèle (de comparaison de deux ensembles) présenté dans PEN 1976.

Ces idées initiales, ou d'autres, ont ensuite donné lieu à des vérifications expérimentales rapportées scientifiquement. Toutefois, quelques-unes des conclusions (ou leurs "démonstrations") tirées de ces expériences nous paraissant

---

* Dans COMITI 1977b, la formulation est un peu autre (et vraisemblablement plus proche de la réalité) :"même si certains enfants savent oralement la comptine, ils ne connaissent en général pas les nombres au-delà de cinq...". Précisons également que, dans le contexte de COMITI 1977a, "connaître" devrait s'appliquer à la suite des nombres-mots.

discutables,

Exemples : - "les correspondances terme à terme sont donc beaucoup plus opérationnelles que le comptage, à ce moment là de l'apprentissage et dans le domaine de nombres considéré pour la construction de deux collections équivalentes" (cf. BESSOT 1978);

- "Le nombre semble encore pour ces enfants (= de nombreux enfants en début de CP) une propriété inhérente à l'objet, il fait partie de la qualité de l'objet compté. Il n'est pas interchangeable" (cf. COMITI 1980a);
- "... la comptine numérique n'est bien souvent pour lui (= l'enfant entrant dans l'école obligatoire) qu'une chanson connue globalement et qu'il ne peut pas utiliser dans des situations de dénombrement ou de comparaison de collections d'objets" (cf. COMITI 1980a);
- il "semble dangereux de croire que, plus on commence tôt dans l'année un travail systématique sur la suite des nombres, moins les enfants auront de difficultés vis-à-vis du comptage" (cf. COMITI 1980b)

il faudrait les discuter. Mais nous ne le ferons pas dans cette étude : une telle discussion, longue et "technique", risquerait de lasser le lecteur (et aussi de conduire à des malentendus).

2) A l'étranger

(a) En Allemagne Fédérale, Müller et Wittmann présentent, dans MUELLER 1977, des comptines rimées

Ex. : 1, 2, 3, 4
Vater braucht ein Bier (= papa a besoin d'une bière)
4, 3, 2, 1
Mutter braucht keins (= maman n'en a pas besoin) - Bertold Brecht.

1, 2, 3, 4, 5 et 6
einmal fing ich eine Hex (= une fois j'ai attrapé une sorcière)
7, 8, 9, 10
doch ich liess sie wieder gehn (= mais je l'ai de nouveau relâchée)

ou chantées

Ex. :

(Nous voulons une fois nous promener dans un beau jardin,
Si seulement la méchante bête ne venait pas, nous ne voulons pas attendre plus longtemps.
A 1, elle ne vient pas, à 2, elle ne vient pas, à 3 ...
A 11, elle cogne, à 12, elle arrive !)

qui sont qualifiées de "réjouissantes" par le critique Matros (cf. MATROS 1979).
Dans STELLJES 1977 qui rapporte les programmes de mathématique pour l'école maternelle des 11 Länder de la RFA, nous pouvons remarquer que les 2 seuls où figure le mot compter (ou analogue) dans la formulation des objectifs sont parus en 1975, alors que dans les 9 autres, tous parus entre 1970 et 1975, il n'est pas question de comptage.
Plus récemment encore, Bong (cf. BONG 1981) écrit que : "Principalement comme une conséquence des résultats de Piaget relatifs à la conception du nombre par l'enfant, l'aspect cardinal du nombre est fortement souligné dans l'enseignement mathématique en première année d'école, alors que d'autres aspects du nombre et la simple connaissance de la suite des nombres-mots semblent être sous-estimés ",
et Schmidt (cf. SCHMIDT 1981), dans la présentation de la problématique de sa recherche sur les différents aspects du nombre naturel, rapporte nombre d'objections à la thèse de Piaget sur la genèse du nombre, en particulier à son assertion que la conservation est "une condition nécessaire pour toute activité rationnelle" (cf. PIAGET 1941): il cite, entre autres, BRYANT 1974, BRAINERD 1973,

MPIANGU 1975, BAROODY 1979, GRECO 1962a, SCHAEFFER 1974, GELMAN 1978, GINSBURG 1977. Ses premières conclusions (communication orale au congrès PME 1981) rejoignent les nôtres en ce qui concerne l'importance du comptage.

(b) En Angleterre, Green et Laxon qui consacrent leur livre, référé sous GREEN 1978, aux activités numériques ou prénumériques que l'on peut proposer aux enfants avant l'école élémentaire et à partir de 18 mois, présentent 118 occasions d'apprentissage (= lops, abréviation de "learning opportunities") dont certaines concernent directement le comptage. Ainsi:
- le lop 28 (à aborder à ~3;0) concerne le comptage mécanique (= récitation);
- les lops 62, 63, 65 (à aborder à ~4;0) concernent respectivement le comptage finalisé (i.e. celui qui répond à la question "combien ?") jusqu'à 10, la comparaison et la construction d'ensembles par comptage;
- les lops 92 et 93 (à aborder à ~5;0) consistent à compter les doigts de pieds (voir l'invariance que l'on commence à compter d'un côté ou de l'autre) et les doigts des mains;
- le lop 32, quant à lui, est destiné à encourager le passage du comptage au "subitizing", ces auteurs situant le seuil-limite de ce dernier à 2 ou 3 chez l'enfant de 3 ans.

Notons aussi la parution récente de 3 livrets d'images présentés dans ZDM 1980, livrets destinés à apprendre à des enfants de 3 à 4 ans à connaître les nombres de 1 à 10 et dont les titres sont très significatifs: "Counting birds" pour le premier (1979), "Counting monster machines" et "Counting pets" pour les deux derniers (1980).

(c) Aux Etats-Unis, nous noterons que :
- l'une des principales raisons ayant conduit à éviter le comptage, à savoir que l'enfant utilise prématurément (i.e. alors qu'il ne les conserve pas encore) les nombres, est fermement rejetée par Rising et Harkin (cf. RISING 1978) lorsqu'ils écrivent :

  "Certains éducateurs mathématiques ont chapeauté l'idée que chaque aspect appris en mathématique devait avoir une base conceptuelle solide quand il est introduit pour la première fois. Ceci est absurde, et les maîtres d'école ne devraient pas tomber dans ce piège. Le comptage est un exemple évident à faire observer";

- le réductionnisme logique de Piaget est fortement critiqué par Macnamara (cf. MACNAMARA 1975) qui, à propos des maîtres de l'école élémentaire, conclut :

  "Ma conviction est qu'ils n'aideront pas leurs élèves, et peut-être même les gêneront dans leur lutte avec l'arithmétique, s'ils essaient de baser leur enseignement sur la logique des classes. Pour les raisons mentionnées ci-dessus, la référence à l'architecture des relations entre classes tend à embrouiller celui qui essaie d'apprendre l'arithmétique. La sériation, si elle revient à arranger des objets et à les compter, peut seulement être bénéfique. Après tout, c'est comme cela que les maîtres ont toujours introduit les nombres. De manière ou d'autre, par les procédures de comptage de perles(que, étrangement, Piaget ne voit pas jouer un rôle central dans la genèse des nombres), d'addition d'un groupe de perles à un autre, de partage de perles entre différentes personnes, et d'analogues, l'enfant arrive à abstraire ce qui est pertinent et met en mouvement les opérations mentales qui construisent le système appelé nombre";

- Ginsburg (cf. GINSBURG 1977) s'oppose fermement à un apprentissage de la conservation lorsqu'il écrit :

  "La conservation est à peu près la dernière des choses qui nécessite une aide. Vous pouvez utiliser votre temps de manière plus profitable en aidant les enfants à poursuivre leurs intérêts, par exemple le comptage sur les doigts";

- ce même Ginsburg conseille aux parents et éducateurs, dans un paragraphe de GINSBURG 1977 intitulé "Donnez un appui spécial au comptage de l'enfant", de :

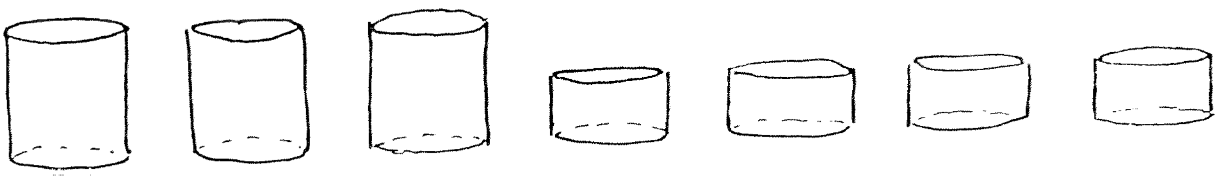
  . apprendre les rythmes de la garderie pour les 10 (à peu près) premiers nombres;
  . attirer leur attention sur les règles pertinentes s'ils ont des difficultés avec les nombres plus grands, par exemple de 10 à 100;
  . encourager les enfants à compter des objets: compter avec eux, pointer lorsqu'ils se trompent, essayer de leur faire voir que chaque objet doit être compté une et une seule fois, apprendre de bonnes stratégies (par exemple, mettre de côté les objets comptés), ne pas leur interdire d'utiliser les doigts (et même les aider);
  . ne pas craindre, à la garderie, d'aborder directement le travail arithmétique (il n'y a pas besoin d'activités préarithmétiques ou préparatoires).

(d) Dans les pays de l'Est, la psychologie de Piaget n'a évidemment pas eu la même influence. Citons par exemple l'ouvrage "Fondements de la psychologie générale", référé sous RUBINSTEIN 1946, encore récemment réédité. Le psychologue soviétique Rubinstein écrit :"La représentation du nombre chez le préscolaire suppose aussi bien le comptage que la perception directe" ou encore que "dans certains cas cette estimation (= l'estimation des quantités) se fait sur la base d'une perception de la forme spatiale de l'ensemble, dans d'autres sur la base du comptage".

Il se peut également que l'impact des mathématiques modernes n'ait pas été aussi profond. Ainsi, déjà avant 1970, Galperin avec Georijew, Salmina et Sochina (cf. TALYSINA 1973) avait élaboré un plan qui préconisait d'introduire les nombres dans l'ordre 1, 2, 0, 3 et ensuite de contruire les suivants comme successeurs de leurs prédécesseurs; ou encore, en Pologne, on introduisait toujours les 4 opérations en 1ère année d'école (cf. programmes 1970 rapportés dans KRYGOWSKA 1971). Ainsi également, l'accent a toujours été porté sur l'aspect mesure du nombre: déjà dans le plan de Galperin et al. l'initiation à la mesure était prévue avant l'introduction des premiers nombres, et encore récemment la contribution de Davydov au colloque du Wisconsin (cf. DAVYDOV 1979) ressemble à un plaidoyer en faveur de la mesure *. Tout ceci fait que le comptage n'a probablement pas subi le même discrédit dans les pays de l'Est qu'en France par exemple. Cela semble confirmé par SIEBER 1968 (= aides pédagogiques est-allemandes), réédité en 1976, ouvrage dans lequel on rappelle que : "Presque tous les enfants entrant à l'école connaissent la suite des nombres jusqu'à 10, et sont en mesure d'indiquer combien d'éléments sont contenus dans quelques ensembles. Ils savent construire, avec des objets ou des symboles réels ou graphiques, un ensemble dont on leur a indiqué le nombre inférieur à 10. Pour ce faire, beaucoup d'enfants comptent; certains d'entre eux savent compter au-delà de 10..." et on demande aux maîtres durant les premières semaines de la 1ère année scolaire d'"assurer et de systématiser les premières connaissances, multiples mais variables, des enfants sur les nombres et sur les relations entre ces derniers".
De telles "performances" à l'entrée à l'école obligatoire semblent d'ailleurs en parfait accord avec les programmes de l'école maternelle (cf. RDA 1967), puisque ceux-ci prévoient l'introduction du comptage jusqu'à 10 en grande section. Et ces programmes semblent suivis par les livres pour maîtres.

---

* Davydov indique en particulier qu'un critère fondamental de l'acquisition du nombre est la prise de conscience de sa variation en fonction de l'unité de mesure. Il propose, entre autres, comme test de faire déterminer à l'enfant combien de grands verres d'eau sont contenus dans la série suivante de verres, un petit verre étant la moitié d'un grand :



En témoigne la progression pour l'apprentissage du comptage à l'école maternelle, proposée dans SCHINKOETHE 1980 :

- compter en déplaçant les objets;
- " " touchant les objets;
- " " montrant (sans toucher) les objets;
- " " ne bougeant que les yeux.

(e) Pour terminer, citons de didacticien hollandais Freudenthal (cf. FREUDENTHAL 1973):

> "La suite des nombres est la pierre de fondation des mathématiques, historiquement, génétiquement, et systématiquement. Sans la suite des nombres il n'y a pas de mathématiques. Si certains textes mathématiques modernes suggèrent une autre vue, la raison est que leurs auteurs interprètent mal les mathématiques. Même les petits enfants sont mieux informés qu'ils ne le sont. Le comptage devient bientôt une nécessité théorique. L'enfant compte bientôt plus loin que ne l'exige la nécessité pratique du comptage".

ou encore :

> " Compter est bientôt suivi de l'arithmétique la plus élémentaire. Additionner, c'est compter en avant, soustraire, c'est compter en arrière. Ceci est le principe fondamental des anciennes didactiques. C'est un principe sain, inspiré par l'aspect compteur du nombre, bien qu'il soit complètement négligé par les didacticiens des nouvelles mathématiques".

CHAPITRE XII : RESUME - CONCLUSION

" Que la conclusion soit agréable ou scandaleuse est affaire de sensibilité personnelle; ce qui importe est de savoir si elle correspond à la réalité".

A. Jacquard, 1978.

XII.- Résumé - Conclusion

Cette étude nous a permis

(1) d'établir quelques résultats sur le développement du comptage chez l'enfant. Rappelons que :

- la plupart (au moins 75%) des enfants récitent, vers 4;3, la suite des nombres jusqu'à 4 au moins; vers 4;9, jusqu'à 5 au moins; vers vers 6;3, jusqu'à 14 au moins;
- chez les petits (3;6 $\pm$ 6) et pour 3, les principes de bijection et de suite stable sont mieux respectés que le principe cardinal;
- l'ensemble des 3 principes du "Comment compter" est respecté par la plupart des enfants vers 5;1 ans (pour le nombre 5).

(2) de soutenir l'hypothèse que le comptage joue un rôle important dans la dénomination des premiers nombres et dans la résolution des premiers problèmes par l'enfant. Nous pensons en particulier que la dénomination des premiers nombres est le résultat d'un long et difficile développement,

1 an et 3 mois pour passer de 2 à 3
4 mois pour passer de 3 à 5
11 mois pour passer de 5 à 7

dépendant plus d'un comptage-pointage actif, finalement intériorisé, que d'une perception passive ou d'un nombre qui "illuminerait" (voir XI,B,1,c) l'enfant.

Les résultats ou hypothèses ainsi trouvés ou émises nous ont alors conduit à réfléchir sur le comptage de l'enfant et à analyser sa didactique ou sa non- didactique. A ce dernier propos, nous avons souligné l'incorrection de beaucoup d'arguments ou moyens utilisés pour discréditer le comptage. Ce dernier fait, et bien que le comptage, par suite de son apprentissage familial et du mimétisme qu'il implique, a toujours été un peu considéré comme l'un de ces savoirs que M. Verret (cf. VERRET 1975) qualifie de gnoséologiquement non scolarisable, voire comme un savoir gênant dans la mesure où les enfants ont des niveaux très différents à leur entrée à l'école, nous amène à penser que la vision des réalités a pu, en particulier chez certains réformateurs, être marquée par des affinités d'opinions, d'éthique, ... (ou aussi des intérêts économiques !)

Contrainte , répétition, hiérarchie étant idéologiquement dépréciées (cf. ATLAN 1979), on comprend dès lors assez bien pourquoi le comptage, ainsi associé à anti-évolution, obsolescence, ... a pu être discrédité, d'autant (et peut-être même surtout) qu'une telle dévalorisation était nécessaire pour justifier une introduction cardinale des petits nombres ou une longue pratique d'activités prénumériques.

Lorsque nous aurons encore rappelé que :

- vers 4;9, les 2/3 des enfants résolvent des problèmes verbaux additifs, statiques comme $Ani^+(2,1)$ ou dynamiques comme $Pou^+(2,1)$, ainsi que des problèmes soustractifs dynamiques comme $Bon^-(3,1)$;
- vers 6;3, la quasi-totalité des enfants résoud un problème verbal, comme $Bon^-(5,2)$, dont les données et résultat ne dépassent pas 5; la moitié, des problèmes verbaux comme $Pro^+(4,2)$, $Pro^+(2,4)$ ou $Bon^-(7,2)$ dont les données ou résultat peuvent dépasser 5, ou encore les 3/4, un problème concret comme $Jeu^-(5,2)$;
- les problèmes verbaux, comme Bil^-, nécessitant une analyse logique préalable, dépassent les possibilités de la plupart des enfants de maternelle,

nous pouvons conclure que <u>les enfants utilisent les nombres</u> (compteurs ou non) <u>avec bonheur</u>, c'est-à-dire avec efficacité (précisée par nos résultats statistiques) et passion (soulignée dans MORF 1962), parfois dès l'âge de 3 ans, et que <u>certains arguments</u> avancés <u>pour ne pas les introduire à l'école avant l'âge de 6 ans 1/2- 7 ans</u> (si l'on tient compte des faits que ni le comptage, ni les nombres ne sont plus mentionnés dans les Instructions Officielles 1977 de maternelle, et que le 1er trimestre du CP est souvent consacré à des activités non- numériques) <u>ne nous paraissent pas convaincants</u>.

De plus, et bien que beaucoup de questions importantes relatives au comptage n'ont été qu'effleurées

Ex: Le problème du coût d'un apprentissage des premiers nombres par comptage (comparativement à un apprentissage par perception de forme) ou le problème de l'intérêt d'un apprentissage initial, à titre "intermédiaire" (cf. EL BOUAZZAOUI 1978), des premiers nombres par perception de forme

ou même n'ont pas été abordées

Ex: La question de savoir si le comptage est plus adapté aux enfants faibles comme semble le penser Wallon (cf. WALLON 1962) lorsqu'il souligne que la forme (i.e l'une des 2 manières de passer de la pluralité au nombre, l'autre étant la constitution de séries linéaires ou circulaires dans lesquelles c'est la répétition qui joue le rôle principal) peut être un moyen de reproduire des quantités d'éléments composants (à condition que leur nombre ne soit pas trop grand), mais seulement chez l'enfant intelligent.

Au cours de cette étude, nous pensons, avec Moser (cf. MOSER 1980 b), pouvoir dire qu'il serait sage que l' Instruction prenne en compte (ou au moins tienne davantage compte d') un phénomène aussi populaire et naturel que le comptage .

A N N E X E S

ANNEXE 1

couche sociale* / groupe d'âge	A	B	C
6;3	19	9	4
5;9	18	10	4
5;3	22	8	2
4;9	21	8	3
4;3	19	13	0
3;9	14	12	6
3;3	13	13	6

Tableau : Origine socio-professionnelle des 224 enfants de l'expérience.

Couche A : agents de la SNCF (49); ouvriers qualifiés: maçons, mécaniciens, ... (46); employés subalternes: employés commerciaux,.. (24); ouvriers (4); autres (3).

Couche B : employés qualifés: comptables, ... (21); militaires sans distinction de grade (12); fonctionnaires: instituteurs, ... (11); techniciens et métiers très spécialisés (11); artisans, commerçants,...(10); autres: correspondant presse, ...(8).

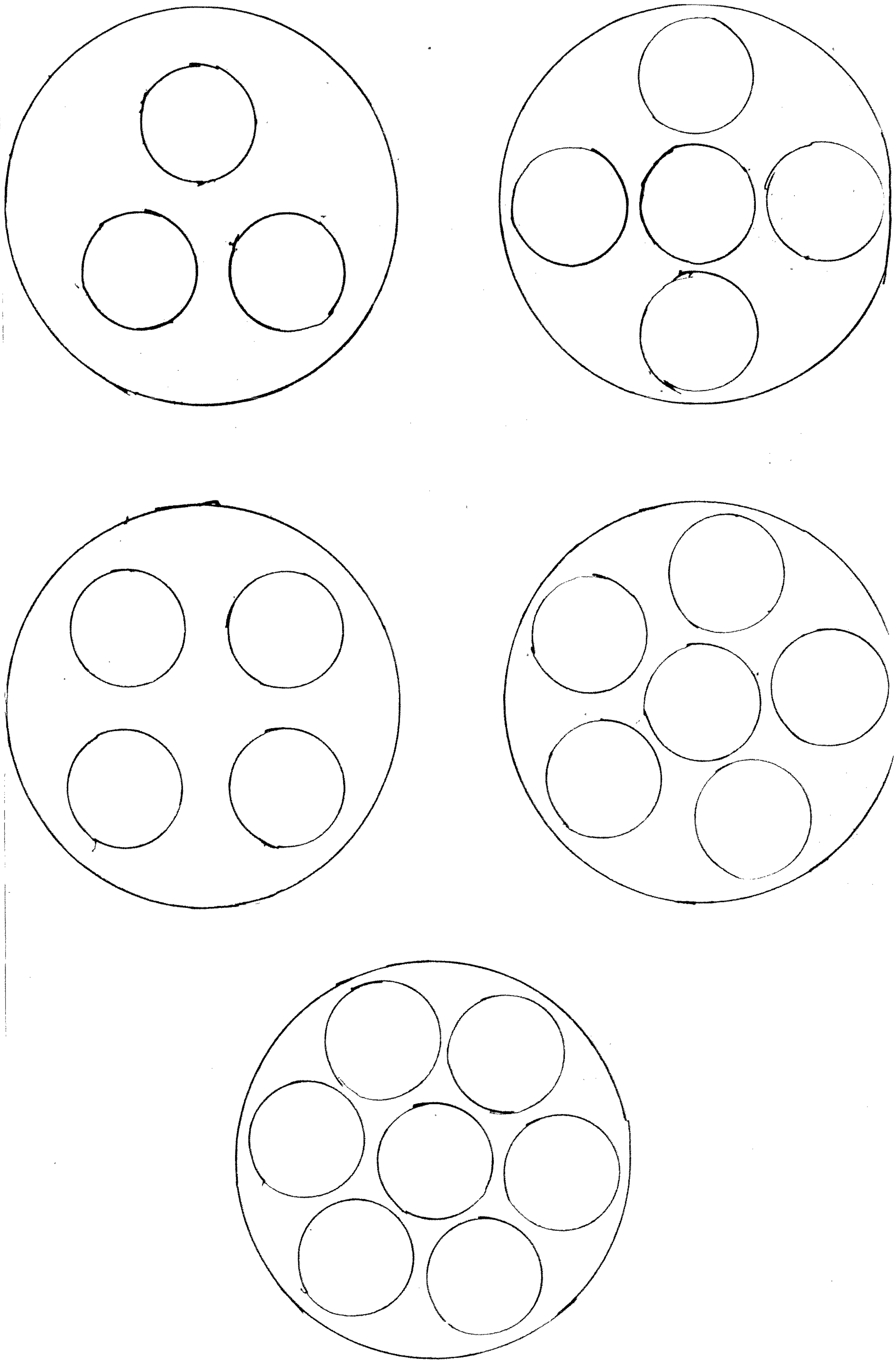
Couche C : ingénieurs (9); directeurs (5); médecins (2); avocats (2); dentistes (2); professeurs (2); pharmacien (1), pasteur (1), artiste (1).

Proportion en catégories socio-professionnelles de la population active française (donnée dans INRP 1979): agriculteurs exploitants: 7,6%; salariés agricoles: 1,7%; patrons de l'industrie et du commerce : 7,8%; professions libérales, cadres supérieurs:6,7%; employés: 17,6%; cadres moyens: 12,7%; ouvriers:37,7%, personnel de service:5,7%; autres catégories: 2,4 %.

* Cette classification en 3 couches est proposée par le Service de la Recherche Sociologique suisse (cf. PERRET-CLERMONT 1979, p. 212).

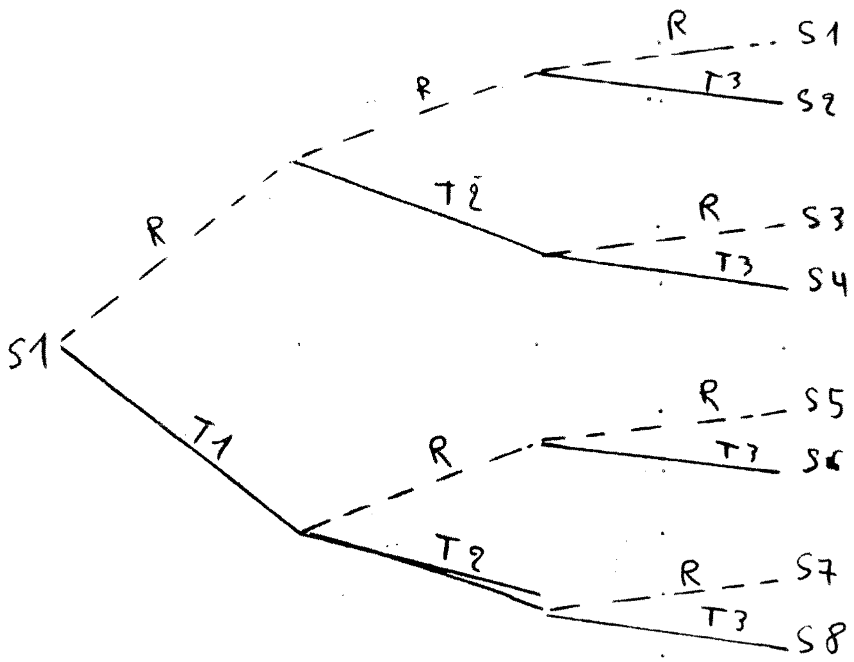
ANNEXE 2

Les configurations de jetons (grandeur réelle)



ANNEXE 3

Les 8 suites de problèmes posées aux moyens et petits



S1: Jeu$^-$(3,1); Jeu$^-$(3,2); Jeu$^-$(4,3); Jeu$^-$(5,2); Pou$^+$(2,1); Bon$^-$(3,1); Ani$^+$(2,1)

R : transformation identité

T1 : permutation de Pou$^+$(2,1) et Ani$^+$(2,1)

T2 : permutation de Jeu$^-$(4,3) et Jeu$^-$(5,2)

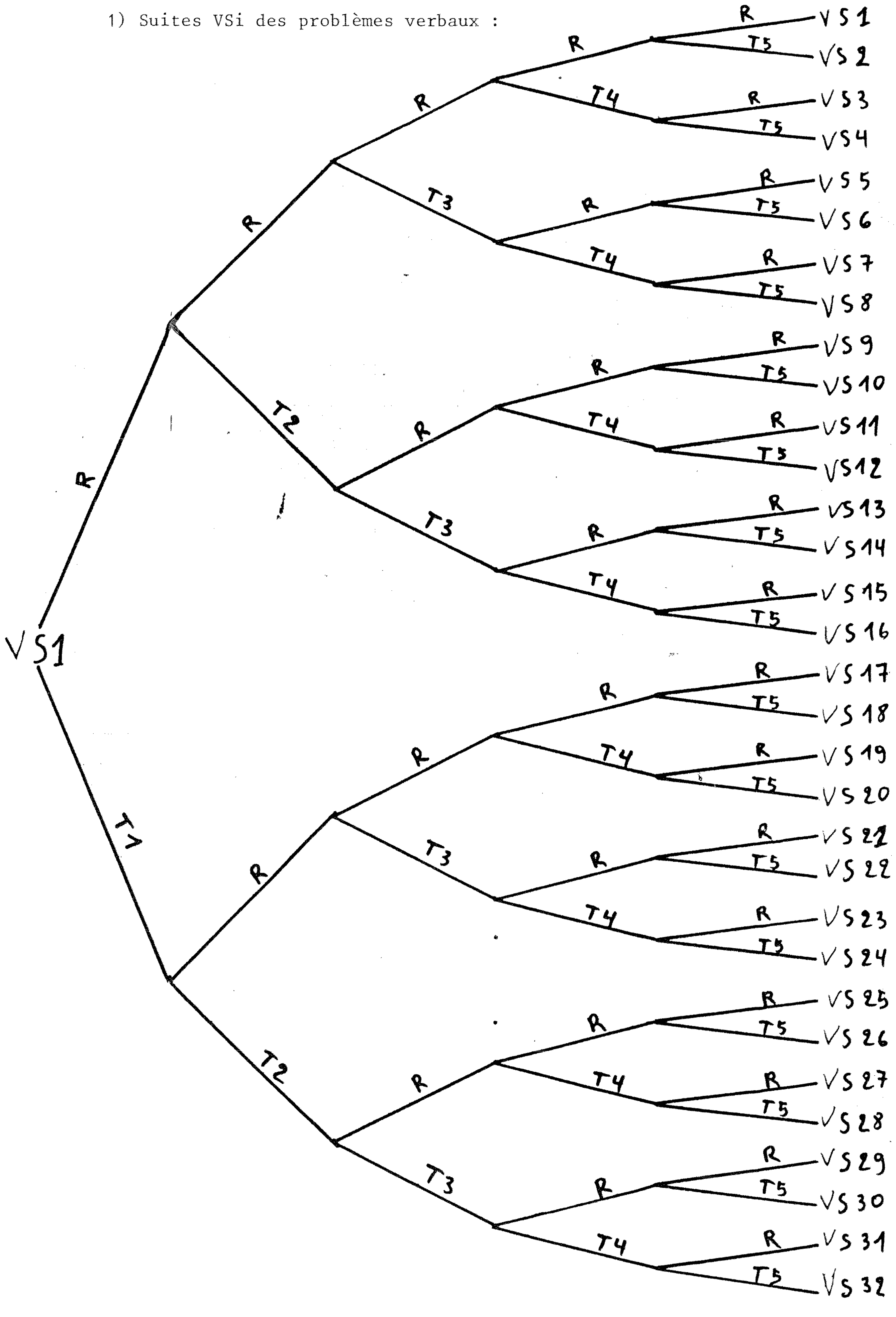
T3 : permutation de Jeu$^-$(3,1) et Jeu$^-$(3,2)

Exemple :

S6 est la suite : Jeu$^-$(3,2); Jeu$^-$(3,1); Jeu$^-$(4,3); Jeu$^-$(5,2); Ani$^+$(2,1); Bon$^-$(3,1); Pou$^+$(2,1).

ANNEXE 4 : Les 32 suites de problèmes posées aux grands

1) Suites VSi des problèmes verbaux :



VS1 : a) $Bil^{-}(3,1)$; $Ani^{+}(4,2)$; $Bon^{-}(5,2)$

c) $Bil^{-}(5,2)$; $Fru^{+}(2,4)$; $Bon^{-}(7,2)$.

Transformations sur les problèmes verbaux:

R : Transformation identité

T1 : Permutation des problèmes $Bil^{-}(3,1)$ et $Bon^{-}(5,2)$ d'une part, des problèmes $Bil^{-}(5,2)$ et $Bon^{-}(7,2)$ d'autre part.

T2 : Permutation des problèmes $Bil^{-}(3,1)$ et $Bil^{-}(5,2)$

T3 : Permutation des problèmes $Ani^{+}(4,2)$ et $Fru^{+}(2,4)$

T4 : Permutation des problèmes $Bon^{-}(5,2)$ et $Bon^{-}(7,2)$

T5 : Remplacement de $Ani^{+}(4,2)$ par $Fru^{+}(4,2)$ et de $Fru^{+}(2,4)$ par $Ani^{+}(2,4)$

2) Les jeux sont intercalés dans l'ordre :

$Jeu^{-}(3,1)$; (3,2); (4,3); (5,2); (7,2) dans les suites VS4p+1

$Jeu^{-}(3,2)$; (3,1); (4,3); (5,2); (7,2) dans les suites VS4p+2

$Jeu^{-}(3,1)$; (3,2); (5,2); (4,3); (7,2) dans les suites VS4p+3

$Jeu^{-}(3,2)$; (3,1); (5,2); (4,3); (7,2) dans les suites VS4p+4

($p \in \{0, 1, \ldots, 7\}$)

3) On obtient alors les 32 suites Si

<u>Ex</u> : S28 a) $Bon^{-}(7,2)$; $Fru^{+}(4,2)$; $Bil^{-}(5,2)$

b) $Jeu^{-}(3,2)$; (3,1); (5,2); (4,3); (7,2)

c) $Bon^{-}(5,2)$; $Ani^{+}(2,4)$; $Bil^{-}(3,1)$.

ANNEXE 5 : Le cas de Dav (4;6$^+$)

1) Entretien standardisé

Dav récite "1,3,5,4" à l'épreuve 1.

A l'épreuve 2, il dénomme successivement en pointant toujours correctement du doigt:

5 $\rightarrow$ "2, 2 et 1 au milieu"
Et c'est combien alors ? "On voit rien".

3 $\rightarrow$ "Il y en a 1, 1 et 1 et puis voilà". Et ça fait combien en tout ?
"Je sais pas".

1 $\rightarrow$ "1"

4 $\rightarrow$ "Là, il y en a 2 et là encore 2"

2 $\rightarrow$ "2"

A l'épreuve 3, il réussit Jeu$^-$(3,1), Jeu$^-$(3,2) et Jeu$^-$(4,3) sans difficulté. A Jeu$^-$(5,2), il hésite d'abord, puis répond "2 et puis 1 au milieu". Alors, ça fait combien ? "Ca fait beaucoup"; puis, il reprend sa réponse "2 et 1 au milieu". Quand l'expérimentateur montre les jetons cachés, il les prend et reconstitue la figure initiale. Il réussit alors les problèmes verbaux Pou$^+$(2,1) et Bon$^-$(3,1) en se servant des doigts, mais sans difficulté, et pour Ani$^+$(2,1), répond: "2 lions et 1 tigre". C'est combien en tout ? "Je sais pas". C'est combien d'animaux s'il y a 2 lions et 1 tigre ? "2 plus (montre 1 doigt) égale 3". L'expérimentateur répète alors l'énoncé: Dav montre trois doigts. C'est combien ?"Ca, c'est le tigre (1er doigt), ça, le lion (2e doigt) et ça, le lion (3e doigt)".

A l'épreuve 4, il compte-pointe

5 $\rightarrow$ "1,2,6,7 et 1 au milieu". Alors combien ? "Ca fait 7", puis spontanément, "Il y en a pas 7". Alors combien ? "1,2,1,2 et 1 au milieu".
Alors, combien en tout ?"Je sais pas".

3 $\rightarrow$ "1,2,1". Alors combien ? "6 petits jetons". C'est 6 ? "Non". Alors, combien ? "1,2 et 5" (en recomptant-pointant).

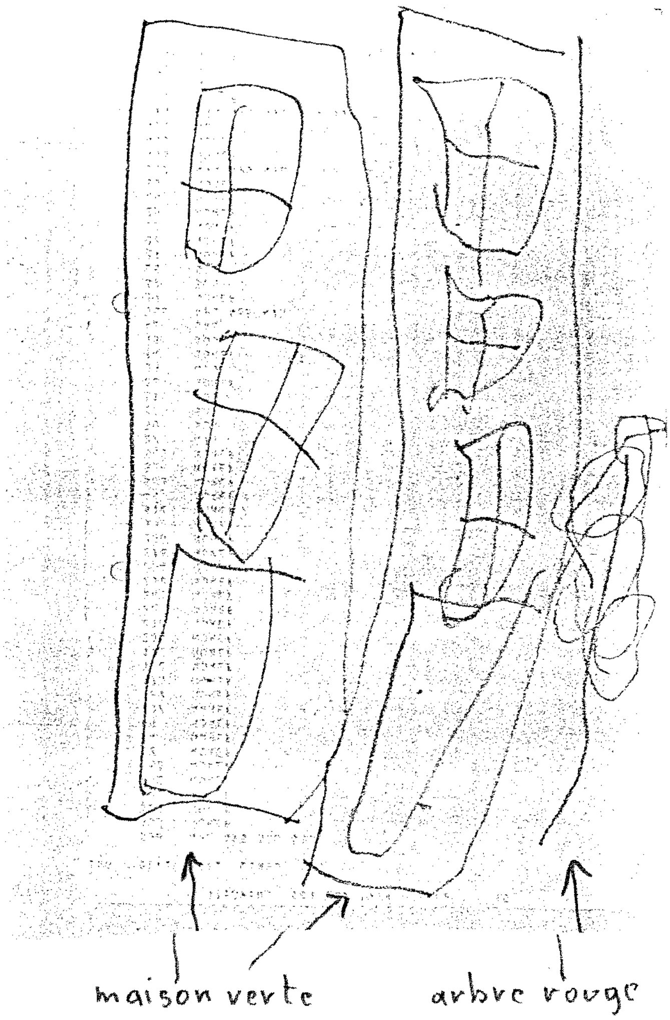
2) Epreuve complémentaire

Dav met, successivement, 1 puis 2 jetons dans une tirelire et doit trouver combien il y en a. Réponse: "Beaucoup". C'est combien beaucoup ? Il montre 3 doigts et dit en même temps, "il y en a 3".

Même exercice avec 2 et 2. Réponse: Dav montre 4 doigts. C'est combien ? Il montre 2 doigts et rajoute "plus égale 1 et l'autre ".
Même exercice avec 2 et 3. Réponse: Dav montre 5 doigts. Tu sais pas les compter ? Il pointe chacun sans rien dire. Alors combien ? "Je sais bien qu'il y en a beaucoup".

3) Remarques

Dav est un enfant qui n'arrive pas à s'intégrer au groupe-classe: dans la cour, il joue tout seul; à la fête de fin d'année, alors que sa classe présente une ronde, il danse pour sa part tout seul ! Dans un exercice scolaire où la consigne était de "dessiner 3 quelques choses (n'importe quoi, pourvu qu'il y en ait 3)", tous ses camarades dessinent des objets de même nature, Isa (4;9) dessine 3 fleurs, Bla (4;9) 3 bonhommes, San (4;6¯) 3 chats, ...
Dav dessine 2 maisons vertes et 1 arbre rouge.



ANNEXE 6 : le cas de Mar (5;10)

1) Entretien avec Mar à 5;6

A 5;6, Mar arrive seulement à compter-réciter jusqu'à 4, alors qu'elle manifeste déjà des possibilités logico-verbales supérieures à celles (moyennes) des enfants de son âge. Elle réussit par exemple un difficile (cf. FISCHER 1979) problème de transformation avec recherche de l'état initial, et a déjà un bon niveau à un test d'inclusion (voir annexe 7). Par contre, elle échoue à un test de correspondance (voir X,C,2).

2) Entretien standardisé avec Mar à 5;10

Epreuve 1: elle récite jusqu'à 13.

Epreuve 2: dénomination de

7 ⟶ réussite irrégulière, car elle trouve 7 en comptant pointant (doigt) 2 fois le jeton-départ et pas le jeton central;

5 ⟶ compte-pointe et trouve 4 en oubliant le jeton central (2 fois). Trouve 5 au cours d'un troisième comptage-pointage spontané, mais la réussite est de nouveau irrégulière (même erreur que ci-dessus);

3 ⟶ "c'est 3" instantanément;

6 ⟶ compte-pointe et trouve 5 en passant trop vite sur le jeton central. Sûre ? elle recommence et compte cette fois-ci les 2 derniers pour 1 seul et trouve donc de nouveau 5;

4 ⟶ "4" instantanément. Tu les as comptés ? "Je sais parce que 2 par 2, ça fait 4.

Epreuve 3:

$Bil^{-}(5,2)$ ⟶ 5

$Ani^{+}(4,2)$ ⟶ "D'abord 1, alors 2, après 3, après 4, après, c'est 5" Tu es sûre ? "oui:1,2,3,4,5. Voilà: ça fait 5 animaux";

$Bon^{-}(7,2)$ ⟶ "1,2,3,4,6,7 (en pointant la table). Après il en mange 2. Après 1,2,3,4,5: non ça fait plus que 4 parce qu'il en a mangé 2";

$Jeu^{-}(3,1)$ ⟶ 3

$Jeu^{-}(3,2)$ ⟶ 1

$Jeu^{-}(5,2)$ ⟶ 2 (pour 5, elle avait dit 4). Pourquoi ? "Parce que ici il y en a 2, alors dans l'autre, ça fait aussi 2. ALors ça fait 4".
Lorsqu'on lui demande de vérifier (main ouverte) combien il y en avait, elle les compte, mais doit s'y prendre 3 fois pour trouver 5;

$Jeu^{-}(4,3) \longrightarrow$ 1

$Jeu^{-}(7,2) \longrightarrow$ "Il y en a 3 et puis 1 autre: 4, et puis il y en a encore des autres. Il y en a pas des autres". Alors, c'est combien ? "3";

$Bil^{-}(3,1) \longrightarrow$ "Elle en a rajouté 2";

$Fru^{+}(2,4) \longrightarrow$ Elle pointe la table: "1,2,3,4 : ben oui, les plus de fruits, c'est les oranges". Combien de fruits en tout, je te demande ? "1,2,(marque un temps d'arrêt), 3,4 (en pointant toujours la table): il y en a 4".
Répétition: "7". Sûre ? approuve . Pourquoi ? "Parce qu'il y avait que 2 pommes et 4 oranges";

$Bon^{-}(5,2) \longrightarrow$ "1,2,3,4,5 (en pointant toujours la table) . Alors, il mange 2 ?". Oui (= expérimentateur). "Et ben, il lui en reste plus que 3".

Epreuve 4: comptage-pointage de

7 $\longrightarrow$ "1,...,6" (elle oublie le jeton central). Alors, combien ? "6";

5 $\longrightarrow$ (après encouragement à bien faire attention) "1...5". Alors, combien ? "5". Poq ? "Pareil" Pourquoi ? "Il y en a toujours pareil dans la boîte".

<u>Question complémentaire</u> : Pourquoi tu sais pas encore bien compter ? "Ma soeur elle veut pas m'apprendre". Pourquoi ? "Elle veut tout le temps jouer".

ANNEXE 7 : Tests d'inclusion

Test F : 2 pommes et 7 oranges

Test D : 2 perles rouges et 20 perles bleues, toutes en plastique

1) Benoît (5;4):

Test F : Est-ce qu'il y a plus d'oranges que de fruits ? "Les oranges, c'est des fruits". Et alors ? "Il y a des fruits, c'est tout".
Répétition: "Oui". C'est sûr ? "Pas trop. Je crois bien que c'est le contraire de ce que j'ai dit: il y a plus de fruits que d'oranges". Pourquoi ? "Parce que les oranges, c'est aussi des fruits".

Test D : Est-ce qu'il y a plus de perles bleues que de perles en plastique ? "On va voir si les 2 (= rouges), elles sont en plastique. (Il les fait rebondir sur la table et répond par l'affirmative). Je dis qu'il y a plus de plastiques que de bleues." Pourquoi ? "Parce qu'elles sont toutes en plastique et les bleues aussi en plastique".

2) Mar (5;10) à 5;6

Test D : Question ci-dessus: "Ah ben ils sont tous en plastique". Et alors ? "Il y a plus de bleues que de rouges". Mais moi, je voudrais savoir s'il y a... (même question) ? "Mais elles sont toutes pareilles!" Et alors ? "Ils sont tous pareils".

Test F : Question ci-dessus: "Ils sont tous des fruits". Et alors ? "Ils sont tous des fruits". Si un monsieur a beaucoup faim, est-ce qu'il va manger tous les fruits ou toutes les oranges ? "Il mange tous les fruits" (après hésitations). Pourquoi ? "Il mange aussi les oranges. Parce qu'il y a plus de fruits". Alors, il y a plus de fruits que d'oranges ? "Oui". Et pourquoi ? "Ben, c'est tous des fruits".

Retour au Test D

Si je fais un collier avec toutes les perles bleues ou un collier avec toutes les perles en plastique, lequel sera le plus grand ? "Le collier avec toutes les perles en plastique."Pourquoi ? "Parce qu'il y en a plus". Alors, il y a plus de perles bleues que de perles en plastiques ou plus de perles en plastiques que de perles bleues ? "Plus de perles en plastique".

3) Remarque : Pour les 2 enfants, il s'agit en fait d'une deuxième passation. Lors de la première, ils n'avaient pas, surtout Benoît, répondu de manière aussi convaincante, mais l'expérimentateur n'avait pas du tout insisté, d'une part parce que le test arrivait à la fin d'un entretien déjà long, d'autre part, parce qu'il ne les croyait pas capables de réussir (ceci explique l'âge, 5;3 $\longrightarrow$ 5;4, de Benoît).

ANNEXE 8 : Description succincte de la théorie de l'apprentissage de Galperin et de ses résultats

1) La théorie de la formation par étapes des activités intellectuelles de Galperin conduit, en didactique, à distinguer essentiellement 3 étapes :

a) Action extérieure:

Les élèves disposent d'une fiche d'orientation (ou de consignes orales pour les préscolaires) sur laquelle sont énumérées les conditions nécessaires et suffisantes caractéristiques du concept à apprendre.
On leur demande de vérifier si chacun des objets qu'on leur soumet possède les caractéristiques du concept.

b) Action effectuée à haute voix :

Les élèves vérifient, à partir de leur fiche et à haute voix, si un objet possède les caractéristiques souhaitées. Dès qu'ils sont familiarisés avec les caractéristiques du concept, on leur demande d'abandonner la fiche.

c) Action interne ou mentale :

Finalement on leur demande de renoncer au langage extériorisé: l'élève travaille alors silencieusement, pour soi, et ne donne que le résultat de son travail.

2) Résultats d'un tel apprentissage :

Un tel apprentissage conduit, et c'est alors que Galperin considère que le concept est maîtrisé, l'élève à ne plus s'interroger sur une caractéristique particulière du concept, mais à répondre, "d'un coup d'oeil", grâce à une opération mentale "raccourcie" (Galperin), "réduite" ou "automatisée" (Lompscher), si un objet donné relève du concept ou non.
Une autre conséquence importante de cet apprentissage est qu'il conduit à des généralisations s'appuyant uniquement sur les propriétés caractéristiques des concepts que contenait la fiche d'orientation et non pas sur des bases perceptives fausses.

Exemple 1 : Galperin présente dans la phase d'apprentissage des tés exclusivement dans les positions $\top$ et $\perp$. Lors de l'épreuve de contrôle, il présente les tés dans toutes sortes de positions :  ... Les enfants répondent tous correctement, même s'ils mettent un peu plus de temps et si l'un ou l'autre est obligé de retouner à une étape plus primitive en nommant à haute voix les caractéristiques des droites.

Exemple 2 : Tjoplenkaja définit, à partir de figures de forme, couleur et grandeur différentes, mais toutes en bois, des concepts artificiels à partir des 2 variables (hauteur et surface). Ainsi, une figure donnée sera "mup" si elle est grande et haute, "dek", si elle est petite et haute,...
Lors des épreuves de contrôles, elle présente de nouvelles figures en métal, verre, ...
Il s'avère que le critère "être en bois", que les enfants (5 à 6 ans) ont pu percevoir commun à tous les objets au cours de la phase d'apprentissage, n'a pas conduit les enfants à des jugements erronés et ils résistent même aux contre-suggestions de l'expérimentatrice.

Références : GALPERIN 1957 et 1976, LOMPSCHER 1973, PIPPIG 1971, TJOPLENKAJA 1973, ZECH 1977.

ANNEXE 9 : Les limites de la p.g.d (d'après les didacticiens)[1]

limite[2]	niveau ou âge	référence[3]		page	commentaires[4]
4	tout âge	BUETTNER	1868	18	il est impossible à l'esprit humain de saisir simultanément et sans compter plus de 4 objets
3	CP	LAY	1898	93	d'après un résultat expérimental (boules en ligne) après une demi-année d'école
3	tout âge	KNOCHE	1899	33	sans les mots-compteurs nous ne dépasserions guère 3
5	adulte	GERLACH	1914	50	peut-être plus, mais seulement reconnaissance; la représentation est limitée à 4.
4	pré-sco-laire	KUEHNEL	1922	12	préscolaire:4; scolaire et homme naïf : 5; adulte:6.
3	CP	HENCK	1928	9	résultat expérimental (voir IX,A,5,b)
4	CP	WINKLER	1930	26	apprentissage nécessaire
3	EM CP	LACOUR	1934	11	vision simultanée 2-3 facile, mais plus possible à partir de 4 ou 5.
3	CP	OEHL	1935	317	appréhension simultanée
5	CP	MORGENTHALER	1963	4	la vision simultanée ne dépasse pas 5
6	CP	TOUYAROT	1967	37	un examen global ne permet de préciser que les nombres de 1 à 6
4	EM	BRAUNER	1969	87	4 est certainement le nombre le plus élevé qui permette une reconnaissance immédiate
5	CP	PICARD	1970	31	Jusqu'à 5, on peut dénombrer globalement A partir de 6, cela est quasi-impossible
5	CP	NOEL	1970	fiche F5	appréhension globale très facile jusqu'à4; moins aisée avec 5 et surtout 6 éléments
5	EM	BROUSSEAU	1972	43	vision globale directe jusqu'à5 (comparaison numérique de collections)
5	CP	EILLER	1972	148	la reconnaissance globale permet de comparer visuellement 2 collections de 1 à 5 éléments

limite (2)	niveau ou âge	référence (3)		page	commentaires (4)
6	CP	MONTEILLET	1973	47	reconnaissance globale(limite déduite indirectement d'après la présentation des nombres)
4	6 ans	BROUSSEAU	1977	2	perception immédiate du cardinal s'il est inférieur à 5 et $\neq 0$ (et si angle visuel petit)
5	CP	GOERGLER	1978	79	reconnaissance globale visuelle
6	CP	BESSOT	1978	17	appréhension du nombre de 0 à 6 (ou 7) par perception globale.

Notes :

(1) Presque tous les didacticiens sont des auteurs d'ouvrages pour le CP ou l'EM (= école maternelle).

(2) Cette limite n'est pas toujours indiquée nettement et directement : c'est pourquoi nous donnons parfois quelques indications complémentaires dans la colonne "commentaires" et indiquons la page précise à laquelle nous nous référons.

(3) Pour les dates des références, voir REFERENCES (Avertissement).

(4) Il s'agit le plus souvent de citations abrégées.

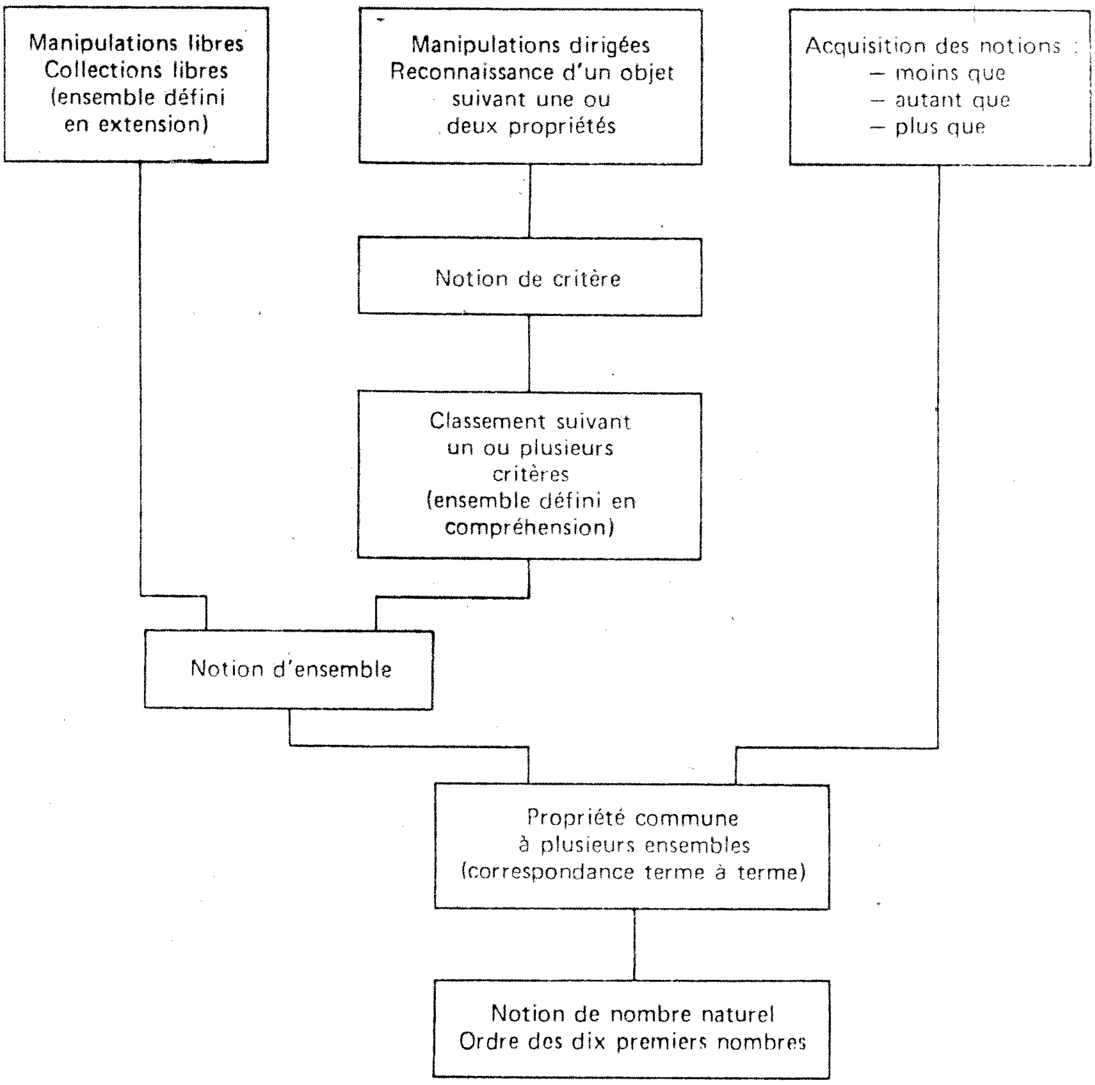
Remarques : LANNE 1971 parle (p.95) d'acquisition globale, indépendante de toute idée de groupement ou d'écriture chiffrée, à propos des premiers cardinaux, mais n'indique pas de limite précise. Il donne cependant l'exemple de 7, ce qui permet de penser que cette limite est au moins égale à 7.

GUYOT 1980 propose une présentation globale des nombres $<$ 10. Mais cet auteur ne dit pas comment l'enfant doit, ou peut, s'y prendre pour reconnaître par exemple un ensemble de 9 objets, ou encore pour compléter un "ensemble", initialement vide, avec 9 objets (exercices du livre pour élèves).

ANNEXE 10: Organigrammes des activités conduisant à la notion de nombre

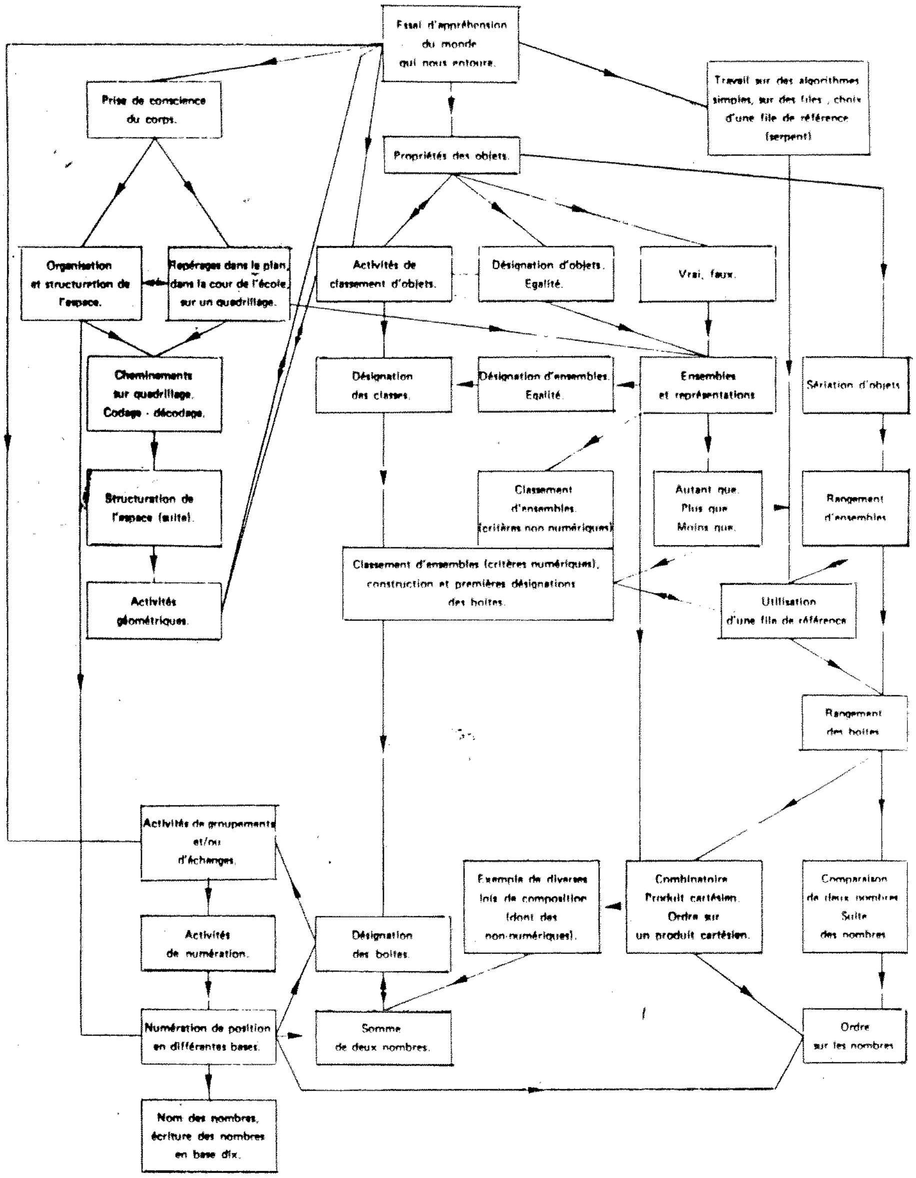
NOTRE ORGANIGRAMME

Il se complète lentement mais sûrement, voilà comment on pourrait l'envisager maintenant :



Réf.: MARCAULT-DEROUARD 1974, p.55.

Schéma montrant comment les activités mathématiques s'imbriquent entre elles dans les classes de Cours Préparatoire où s'est déroulée l'expérimentation

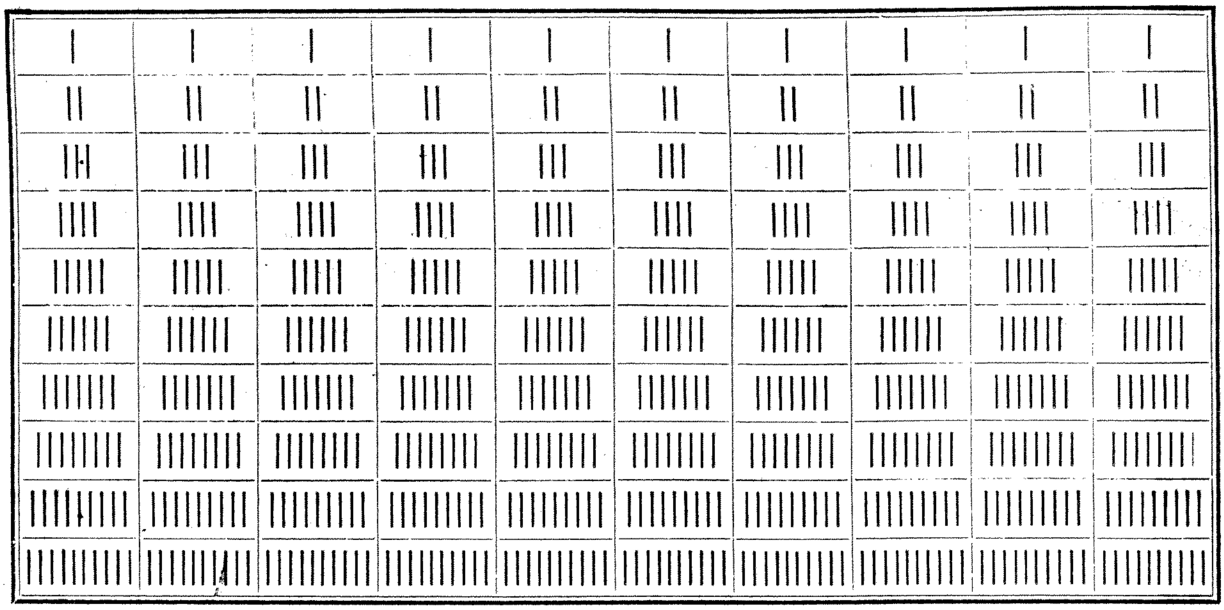


Réf. : COMITI 1977b, p.198

ANNEXE 11 : Visualisation des nombres

1) Une table d'unités de Pestalozzi (réf: BUETTNER 1868)

Pestalozzis Einheitentabelle.

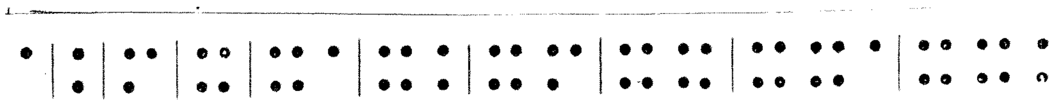


2) Résultats des travaux comparatifs de Lay (réf: LAY 1898)

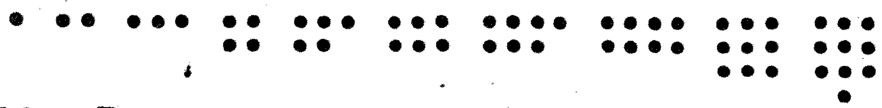
1er type de visualisation		2e type de visualisation		Nombre d'enfants
Nom	Nombre de fautes	Nom	Nombre de fautes	
Lay	194	Born	247	165
Lay	239	Beetz	375	147
Lay	7	traits alignés	107	58
Born	28	traits alignés	451	non indiqué (exp. de Walsemann)
Born	14	doigts	51	49
Born	176	points alignés	408	~ 200

3) Les différentes constellations (en Allemagne, au 19e siècle)

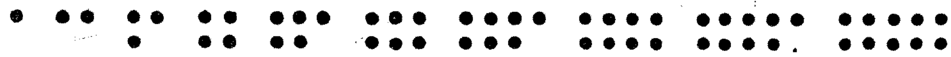
F1 LAY



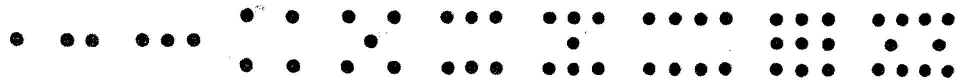
F.2 Busse



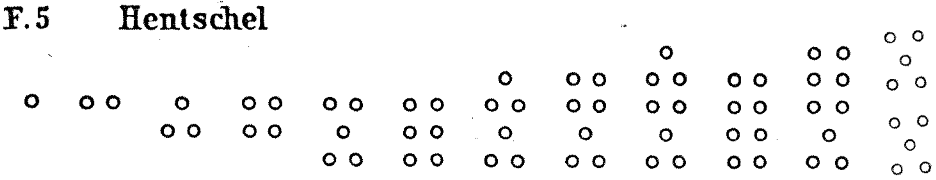
F.3 Born



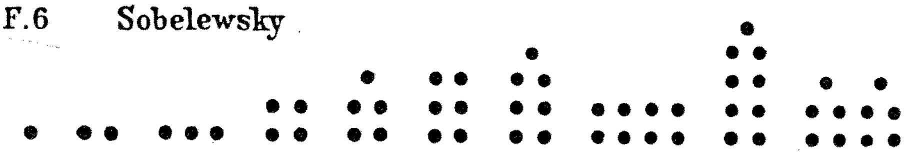
F.4 Böhme



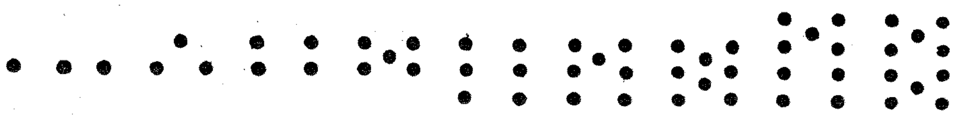
F.5 Hentschel



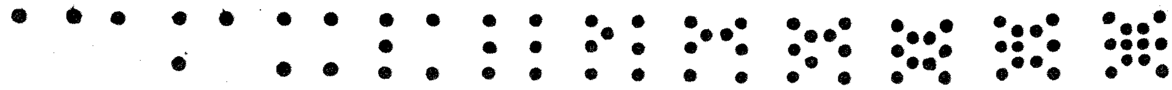
F.6 Sobelewsky



F.7 Kaselitz



F.8 Beetz



(Réf: LAY 1898 + BUETTNER 1868)

Quelques dates: Busse (1756-1835); Hentschel (1804-1875); Sobelewsky (1808-1869); Boehme (1816- 1892); Born (1833-1877).

(Réf. LIETZMANN 1912)

ANNEXE 12 : Les constellations dans les livres de calcul (EM,CP) parus entre 1945 et 1970

1) Livres privilégiant les constellations construites à partir de

- "Calcul" (CP:1er cahier) par Ardiot, Wanauld, Budin, Mme Pruchon; Hachette, 1963

  sauf 8 :

- "La ronde des nombres" (CP et 11e: Méthode et exercices de calcul) par R. et S. Brandicourt; Bourrelier, 1956

  pour 8, aussi: ; pour 9, aussi

- "J'apprends les nombres", par A. Chatelet, nouvelle édition conforme aux programmes 1945-1946, Bourrelier, 1947.

- "Le nouveau calcul vivant" (Premier livre), par L. et M. Vassort; Hachette, 1960.

- "Pas à pas de 1 à 100" (méthode de calcul: CP, 11e des lycées), par H. Morgenthaler, Mme Isnard; Istra, 1948.

  sauf pour 6 :

2) Livres privilégiant les constellations de Born

- "Mes premiers comptes" par F. Brachet, M. Bréaut et Mme M. Bréaut; Didier, 1953

- "Jeux et travaux de calcul" (CP, EM) par E.Barbe; Sudel (Bordas), 1961.

3) Livres privilégiant les constellations de Lay

- "Le calcul facile et vivant" par G.Lacour; 6e édition, Even, 1954.

- "Arithmétique - CP" par une réunion de professeurs; Ligel, 1968.
  (au lieu d'espacer les groupes de 4, changement de couleur d'un groupe à l'autre)

4) Livres ne privilégiant aucun type de constellations

- "Premier cahier de calcul de 1 à 7" par M. Causse, Mme Amouroux (EM grandes classes et CP); Magnard, 1960.

- "Cahier de calcul" (classe enfantine, CP) par Y. Godeaux; Nathan, 1956.

- "Calcul" (CP: 1er cahier de 1 à 10) par P.Bodart, E. Conti; Nathan, 1965.

- "Initiation au calcul" (pour les enfants de 5 à 7 ans: 1er cahier) par M.Abbadie, S.Brossat; Colin, 1958.

  Le 5 est illustré par 2 + 3 arbres alignés; 2+2+1 (Born) bonhommes et 5 voitures en quinconce.

- "Les mathématiques du cours préparatoire" (fascicule 1) par G.Brousseau; Dunod, 1965.

ANNEXE 13 : DEDEKIND 1872

1) Le début du texte original de Dedekind tel que le rapporte P.Dugac (cf. DUGAC 1976, appendice LVI, p.293)

Was sind und was sollen die Zahlen? [Erster Entwurf 1872-1878]

Versuch einer Analyse der Zahl-Begriffs vom naiven Standpuncte aus.

Hauptantwort : Die Zahlen sind Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie sollen als ein Hülfsmittel dienen, die Verschiedenheit der Dinge leichter aufzufassen.

Motto (eigenes): « Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden. »

Verfolgt man genau, was wir beim Abzählen der Menge oder Anzahl von Dingen thun, so wird man nothwendig auf den Begriff der Correspondenz oder Abbildung geführt.

Die Begriffe des Systems, der Abbildung, welche im Folgenden eingeführt werden, um den Begriff der Zahl, der Anzahl zu begründen, bleiben auch dann für die Arithmetik unentbehrlich, selbst wenn man den Begriff der Anzahl als unmittelbar evident (« innere Anschauung ») voraussetzen wollte.

2) Notre traduction

Que sont et à quoi servent les nombres ?
(Première esquisse 1872-1878)

Essai d'une analyse de la notion de nombre d'un point de vue naïf.

Réponse principale: Les nombres sont des créations de l'esprit humain, ils doivent servir comme moyen pour nous aider à saisir plus facilement la diversité des objets.

Epigraphe (personnelle):

"En sciences, ce qui est démontrable ne doit pas être admis sans démonstration".

Si l'on suit exactement ce que nous faisons en comptant l'ensemble ou le nombre d'objets, on est nécessairement amené à la notion de correspondance ou d'application.

.
.
.
.

ANNEXE 14 : Programmes de mathématiques (école maternelle, CP)

1) Arrêté du 18 Janvier 1887

- Section des petits enfants (de 2 à 5 ans) ou 2ème section
  - familiariser l'enfant avec les termes : un, deux, trois, quatre, cinq, moitié, demi : l'exercer à compter jusqu'à dix.
  - calcul mental sur les dix premiers nombres.

- Section des enfants de 5 à 6 ans ou 1ère section
  - premiers éléments de la numération orale et écrite petits exercices de calcul mental ; addition et soustraction sur des nombres concrets ne dépassant pas la première centaine.
  - étude des dix premiers nombres et des expressions demi, moitié, tiers, quart.
  - les quatre opérations sur des nombres de deux chiffres
  - le mètre, le franc, le litre.

Le programme de la section des enfants de 5 à 6 ans est le même que celui de la section des enfants de 5 à 7 ans (section enfantine).

Horaire : 3h 3/4 par semaine.

2) Arrêtés du 23 Février 1923

- Section préparatoire (6 à 7 ans)
  - premiers éléments de la numération ; compter les objets ; en écrire le nombre jusqu'à dix puis cent.
  - petits exercices de calcul oral ou écrits (sans dépasser 100)
  - ajouter ou retrancher des groupes d'objets ; additionner ou soustraire les nombres correspondants.
  - compter par 2, par 3, par 4 ; multiplier par 2, par 3, par 4, diviser des groupes d'objets en 2, 3, 4 parts égales.

3) 1945

- Cours préparatoire
  - étude concrète des nombres de 1 à 5, puis de 5 à 10, puis de 10 à 20.
    formation, décomposition, nom et écriture ; usage des pièces de 1, 2, 5, 10 francs, du décimètre et du double-décimètre gradués en centimètre.

Les nombres de 1 à 100 ; dizaines et demi dizaines compter par 2, par 10, par 5. Usage du damier de 100 cases, et du mètre à ruban.
Exercices et problèmes, concrets d'addition, de comparaison et de soustraction (nombre d'un chiffre, puis de 2 chiffres) de multiplication et de division par 2, par 5.

- Ecole maternelle
  - petite section (2 à 5 ans), calcul :
    groupements très variés d'objets semblables : 2, 3, 4, 5, jusqu'à 10, et compte de ces objets (sacs individuels de cailloux, bâtonnets, coquillages, etc...)
  - grande section (5 à 6 ans), calcul :
    groupements d'objets : 20, 30, 40, jusqu'à 50 (sacs individuels) demi ; moitié ; tiers ; quart.
    Petits exercices de calcul mental : additions, soustractions, multiplications, divisions ; représentation des nombres, de l'unité jusqu'à 50 petits exercices écrits de calcul avec dessins correspondants ; exercices et jeux avec le mètre, le franc, le litre, les poids (balance, kilogramme, demi-kilogr.)

4) Arrêté du 2 Janvier 1970

- Cours préparatoire
  - activités de classements et de rangement
  - notion de nombre naturel
  - nommer et écrire les nombres
  - comparer deux nombres
  - somme de deux nombres.

horaire : 5h par semaine.

5) Arrêté du 18 Mars 1977

- programme et objectifs du cycle préparatoire
  1 - manipuler et connaître les objets et les collections d'objets reconnaître des propriétés, classer et ranger, mettre en correspondance

2 - connaître le nombre

a) dégager la notion de nombre

- mettre en correspondance terme à terme : autant que plus que, moins que.
- classer les collections d'objets.
- associer un nombre à une classe de collections d'objets

b) présenter la numération écrite et parlée décimale

- écrire, nommer les nombres
- présenter la numération décimale écrite et parlée
- étudier des nombres de un et deux chiffres
- écrire et utiliser des égalités du type 27=20+7

c) comparer des nombres

- utiliser les signes =, ≠, <, >
- écrire une suite de nombres dans l'ordre croissant ou décroissant.

3 - calculer sur les nombres

a) somme, addition

- analyser, reconnaître et représenter les situations faisant intervenir la somme de deux nombres ; utilisation du signe + ; addition
- élaborer la table d'addition, l'utiliser et se familiariser avec les résultats en vue de leur mémorisation ; calcul mental ; signification et utilisation des parenthèses.
- élaborer une technique opératoire de l'addition
- reconnaître, analyser, représenter les situations pouvant s'exprimer sous la forme a+.=c

b) étudier et traiter quelques problèmes simples

4 - se situer dans l'espace et l'organiser

a) se situer

- positions relatives d'objets par rapport à soi-même, par rapport à un ou plusieurs repères ou les uns par rapport aux autres.
- déplacements, itinéraires, parcours selon les conventions
- utilisation des quadrillages et tableaux : repérage

b) reconnaître des formes et figures simples

- courbes et domaines : intérieur, extérieur
- pavages, mosaïques, puzzles

c) organiser

- pliages, découpages
- successions régulières, frises...
- jeux d'emboitements, de construction.

(Référence : NANTA 1979)

ANNEXE 15: Tableau d'Eckhardt

	Sujets	1 Compter jusqu'à	2 Plus ou moins ? jusqu'à	3 +2 jusqu'à	4 +5 etc. jusqu'à	5 - 1 jusqu'à	6 - 2 jusqu'à	7 - 5 etc. jusqu'à	8 Perceptibles jusqu'à	9 Chiffres jusqu'à	10 Performance 1908	11 Performance 1909	12 Performances en calcul a	b	c	d	
1	Ab.	100	10	10	—	10	10	—	11	100	1,8	1,8	2	2	2	2	
2	Ba.	100	13	13	—	12	12	—	29	9	2,2	—	3	2	2	—	éliminé
3	Be.	29	19	12	—	10	10	—	29	10	1,6	1,6	2	1	2	2+	
4	Bn.	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1,4	1,4	1	1	1	1	
5	Bö.	100	20 u. i. Z.	100	100	13[1])	13	—	100	20	2,2	2,5	3	3	3	3	
6	De.	20	10	—	—	—	—	—	10	—	2,0	2,5	3	2	2	2	
7	Eg. I	100	100	100	100	100	100	100[2])	100	1000	1,6	2,0	2	2	2	2	
8	Eg. II	12	7	5	—	5	4	—	7	—	3,8	—	5	4	—	—	"
9	Eich.	100	10	10	—	5	5	—	100[1])	100	2,2	—	3	2	3	—	"
10	El.	100	100	100	29	80[3])	30	30[2])	100	100	1,8	1,8	2	1	1	2+	
11	Erl.	100	10	29	10	12	12	—	100[1])	10	2,4	2,3	3	2	2	2	
12	Esch.	39	30	30	—	30	30	—	30	12	3,0	3,2	3	3	2	2−	
13	Grä.	100	20 u. i. Z.	100	—	100	100	—	100	—	2,6	2,6	2	2	2	2	
14	Gu.	100	100	100	100[3])	20	20	20	100	20	2,2	1,5	2	2	1	1	
15	Ha.	39	10	20	10	20	10	—	39	20	2,0	2,0	2	2	2	2	
16	He.	13	13	10	—	10	10	—	13	—	3,2	3,2	4	2	3	2	
17	Ho. I	100	20, i. Z.	100	—	100	—	—	100	1000	1,6	—	2	2	—	—	"
18	Ho. II	19	12	19[4])	—	5	—	—	19	—	3,2	3,3	4	3	4	3−	
19	Hu.	10	5	5	—	5	5	—	5	5	2,8	2,6	4	3	4	3	
20	Klei.	100	12	12	—	12	—	—	[5])	9	2,2	2,2	2	2	2	2	
21	Ku.	100	100	100	100	100	100	100	100	[5])	2,0	2.0	2	2	1	2	
22	Kra.	200	20	100	—	100	100	—	100	200	2,6	3,0	3	2	3	3	
23	Ko.	100	100	100	100	100	100	100	100	100	1,6	2,0	1	1	1	2	
24	Lah.	29	29	29	—	29	11	—	29	12	2,6	3,0	2	2	2	3	
25	La.	20	10	[5])	—	[5])	[5])	—	20	9	2,0	2,5	3	2	2	3	
26	Lei.	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	2,0	—	1	1	—	—	"
27	Lu.	100	100	100	—	100	—	—	100	19	2,0	1,8	2	2	2	2	
28	Ma.	100	100	100	100	100	100[6])	100[6])	100	19	1,8	1,6	2	1	2	1	
29	Na.	100	20	20	—	12	12	—	100	—	1,8	1,6	3	1	1	1	
30	No.	16	4	4	—	—	—	—	16	—	2,4	3,0	3	2	3	3−	
31	Os.	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1,4	1,6	1	1	2	2	
32	Pfl.	100	19	30	—	30	30	—	100	19	2,2	2,5	3	3	2	3	
33	Reu. I	100	12	9	—	—	—	—	[5])	19	2,0	2,5	3	3	4	3	
34	Reu. II	100	19	19	—	12	12	—	[5])	19	2,0	2,5	3	3	2	3	
35	Ro.	3	—	—	—	—	—	—	3	—	3,2	4,2	5	4	4	5	
36	Rö.	100	100	100	100	100	100	100	100	1000	1,8	1,5	2	2	2	1	
37	Rü.	13	13	—	—	5	—	—	13	—	3,4	4,2	5	4	5	4	
38	St.	30	30	13	—	12	10	—	30	9	2,4	2,3	3	2	2	3	
39	Sa.	7	7	7	—	7	7	—	7	—	2,6	2,4	3	2	2	2	
40	Schä.	100	13	100	—	100	30	—	100	—	2,2	2,2	3	2	2	2	
41	Schw.	12	12	12	—	12	12	—	12	—	3,4	3,0	4	3	2	2	
42	Ta.	100	100	100	—	100	100	—	100	12	2,4	3,3	2	3	3	3−	
43	Tro.	100	29	12	—	12	12	—	100	29	1,8	2,0	2	2	1	2	
44	Wa.	100	100	100	100	100	100	—	100	19	1,8	2,4	3	2	1	2	
45	Wei.	5	—	—	—	—	—	—	5	—	3,6	3,6	4	3	4	3	

1) Pour des grands nombres l'élève doit recommencer à réciter chaque fois la suite des nombres depuis le début (Ex: 13-1 = 1,2, 3 ... jusqu'à 12).
2) Lentement, fautes fréquentes.
3) Entre 30 et 80, parfois des fautes.
4) Doit recommencer à réciter chaque fois la suite des nombres depuis le début.
5) Résultat manquant.
6) Parfois des fautes. Utilise les doigts.

Lecture du tableau

Colonne 1 ; Compter. Les élèves devaient compter des objets ou représenter un nombre (traits, etc..) donné.

Colonne 2 : Question "Plus" ou "Moins". Ex: Qu'est ce qui est plus : 9 ou 6 ? éventuellement avec des nombres nommés. L'abréviation "i.Z" (≑ dans la dizaine) signifie que l'élève qui savait compter jusqu'à 100 ne réussissait "Plus ou moins' que dans une même dizaine. "20 u.i.Z" signifie que l'enfant, en plus de la comparaison de 2 nombres quelconques $\leq$ 20, réussissait les comparaisons dans une même dizaine.

Colonne 3 : Addition mentale de 2 (sans aide matérielle). "Jusqu'à 12" signifie que l'élève savait calculer 7+2, 5+2, 10+2, mais échouait pour des sommes > 12.

Colonne 4 : Addition mentale de 5,6, 7 ou 8.

Colonne 5 : Soustraction mentale de 1.

Colonne 6 : " " 2.

Colonne 7 : " " 5, 6, 7 ou 8.

Colonne 8 : Additionner et retrancher comme précédemment, mais avec des objets perceptibles (points, boules du boulier, etc...) . Cette épreuve n'a été posée qu'aux élèves ayant échoué aux épreuves 3 à 8.

Colonne 9 : Lecture de chiffres.

Colonne 10: Note évaluant les résultats moyens de l'élève à la fin de la 1ère année scolaire (moyenne des notes en allemand, religion, calcul et écriture).

Colonne 11: Note évaluant les résultats moyens de l'élève à la fin de la 2e année d'école.

Colonne 12: Note évaluant les résultats de l'élève en calcul

a. à la fin de la 1ère demi-année
b. " " " " " 2e " " } I. année d'école

c. à la fin de la 3e demi-année
d. " " " " " 4e " " } II. année d'école

(Dans les colonnes 2 à 9, - = échec) Référence : ECKHARDT 1909.

ANNEXE 16 : Le développement du comptage selon Gesell et al.[1]

Performance / Age	récite[2] jusqu'à	compte[2] jusqu'à
2 ans		0
2 1/2 ans		compte mécaniquement 1, 2, des tas
3 ans	5	2[3]
4 ans	10	3[3]
4 1/2 ans		4 (certains 10)
5 ans[4]	13 pour la majorité 30 pour 1/3	13 (peut avoir besoin de 2 ou 3 essais)
5 1/2 ans[4]	30 pour 1/3 100 pour 1/4	20 (1 ou 2 essais)
6 ans[4]	100	20, 30 (ou davantage)

Notes :

(1) Tableau construit à partir des données p.420 et 421 de GESELL 1946 et p. 5 et 6 de ILG 1951.

(2) Nous avons essayé de transcrire les indications de Gesell dans notre langage.

(3) Eventuellement, sans appliquer le principe cardinal.

(4) Les enfants examinés sont pour la plupart d'une intelligence supérieure à la moyenne , et issus de familles dont les conditions sociales et économiques sont bonnes ou excellentes (cf.introduction de GESELL 1946). Les enfants de moins de 5 ans sont cependant issus de familles de différents niveaux sociaux et économiques (cf.préface de GESELL 1943).

Remarque : l'esprit et la technique de Gesell sont cliniques plutôt que statistiques ou rigoureusement expérimentaux.

REFERENCES

Avertissement :

- Dans les désignations des références nous mentionnons (éventuellement approximativement), lorsque cela nous est possible et sans tenir compte systématiquement des mises à jour, les dates de 1ère parution des livres ou articles référés. Par contre, dans la référence elle-même, c'est le livre ou l'article auquel nous avons eu accès qui est mentionné.
- Certains mots ou expressions soulignés dans les citations l'ont été par nous.
- Dans les tableaux et résultats numériques que nous citons, nous avons parfois (pour faciliter les comparaisons en particulier) opéré certaines transformations : nombres en pourcentages, désignations des Groupes d'Age, ...
- Les citations traduites n'ont pas été contrôlées par un "spécialiste".
- Le mot "compter" utilisé par d'autres que nous peut ne pas avoir la signification que nous lui accordons.
- Gelman (sans précision) réfère à GELMAN 1978.
- Dans les références allemandes, les voyelles avec tréma ont, ou n'ont pas, été transformées en voyelles suivies d'un e. Exemple : KUHNEL (dans la bibliographie) = KUEHNEL (dans le texte).

ATLAN 1979 : Entre le cristal et la fumée - H.Atlan - Paris : Seuil, 1979.

AUDIGIER 1981 : Maîtrise et disponibilité du nombre chez l'enfant de 7-8 ans - M.N.Audigier, A.M.Chartier - Dans PME 1981, p.82-87.

AUSUBEL 1963 : The psychology of meaningful verbal learning - D.P.Ausubel - New-York : Grune & Straton, 2ième éd., 1968.

BALDWIN 1925 : The psychology of the pre-school child - B.T.Baldwin, L.I.Stecher - New-York : Appleton & Co, 1925.

BAROODY 1979 : The relationships among the development of counting, number conservation and basic abilities - A.J.Baroody - Dissertation Abstracts International, A39, p.6640-6641, 1979.

BARUK 1973 : Echec et maths - S.Baruk - Paris : Seuil, 1973.

BARUK 1977: Fabrice ou l'école des mathématiques - S.Baruk - Paris : Seuil, 1977.

BEAUVERD 1967 : Avant le calcul - B.Beauverd - Neuchatel : Delachaux Niestlé, 1967.

BECKMANN 1923 : Die Entwicklung der Zahlleistung bei 2-6 jährigen Kindern - H.Beckmann - Zeitschrift für angewandte Psychologie, 22, p.1-72, 1923.

BECKWITH 1966 : The process of enumeration - M.Beckwith, F.Restle - Psychological Review, 73, p.437-444, 1966.

BENOIST 1980 : La génération sacrifiée - J.M.Benoist - Paris : Hachette, 1980.

BENZECRI 1975 : La place de l'a priori - J.P.Benzécri - Encyclopaedia Universalis, vol.17, p.11-24, 1975.

BESSOT 1976 : Quelques réflexions et une expérimentation à propos de la genèse du nombre chez l'enfant - Groupe pré-élémentaire - Grenoble : IREM, 1976.

BESSOT 1978 : Une étude sur l'approche du nombre par l'élève du cours préparatoire- A.Bessot, C.Comiti - Educational Studies in Mathematics, 9, p.17-39, 1978.

BESUDEN 1978 : Neuere Bestrebungen im mathematischen Elementarunterricht II (Introduction) - H.Besuden - Der Mathematikunterricht, cahier 4, p.7-8, sept.1978.

BETTELHEIM 1967 : La forteresse vide - B.Bettelheim - Paris : Gallimard, 1969.

BEVER 1968 : What children do in spite of what they know - T.H.Bever, J.Mehler, J.Epstein - Science, 162, p.921-925, 1968.

BIDEAUD 1980 : Nombre, sériation, inclusion : Irrégularités du développement et perspectives de recherche - J.Bideaud - Bulletin de Psychologie, 33, p.659-665, 1980.

BINET 1890 : La perception des longueurs et des nombres chez quelques petits enfants - A.Binet - Revue philosophique, 30, p.68-81, 1890.

BINET 1908 : Le développement de l'intelligence chez les enfants - A.Binet, T.Simon L'Année Psychologique, 14, p.1-94, 1908.

BOLL 1941 : Histoire des mathématiques - M.Boll - Paris : PUF, 13è éd. 1979.

BONG 1981 : The meaning of the number word sequence for the children's understanding of numbers - U.Bong - Poster présenté au congrès PME, Grenoble, 1981.

BOURDON 1908 : Sur le temps nécessaire pour nommer les nombres - B.Bourdon - Revue philosophique, 65, p.426-431, 1908.

BOWER 1976 : Repetitive Processes in Child Development - T.G.R.Bower - Scientific American, vol.235, p.38-47, nov.1976.

BRACHET 1955 : L'enfant et le nombre - Paris : Didier, 1955 (ou 1945). Cité dans NANTA 1979, p.105-106.

BRAINERD 1973 : The Origins of Number Concepts (traduction française) - C.J.Brainerd Scientific American, vol.228, p.101-109, mars 1973.

BRAINERD 1979 : The Origins of the Number Concept - C.J.Brainerd - New-York : Praeger Publishers, 1979.

BRANDICOURT 1955 : Le calcul au cours préparatoire - R.Brandicourt, S.Brandicourt, A.Chatelet - Dans Enseignement de l'arithmétique - A.Chatelet, M.Bompard - Paris : Bourrelier, p.24-41, 4ième éd., 1961.

BRAUNER 1969 : Recherches sur le pré-calcul - A.Brauner - Paris : ESF, 1970.

BROUSSEAU 1972 : Préparations et commentaires à l'usage de la maîtresse de classe maternelle - G.Brousseau, Y.Lamoureux, J.Marinières, L.Félix - Paris : Hachette, 1972.

BROUSSEAU 1977 : L'étude des processus d'apprentissage en situation scolaire (communication faite à Leeds en juillet 1977) - G.Brousseau - Reproduite dans cahier 18, p.2-6, IREM Bordeaux, 1978.

BROWNELL 1930 : Psychological Considerations in the Learning and the Teaching of Arithmetic - W.A.Brownell - Reproduit partiellement dans Readings in the History of Mathematics Education - J.K.Bidwell, R.G.Clason - Washington : NCTM, 1970, p.504-530.

BRUN 1979 : Pédagogie des mathématiques et psychologie : analyse de quelques rapport J.Brun - Cahiers de la Section des Sciences de l'Education de l'Université de Genèv 12, p.1-24, 1979.

BRUNER 1966a : Studies in cognitive growth - J.S.Bruner, R.R.Olver, P.M.Greenfield - New-York : Wiley, 1966.

BRUNER 1966b : Toward a theory of instruction - J.S.Bruner - Cambridge : Harvard University Press, 8ième éd., 1978.

BRYANT 1974 : Perception and Understanding in young children - P.Bryant - London : Methuen & Co., 1974.

BUHLER 1936 : Abriss der geistigen Entwicklung des Kindes - K.Bühler - Leipzig : Quelle & Meyer, 6ième éd., 1936.

BUTTNER 1868 : Anleitung füf den Rechen -und Raumlehre- Unterricht - A.Büttner - Leipzig : Hirt & Sohn, 27ième éd., 1930.

CALO 1956 : Maria Montessori - G.Calo - Dans Les grands pédagogues - J.Chateau - Paris : PUF, 1956, p.311-336.

CARPENTER 1979 : An Investigation of the Learning of Addition and Subtraction - T.P.Carpenter, J.M.Moser - Madison : Wisconsin Research and Development Center for Individualized Schooling, nov.1979.

CHAUVIN 1975 : Pédagogie des Mathématiques : La Mésaventure - A.Chauvin - L'enseignement mathématique utilisable, n°13, p.2-4, janv.-fév.1975.

CHI 1975 : Span and rate of apprehension in children and adults - M.T.H.Chi, D.Klahr Journal of Experimental Child Psychology, 19, p.434-439, 1975.

CHURCHILL 1961 : Counting and measuring - E.M.Churchill - London : Routledge & Kegan 1961.

COLBURN 1821 : First Lessons in Arithmetic of the Plan of Pestalozzi - W.Colburn - Boston : Cummings, Hilliard & Co., 1825.
Reproduit partiellement dans Readings in the History of Mathematics Education - J.K.Bidwell, R.G.Clason - Washington : NCTM, 1970, p. 14-23.

COLE 1974 : The ontogeny of pointing in young children - R.F.Jr.Cole - Unpublished manuscript; Chapel Hill : University of North Carolina, 1974.
Rapporté dans LEMPERS 1977, p.15.

COMITI 1977a : A propos de l'approche de la notion de nombre au cours préparatoire - C.Comiti - Grand N, n°11, P.7-38, 1977.

COMITI 1977b : Approche du nombre par des enfants de 6 à 7 ans - C.Comiti - Educational Studies in Mathematics, 8, p.181-198, 1977.

COMITI 1980a : Les premières acquisitions de la notion de nombre par l'enfant - C.Comiti - Educational Studies in Mathematics, 11, p.301-318, 1980.

COMITI 1980b : Analyse de comportements d'élèves du cours préparatoire confrontés à une tâche de construction d'un ensemble équipotent à un ensemble donné - C.Comiti, A.Bessot, C.Pariselle - Recherches en didactique des mathématiques, 1, p. 171-224, 1980.

COWAN 1979 : Performance in number conservation tasks as a function of the number of items - R.Cowan - British Journal of Psychology, 70, p.77-81, 1979.

CUTLER 1980 : La leçon des lapsus - A.Cutler - La Recherche, 11, p.686-692, 1980.

DANTZIG 1937 : Le nombre : Langage de la science - T.Dantzig - Paris : Blanchard, 1974.

DAUBET 1980 : Bati-math c.p. (livre de l'élève) - M.Daubet, P.Davinroy, C. et R. Biehler, J.Gaubert - Paris : Magnard, 1980.

DAVIES 1850 : The Logic and Utility of Mathematics - C.Davies - New-York : Barnes & Co., 1850.
Reproduit partiellement dans le même livre que BROWNELL 1930, p.39-61.

DAVIES 1870 : University Arithmetic - C.Davies - New-York : Barnes & Co., 1870.
Reproduit partiellement dans le même livre que BROWNELL 1930, p.62-68.

DAVYDOV 1979 : The psychological characteristics of the formation in children of elementary mathematical operations - V.V.Davydov - Seminar on the initial learning of addition and subtraction skills (communication écrite), Wisconsin, nov.1979.

DEARBORN 1910 : Moto-sensory development : First three years of a child - G. Van N. Dearborn - Baltimore, 1910 - Rapporté dans DECROLY 1912, p.49.

DECROLY 1912 : Etudes de psychogénèse - O.Decroly - Bruxelles : Lamertin, 1932.

DEDEKIND 1872 : Was sind und was sollen die Zahlen (1ère rédaction) - R.Dedekind - Reproduite dans DUGAC 1976, p.293-309.

DEDEKIND 1888 : Was sind und was sollen die Zahlen (texte de 1888) - R.Dedekind - Traduit dans DEDEKIND 1978, p.65-139.

DEDEKIND 1978 : Les nombres : Que sont-ils et à quoi servent-ils ? - La Bibliothèque d'Ornicar, 1978.

DESANTI 1978 : Préface (p.5-6) de DEDEKIND 1978 - J.T.Desanti.

DESCOEUDRES 1921 : Le développement de l'enfant de 2 à 7 ans - A.Descoeudres - Neuchatel : Delachaux et Niestlé, 3ième éd. revue, 1946.

DIENES 1966 : Ensembles, nombres et puissances - Z.P.Dienes, E.W.Golding - Paris : OCDL, 3ième éd., 1969.

DIEUDONNE 1976 : Préface (p.9-11) de DUGAC 1976 - J.Dieudonné.

DOOB 1964 : Eidetic images among the Ibo - L.W.Doob - Ethnology, 3, p.357-363, 1964.

DUGAC 1976 : Richard Dedekind et les fondements des mathématiques - P.Dugac - Paris Vrin, 1976.

ECKHARDT 1909 : Beobachtungen über das Zahlenverständnis der Schulrekruten - K.Eckhardt - Zeitschrift für Experimentelle Pädagogik, p.232-235, 8, 1909.

EILLER 1972 : Math et Calcul (CP : livre du maître) - R.Eiller, J.Mertz, M.T.Guyonnaud - Paris : Hachette, 1972.

EL BOUAZZAOUI 1978 : La numération au cours préparatoire - H.El Bouazzaoui - Bordeaux : IREM, 1978.

ESTES 1956 : Some mathematical and logical concepts in children - B.W.Estes - The Journal of Genetic Psychology, 88, p.219-222, 1956.

FAUVERGUE 1972 : Initiation à la mathématique moderne - P.Fauvergue, R.Briançon - Paris : Hachette, spécimen (tome 3) non daté.

FAVERGE 1950 : Méthodes statistiques en psychologie appliquée - J.M.Faverge - Paris PUF, 3è éd. 1960.

FERREIRO 1971 : Les relations temporelles dans le langage de l'enfant - E.Ferreiro - Genève : Droz, 1971.

FEYERABEND 1975 : Contre la méthode - P.Feyerabend - Paris : Seuil, 1979.

FILBIG 1923 : Untersuchungen über die Entwicklung von Zahlvorstellungen - J.Filbig - Zeitschrift füf pädagogische Psychologie, 24, p.105-113 et 156-168, 1923.

FISCHBEIN 1979 : The intuition of infinity - E.Fischbein, D.Tirosch, P.Hess - Educational Studies in Mathematics, 10, p.3-40, 1979.

FISCHER 1979 : La perception des problèmes soustractifs aux débuts de l'apprentissac de la soustraction - J-P.Fischer - Université de Nancy : Thèse de 3è cycle, 1979.

FRANZ 1970 : Nombre et temps - M-L. von Franz - Paris : La Fontaine de Pierre, 1978.

FREGE 1884 : Les fondements de l'arithmétique - G.Frege - Paris : Seuil, 1969.

FREUDENTHAL 1973 : Mathematics as an educational task - H.Freudenthal - Dordrecht : Reidel, 1973.

FUSON 1979 : Counting Solution Procedures in Addition and Subtraction - K.C.Fuson - Séminaire du Wisconsin (communication écrite), nov.1979.

FUSON 1980a : The counting word sequence as a representational tool - K.C.Fuson - Dans PME 1980, p.256-262.

FUSON 1980b : The Development of Counting Words and of the Counting Act - K.C.Fuson Papier présenté au congrès de Berkeley, août 1980.

FUSON 1982 : The Acquisition and Elaboration of the Number Word Sequence - K.C.Fusor J.Richards, D.J.Briars, à paraître.

GALPERIN 1957 : Die Bildung erster geometrischer Begriffe auf der Grundlage organisierter Handlungen der Schüler - P.J.Galperin, N.F.Talysina - Reproduit dans Probleme der Lerntheorie - P.J.Galperin, A.N.Leontjew, u.a. - Berlin : Volk und Wissen, 5ième éd., p.90-111, 1979.

GALPERIN 1976 : Zu Grundfragen der Psychologie - P.J.Galperin - Köln : Pahl-Rugenstein, 1980.

GAST 1954 : Zur Frage der Mengenunterscheidung bei 3-8 jährigen Kindern - H.Gast - Zeitschrift für Psychologie, 157, p.106-138, 1954.

GAST 1957 : Der Umgang mit Zahlen und Zahlgebilden in der frühen Kindheit - H.Gast - Zeitschrift für Psychologie, 161, p.1-90, 1957.

GATTEGNO 1963 : Entretien avec ... le professeur Gattegno - Psychologie, n°129, p.16-26, oct.1980.

GELMAN 1972 : Logical capacity of very young children : number invariance rules - R.Gelman - Child Development, 43, p.75-90, 1972.

GELMAN 1975 : Further investigations of the young child's conception of number - R.Gelman, M.F.Tucker - Child Development, 46, p.167-175, 1975.

GELMAN 1978 : The child's understanding of number - R.Gelman, C.R.Gallistel - Cambridge : Harvard University Press, 1978.

GELMAN 1980 : Preschoolers' Understanding of Simple Object Transformations - R.Gelman, M.Bullock, E.Meck - Child Development, 51, p.691-699, 1980.

GERLACH 1908 : Schöne Rechenstunden - A.Gerlach - Leipzig : Quelle & Meyer, 3ième éd 1914.

GERLACH 1914 : Lebensvoller Rechenunterricht - A.Gerlach - Leipzig : Dürr, 3ième éd. modifiée, 1927.

GESELL 1943 : Le jeune enfant dans la civilisation moderne - A.Gesell, F.Ilg - Paris : PUF, 1961.

GESELL 1946 : L'enfant de 5 à 10 ans - A.Gesell, F.Ilg - Paris : PUF, 7ième éd.,1975

GINSBURG 1977 : Children's Arithmetic - H.Ginsburg - New-York : Van Nostrand, 1977.

GINSBURG 1979 : The development of mental addition in schooled and unschooled people A cross-cultural study - H.P.Ginsburg, J.K.Posner, R.L.Russel - University of Rochester, 1979.
Rapporté partiellement dans GINSBURG 1980, p.44.

GINSBURG 1980 : Children's Surprising Knowledge of Arithmetic - H.P.Ginsburg - Arithmetic Teacher, 28, p.42-44, sept.1980.

GLAESER 1976 : Comprendre les mathématiques (Cours de DEA) - G.Glaeser - Université de Strasbourg, 1976.

GLAESER 1979 : Racines historiques de la didactique des mathématiques (2è partie) - G.Glaeser - Strasbourg : IREM, 1979.

GLASERSFELD 1981 : Things, Pluralities and counting - E. von Glasersfeld - Dans PME 1981, p.18-24.

GODEMENT 1963 : Cours d'algèbre - R.Godement - Paris : Hermann, 2è éd. 1966.

GOERGLER 1978 : Uni Math (CP, tome 1) - B.Goergler, J.Sérieys, A.Viala - Paris : L'Ecole, 1978.

GOUMY 1933 : L'Arithmétique et la Géométrie à l'Ecole Primaire - E.Goumy - Verdun : Marchal, 1933.

GRANEL 1974 : Husserl - G.Granel - Encyclopaedia Universalis, vol.8,p.613-618, 1974.

GRAS 1980 : Deux méthodes d'analyse de données didactiques : classification implicative et classification hiérarchique - R.Gras - Cours de l'Ecole d'Eté, Chamrousse, 1980.

GRECO 1960 : Recherches sur quelques formes d'inférences arithmétiques et sur la compréhension de l'itération numérique chez l'enfant - P.Gréco - Dans Problèmes de la Construction du Nombre (vol.XI des Etudes d'Epistémologie Génétique) - P.Gréco, J.B.Grize, S.Papert, J.Piaget - Paris : PUF, 1960, p.149-213.

GRECO 1962a : Quantité et Quotité - P.Gréco. Dans Structures numériques élémentaires (vol.XIIIdes Etudes d'Epistémologie Génétique) - P.Gréco, A.Morf - Paris : PUF, 196 P.1-70.

GRECO 1962b : Une recherche sur la commutativité de l'addition - P.Gréco. Dans même livre que GRECO 1962a, p.151-227.

GRECO 1980a : Comment ça marche - P.Gréco - Bulletin de Psychologie, 33, p.633-636, 1980.

GRECO 1980b : Note (4) du traducteur - Dans Bulletin de Psychologie, 33, p.655, 1980

GREEN 1978 : Entering the world of number - R.T.Green, V.J.Laxon - London : Thames and Hudson, 1978.

GRIZE 1967 : Remarques sur l'épistémologie mathématique des nombres naturels - J.B.Grize - Dans Logique et connaissance scientifique - Dir. J.Piaget - Paris : Gallimard, 1967, p.403-423.

GROEN 1972 : A chronometric analysis of simple addition - G.J.Groen, J.M.Parkman - Psychological Review, 79, p.329-343, 1972.

GROEN 1977 : Can preschool children invent addition algorithms ? - G.J.Groen, L.B.Resnick - Journal of Educational Psychology, 69, p.645-652, 1977.

GRUEN 1965 : Experiences affecting the development of number conservation in childre G.E.Gruen - Child Development - 36, p.963-979, 1965.

GUITEL 1975 : Histoire comparée des numérations écrites - G.Guitel - Paris : Flammarion, 1975.

GUYOT 1980 : Mathématique au CP - J.Guyot - Orgeval : MDI, 1980.

HALBWACHS 1979 : Faut-il tuer les cardinaux ? - F.Halbwachs - Revue Française de Pédagogie, 46, p.5-9, 1979.

HATANO 1979 : Learning to Add and Subtract : A Japanese perspective - G.Hatano - Seminar on the initial learning of addition and subtraction skills (communication écrite), Wisconsin, nov.1979.

HEBBELER 1977 : Young children's addition - K.Hebbeler - The Journal of Children's Mathematical Behavior, vol.1, n°4, p.108-121, 1977.

HENCK 1928 : Moderner Rechenunterricht im ersten Schuljahr - W.Henck - Kassel : Aktiengesellschaft für Druck und Verlag, 1928.

HOULIHAN 1981 : The Addition Methods of first- and second-grade children - D.M.Houlihan, H.P.Ginsburg - J. for Research in Math. Educ., 12, p.95-106, 1981.

HUSSERL 1891 : Philosophie de l'arithmétique - E.Husserl - Paris : PUF, 1972.

ILG 1951 : Developmental trends in arithmetic - F.Ilg, L.B.Ames - Journal of Genetic Psychology, 79, p.3-28, 1951.

INRP 1979 : Enquête sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire (tome 1). Paris : INRP, non daté.

JACQUARD 1978 : Eloge de la différence : La génétique et les hommes - A.Jacquard - Paris : Seuil, 1978.

JENSEN 1950 : The subitizing and counting of visually presented fields of dots - E.M.Jensen, E.P.Reese, T.W.Reese - The Journal of Psychology, 30, p.363-392, 1950.

KAUFMAN 1949 : The discrimination of visual number - E.L.Kaufman, M.W.Lord, T.W.Rees J.Volkmann - American Journal of Psychology, 62, p.498-525, 1949.

KEMPINSKY 1911 : Der Rechenlehrer der Kleinen - H.Kempinsky - Leipzig : Dürr, 12ième et 13ième éd., 1930.

KLAHR 1973 : Quantification processes - D.Klahr. Dans Visual information processing W.G.Chase - New-York : Academic Press, 1973, p.3-34.

KLAHR 1976 : Cognitive Development : an information-processing view - D.Klahr, J.G.Wallace - Hillsdale : Erlbaum, 1976.

KNOCHE 1899 : Der Rechenunterricht auf der Unterstufe - H.Knoche - Arnsberg : Stahl, 1899.

KNOCHE 1908 : Theoretisch-praktische Anleitung zur Erteilung des Rechen- und Raumlehrunterrichtes - H.Knoche - Arnsberg : Stahl ; 1908.

KOEHLER 1941 : Vom Erlernen unbenannter Anzahlen bei Vögeln - O.Koehler - Die Naturwissenschaften, 29, p.201-218, 1941.

KOLAR 1937 : Rechnen und Raumanschauung - H.Kolar - Dans Der Unterricht in der Volksschule (tome 1) - J.F.Pöschl - Graz : Lenkam, 1937, p.272-300.

KRYGOWSKA 1971 : La réforme de l'enseignement mathématique dans les classes élémentaires en Pologne - Z.Krygowska. Dans cahier 16 des Chantiers de pédagogie mathématique; APMEP (Régionale Parisienne), 1971, p.99-107.

KUHNEL 1916 : Neubau des Rechenunterrichts (tome 1) - J.Kühnel - Leipzig : Klinkhard 6ième éd., 1929.

KUHNEL 1922 : Lebensvoller Rechenunterricht - J.Kühnel - Leipzig : Klinkhardt, 4ième éd., 1938.

KURTZ 1978 : Kindergarten Mathematics : a Survey -V.R.Kurtz - Arithmetic Teacher, vol.25, n°8, p.51-53, mai 1978.

LACOUR 1934 : Le calcul intéressant et facile au CP et à l'EM (guide détaillé du maître) - G.Lacour - Metz : Even, 1934.

LANGANEY 1979 : Le sexe et l'innovation - A.Langaney - Paris : Seuil, 1979.

LANKFORD 1974 : Some computational strategies in seventh grade pupils - F.G.Lankford Manuscrit non publié; University of Virginia, 1974; Rapporté partiellement dans GINSBURG 1977, p.95-96.

LANNE 1971 : L'approche mathématique au cours préparatoire - P.Lanne, R.Leboulleux - Paris : Colin, 1971.

LAURENT 1979 : L'art difficile du 2 + 2 = 4 - E.Laurent - Le Monde de l'Education, n°54, p.18-22, oct.1979.

LAUX 1969 : Die Bildung des Zahlbegriffs in den ersten drei Schuljahren - J.Laux - Stuttgart : Klett, 1969.

LAWSON 1974 : The role of number and length cues in children's quantitative judgment: G.Lawson, J.Baron, L.Siegel - Child Development, 45, p.731-736, 1974.

LAY 1898 : Führer durch den Rechenunterricht der Unterstufe - W.A.Lay - Leipzig :

LEBESGUE 1935 : La mesure des grandeurs - H.Lebesgue - Paris : Blanchard, 1975.

LE BLANC 1968 : The Performance of First Grade Children in Four Levels of Conservation of Numerousness and Three I.Q. Groups When Solving Arithmetic Subtraction Problems - J.Le Blanc - Ann Arbor, Mich. : University Microfilms (n°67-68), 1968. Rapporté partiellement dans UNDERHILL 1977, p.54.

LEMPERS 1977 : The development in very young children of tacit knowledge concerning visual perception - J.D.Lempers, E.R.Flavell, J.H.Flavell - Genetic Psychology Monographs, 95, p.3-53, 1977.

LEON 1977 : Manuel de psychopédagogie expérimentale - A.Leon, J.Cambon, M.Lumbroso, F.Winnymaken - Paris : PUF, 1977.

LERAY 1973 : La modernisation de l'enseignement mathématique à l'école - J.Leray - L'Ecole Libératrice, n°17, p.881-883, janv.1973.

LIETZMANN 1912 : Stoff und Methode des Rechenunterrichts in Deutschland - W. Lietzmann - Leipzig : Teubner, 1912.

LIFSCHITZ 1977 : The role of counting and measurement in conservation learning - M.Lifschitz, P.E.Langford - Archives de Psychologie, 45, p.1-14, 1977.

LOMPSCHER 1973 : Sowjetische Beiträge zur Lerntheorie : Die Schule P.J.Galperins - J.Lompscher - Köln : Pahl-Rugenstein, 1973.

MACNAMARA 1975 : A note on Piaget and Number - J.Macnamara - Child Development, 46, p.424-429, 1975.

MANESSE 1977 : L'éveil mathématique au CP (compléments pour le maître) - J.Manesse - Paris : Hachette, 1977.

MARCAULT-DEROUARD 1974 : Pédagogie pratique de la mathématique à l'école élémentaire I.Marcault-Derouard - Paris : Sudel, 1974.

MATROS 1979 : Critique du livre référé sous MULLER 1977 - Dans Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1979/1.

MAYER 1977 : Denken und Problemlösen - R.E.Mayer - Berlin : Springer, 1979.

MEHLER 1967 : Cognitive capacity of very young children - J.Mehler, T.G.Bever - Science, 158, p.141-142, 1967.

MEHLER 1968 : Reply by J.Mehler and T.G.Bever. Science, 162, p.979-981, 1968.

MEHLER 1971 : Le développement des heuristiques perceptives chez le très jeune enfan J.Mehler - Dans Neuropsychologie de la perception visuelle - H.Hécaen - Paris : Masson, 1971, p.154-167.

MEHLER 1974 : A propos du développement cognitif - J.Mehler. Dans L'unité de l'homme (tome 2 : Le cerveau humain) - E.Morin, M.Piattelli-Palmarini - Paris : Seuil, 1974 p.38-49.

MEHLER 1979 : Psychologie et psycholinguistique - J.Mehler - Dans Théories du langag Théories de l'apprentissage - M.Piattelli-Palmarini - Paris : Seuil, 1979, p.483-497

MELJAC 1979 : Décrire, agir et compter - C.Meljac - Paris : PUF, 1979.

MENNINGER 1933 : Zahlwort und Ziffer : Eine Kulturgeschichte der Zahl - K.Menninger Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht, 2ième éd., 1958.

MIERKIEWICZ 1980 : Preschoolers' abilities to recognize counting errors - D.B. Mierkiewicz, R.S.Siegler. Dans PME 1980, p.249-255.

MONTAGNER 1974 : Communication non verbale et discrimination olfactive chez les jeunes enfants : approche éthologique - H.Montagner. Dans L'unité de l'homme (tome 1 : Le primate et l'homme) - E.Morin, M.Piattelli-Palmarini - Paris : Seuil, 1974, p.246- 270.

MONTEILLET 1973 : Mathématique : cours préparatoire (1er livret) - H.Monteillet - Paris : Istra, 1973.

MONTESSORI 1926 : Pédagogie scientifique : la découverte de l'enfant - M.Montessori Paris : Desclée de Brouwer, 1952.

MORF 1962 : Recherches sur l'origine de la connexité de la suite des premiers nombre A.Morf - Dans même livre que GRECO 1962a, p.71-103.

MORGENTHALER 1948 : Pas à pas de 1 à 100 (méthode de calcul : CP, 11ième) - H.Morgenthaler, Mme Isnard - Strasbourg : Istra, 1948.

MORGENTHALER 1963 : Pas à pas de 1 à 100 (méthode de calcul pour le CP : livret guide du maître) - H.Morgenthaler, Mme Isnard - Strasbourg : Istra, 1963.

MORIN 1973 : Le paradigme perdu : la nature humaine - E.Morin - Paris : Seuil, 1973.

MOSER 1980a : How Well Do Young Children Solve Verbal Problems ? J.Moser - Wisconsin R & D Center : Interpretive Report N°2, jan.1980.

MOSER 1980b : A First Look at the Solving of Verbal Addition Problems - J.Moser - Wisconsin R & D Center : Interpretive Report N°3, jan.1980.

MOSER 1980c : A First Look at the Solving of Verbal Subtraction Problems - J.Moser - Wisconsin R & D Center : Interpretive Report N°4, jan.1980.

MPIANGU 1975 : Is conservation of number a necessary condition for mathematical understanding ? B.D.Mpiangu, J.R.Gentile - Journal for Research in Mathematics Education, 6, p.179-192, 1975.

MULLER 1977 : Der Mathematikunterricht in der Primarstufe - G.Müller, E.Wittmann - Braunschweig : Vieweg, 1977.

MURPHY 1978 : Pointing in the Context of a Shared Activity - C.M.Murphy - Child Development, 49, p.371-380, 1978.

MYX 1981 : Mathématiques pour l'école (vol.1) - A.Myx, P.Subtil - Paris : Cedic,1981

NANTA 1979 : Nombres entiers naturels - IREM de Nantes, non daté.

NEA 1895 : Report of the Committee of Fiften on Elementary Education - National Educational Association - New-York : American Book Company, 1895; Rapporté partiellement dans même livre que COLBURN 1821, p.142-150.

NESHER 1978 : Two Cognitive Modes in Arithmetic Word Problem Solving - P.Nesher, T.Katriel - Dans Proceedings of the second International Conference for the Psychology of Mathematics Education - Université d'Osnabrück, 1978.

NOEL 1970 : La mathématique à l'école élémentaire (cours préparatoire) - G.Noël - Strasbourg : Istra, 1970.

ODENBACH 1965 : Rechenunterricht und Zahlbegriff (Introduction) - J.Piaget, Resag, Fricke, Van Hiele, Odenbach - Braunschweig : Westermann, 2ième éd., 1965.

OEHL 1935 : Psychologische Untersuchungen über Zahlendenken und Rechnen bei Schulanfängern - W.Oehl - Zeitschrift für angewandte Psychologie und Charakterkunde, 49, p.305-351, 1935.

PECAUT 1921 : L'enfant et le nombre - F.Pécaut - Revue Pédagogique, 79, p.235-248, 1921.

PEN 1976 : Points de vue sur le nombre naturel - Actes du 3ième colloque des Professeurs d'Ecole Normale - Nice : IREM, p.H-1 à H-5, 1976.

PEN 1979 : Approches du nombre - Actes du 6ième colloque des Professeurs d'Ecole Normale - Bordeaux : IREM, p.7-26, 1979.

PENNINGTON 1980 : Nonconservers' use and understanding of number and arithmetic - B.F.Pennington, L.Wallach, M.A.Wallach - Genetic Psychology Monographs, 101, p.231-243, 1980.

PERRET-CLERMONT 1979 : La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale A.N.Perret-Clermont - Berne : Lang, 1979.

PESTALOZZI 1801 : Wie Gertrud ihre Kinder lehrt - H.Pestalozzi - Liegnitz : Seyffart tome 9 des oeuvres complètes, 1901.

PIAGET 1923 : Le langage et la pensée de l'enfant - J.Piaget - Neuchatel : Delachaux et Niestlé, 1923.

PIAGET 1926 : La représentation du monde chez l'enfant - J.Piaget - Paris : PUF, 5ième éd., 1976.

PIAGET 1941 : La genèse du nombre chez l'enfant - J.Piaget, A.Szeminska - Neuchatel : Delachaux et Niestlé, 4ième éd., 1967.

PIAGET 1946 : La formation du symbole chez l'enfant - J.Piaget - Neuchatel : Delachaux et Niestlé, 2ième éd., 1959.

PIAGET 1949a : La psychologie de l'intelligence - J.Piaget - Paris : Colin, 1967.

PIAGET 1949b : La genèse du nombre chez l'enfant - J.Piaget - Exposé fait au congrès de Lyon en 1949 : Document ronéoté.

PIAGET 1950 : Introduction à l'épistémologie génétique (tome 1 : la pensée mathématique) - J.Piaget - Paris : PUF, 1950.

PIAGET 1953 : Discussion : Réponse de J.Piaget (p.78-81). Dans La perception : Symposium de l'association de psychologie scientifique de langue française - A.Michotte, J.Piaget, H.Piéron et autres - Paris : PUF, 1955.

PIAGET 1959 : Apprentissage et connaissance - J.Piaget. Dans La logique des apprentissages (vol.X des Etudes d'Epistémologie Génétique) - M.Goustard, P.Gréco, B.Matalon, J.Piaget - Paris : PUF, 1959, p.159-188.

PIAGET 1960 : Problèmes de la construction du nombre - J.Piaget. Dans Problèmes de la Construction du Nombre (vol.XI des Etudes d'Epistémologie Génétique) - P.Gréco, J.B.Grize, S.Papert, J.Piaget - Paris : PUF, 1960, p.1-68.

PIAGET 1961a : Les mécanismes perceptifs - J.Piaget - Paris : PUF, 1961.

PIAGET 1961b : Epistémologie mathématique et psychologie (vol.XIV des Etudes d'Epistémologie Génétique) : Deuxième partie (p.143-324) par J.Piaget - Paris :PUF, 1961.

PIAGET 1964 : Avant-propos (p.9-13) de PIAGET 1941.

PIAGET 1966 : L'image mentale chez l'enfant - J.Piaget, B.Inhelder - Paris : PUF,196

PIAGET 1967 : Les données génétiques (de la construction du nombre naturel) - J.Piag Dans Logique et connaissance scientifique - Paris : Gallimard, 1967, p.403-423.

PIAGET 1968a : Le structuralisme - J.Piaget - Paris : PUF, 6ième éd., 1974.

PIAGET 1968b : Quantification, conservation and nativism - J.Piaget - Science, 162, p.976-979, 1968.

PIAGET 1971 : Où va l'éducation ? J.Piaget - Paris : Denoël, 1972.

PIAGET 1972 : Remarques sur l'enseignement des mathématiques - J.Piaget - Communication présentée au congrès d'Exeter en 1972 : Document ronéoté.

PIAGET 1976 : Une heure avec Piaget - Dans Revue Française de Pédagogie, n°37, p.5-12, 1976.

PIAGET 1978 : Introduction de Recherches sur la généralisation (vol.XXXVI des Etudes d'Epistémologie Génétique) - J.Piaget - Paris : PUF, 1978, p.5-8.

PIAGET 1979 : Schèmes d'action et apprentissage du langage (discussion) - J.Piaget. Dans même livre que MEHLER 1979, p.252-269.

PICARD 1966 : Une expérience d'enseignement de la mathématique au cours préparatoire N.Picard - Le Courrier de la Recherche Pédagogique, n°27, p.12-76, mars 1966.

PICARD 1970 : A la conquête du nombre I (CP : Commentaires pour le maître) - N.Picar Paris : OCDL, 1970.

PIPPIG 1971 : Zur Entwicklung mathematischer Fähigkeiten - G.Pippig - Berlin : Volk und Wissen, 1971.

PME 1980 : Proceedings of the fourth international conference for the Psychology of Mathematics Education - Berkeley : University of California, 1980.

PME 1981 : Actes du cinquième colloque du groupe international Psychology of Mathematics Education (vol.1) - Grenoble : IMAG, 1981.

PORTNOY 1970 : Demain la pédagogie - H.Portnoy - Paris : Magnard, 1970.

POSNER 1978 : The Development of Mathematical Knowledge Among Baoule and Dioula Children in Ivory Coast - J.K.Posner - Cornell University, 1978.
Rapporté dans GINSBURG 1980, p.44.

POTTER 1968 : Spatial enumeration without counting - M.C.Potter, E.I.Levy - Child Development, 39, p.265-273, 1968.

RDA 1967 : Bildungs- und Erziehungsplan für den Kindergarten - Ministère de la Formation du Peuple de la RDA - Berlin : Volk und Wissen, 1973.

RENWICK 1963 : Children learning mathematics - E.M.Renwick - Ilfracombe : Stockwell, 1963. Rapporté dans KLAHR 1976, p.78.

RICHARDS 1980 : Counting and the constructivist program - J.Richards - Dans PME 1980 p.263-270.

RICHARDS 1981 : Prenumerical counting - J.Richards - Dans PME 1981, p.25-30.

RIESS 1943 : An Analysis of Children's Number Responses - A.P.Riess - Harvard Educational Review, 13, p.149-162, 1943.

RISING 1978 : The third "R" (Mathematics teaching for grades K-8) - G.R.Rising, J.B.Harkin - Wadsworth : Belmont, 1978.

ROBINET 1980 : Une approche du concept de nombre chez les enfants - J.Robinet, M.Artigue - Ecole d'été de Didactique des Mathématiques (communication écrite), Chamrousse, 1980.

ROTHENBERG 1969 : Conservation of number among four- and five- year-old children : some methodological considerations - B.B.Rothenberg - Child Development, 40, p.383-406, 1969.

RUBINSTEIN 1946 : Grundlagen der allgemeinen Psychologie - S.L.Rubinstein - Berlin : Volk und Wissen, 9ième éd., 1977.

RUSSAC 1978 : The Relation between Two Strategies of Cardinal Number : Correspondenc and Counting - R.J.Russac - Child Development, 49, p.728-735, 1978.

SAFFIOTTI 1914 : Montessori's pädagogischer Versuch der "Case dei bambini" in der Kindergartenbewegung - U.Saffiotti - Zeitschrift für pädagogische Psychologie und experimentelle Pädagogik,15, p.9-16, 1914.

SALTZMAN 1948 : Reaction-time as a measure of span of attention - I.J.Saltzman, W.R.Garner - The Journal of Psychology, 25, p.227-241, 1948.

SARAZANAS 1974 : L'enfant de plus de 5 ans à l'école maternelle (pédagogie de la section des grands) - R.Sarazanas - Paris : Colin, 1974.

SAXE 1977 : A Developmental Analysis of Notational Counting - G.B.Saxe - Child Development, 48, p.1512-1520, 1977.

SAXE 1979 : Developmental Relations between Notational Counting and Number Conservation - G.B.Saxe - Child Development, 50, p.180-187, 1979.

SCHAEFFER 1974 : Number development in young children - B.Schaeffer, V.H.Eggleston, J.L.Scott - Cognitive Psychology, 6, p.357-379, 1974.

SCHINKOTHE 1980 : Mengen und Längen im Kindergarten - H.Schinköthe, G.Kretschmer - Berlin : Volk und Wissen, 1980.

SCHMIDT 1981 : An Inventory of the performance of how kindergarteners use the different aspects of natural numbers - S.Schmidt - Dans PME 1981, p.44-49.

SCHUBAUER-LEONI 1980 : Interactions sociales et représentations symboliques - M.L.Schubauer-Leoni, A.N.Perret-Clermont - Recherches en didactique des mathématiques, 1, p.297-350, 1980.

SHANNON 1978 : Spatial Strategies in the Counting of Young Children - L.Shannon - Child Development, 49, p.1212-1215, 1978.

SHINN 1900 : The Biography of a Baby - M.W.Shinn - New-York : Houghton Mifflin, 1900 Cité dans LEMPERS 1977, p.14.

SHIRLEY 1933 : The first two years : A study of twenty five babies (vol.II) - M.M.Shirley - Minneapolis : The University of Minnesota Press, 1933.

SHORES 1976 : A Study of the Relations between ... (titre abrégé) - J.Shores, R.G.Underhill) - Communication orale à l'American Educational Research Association, San Francisco, 1976. Rapporté dans UNDERHILL 1977, p.54.

SIEBER 1968 : Unterrichtshilfen (Mathematik, Klasse 1) - J.Sieber, H.Butzke - Berlin Volk und Wissen, 6e éd. 1976.

SIEGEL 1956 : Non parametric Statistics for the Behavioral Sciences - S.Siegel - London : Mc Graw Hill, 1956.

SIEGEL 1980 : Le jeune enfant est-il vraiment pré-opératoire ? L.S.Siegel - Bulletin de Psychologie, 33, 637-643, 1980.

SINACEUR 1978 : Naissance du formalisme - M.A.Sinaceur - Dans DEDEKIND 1978, p.7-42.

SLOBIN 1981 : L'apprentissage de la langue maternelle - D.I.Slobin - La Recherche, 12, p.572-578, 1981.

STARKEY 1980 : Numerosity perception in human infants -P.Starkey, R.J.Cooper - Science, 210, p.1033-1035, 1980.

STEFFE 1976 : Summary of quantitative comparisons and class inclusion as readiness variables for learning first grade arithmetical content - L.P.Steffe, W.C.Spikes, J.J.Hirstein - Working paper N°1 : University of Georgia, 1976.
Rapporté dans FUSON 1979, p.4-5.

STEFFE 1979 : Children's Counting in Arithmetical Problem Solving - L.P.Steffe, P.W.Thompson - Seminar on the initial learning of addition and subtraction skills (communication écrite), Wisconsin, nov.1979.

STEFFE 1981 : Operational counting and position - L.P.Steffe - Dans PME 1981,p.12-17

STELLJES 1977 : Denken und Handeln (Mathematik in der Vorklasse/Eingangstufe) - H.Stelljes - Braunschweig : Westermann, 1977.

STERN 1927 : Psychologie der frühen Kindheit - W.Stern - Leipzig : Quelle & Meyer, 4ième éd. modifiée, 1927.

SVENSON 1975 : Analysis of time required by children for simple additions -O.Svenson- Acta Psychologica, 39, p.289-302, 1975.

TALYSINA 1973 : Theoretische Probleme des programmierten Unterrichts - N.F.Talysina - Dans LOMPSCHER 1973, p.261-314.

THEVENET 1981 : Découvrir et calculer (math CP) - S.Thévenet - Paris:Bordas, 1981.

THIRIOUX 1976 : Prémathématique contemporaine (enfants de 4 à 5 ans : livre de la maîtresse) - A.Thirioux, L.Sanchez, C.Rety, C.Nicolas; Paris : Magnard, 1976.

THOMPSON 1980 : Paper Dot Plates Give Numbers Meaning - C.S.Thompson, J.Van de Walle Arithmetic Teacher, vol.28, n°1,p.3-7, sept.1980.

TIETJEN 1936 : Raum oder Zahl ? C.H.Tietjen - Leipzig : Brandstetter, 1936.

TJOPLENKAJA 1973 : Zum Problem der Begriffsbildung bei Kindern im Vorschulalter - C.H.M.Tjoplenkaja - Dans LOMPSCHER 1973, p.41-70.

TOURTET 1979 : Chemins de la découverte mathématique (53 situations-problèmes pour les petits, les moyens et les grands de l'école maternelle) - L.Tourtet - Paris : Colin, 1979.

TOUYAROT 1967 : Itinéraire mathématique (information des maîtres, 1) - M.A.Touyarot - Paris : Nathan, 1971.

UNDERHILL 1977 : Teaching Word Problems to First Graders - R.G.Underhill - Arithmetic Teacher, vol.25, n°2, p.54-56, nov.1977.

VAN HIELE 1959 : Development and learning process - P.M.Van Hiele - XVII Acta Paedagogica Ultrajectina; Groningen : Wolters, 1959.

VERGNAUD 1976 : Structures additives et complexité psychogénétique - G.Vergnaud, C.Durand - Revue Française de Pédagogie, 36, p.28-43, 1976.

VERGNAUD 1979 : A classification of cognitive tasks and operations of thought in addition and subtraction problems - G.Vergnaud - Seminar on the initial learning of addition and subtraction skills (communication écrite), Wisconsin, nov.1979.

VERGNAUD 1981 : L'enfant, la mathématique et la réalité - G.Vergnaud - Berne : Lang, 1981.

VERRET 1975 : Le temps des études (tome 1) - M.Verret - Paris : Champion, 1975.

VON HELMHOLTZ 1887 : Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet - H. von Helmholtz - Dans Philosophische Vorträge und Aufsätze - Berlin : Akademie Verlag, 1971, p.301-335.

VURPILLOT 1972 : Le monde visuel du jeune enfant - E.Vurpillot - Paris : PUF, 1972.

WALLON 1941 : L'évolution psychologique de l'enfant - H.Wallon - Paris : PUF, 1968.

WALLON 1962 : Pluralité et Nombre chez les enfants de 4 ans 1/2 à 7 ans - H.Wallon, R.Sauterey - Enfance, p.201-221, 1962.

WANG 1971 : The sequence of development of some early mathematics behaviors - M.C.Wang, L.B.Resnick, R.F.Boozer - Child Development, 42, p.1767-1778, 1971.

WERTHEIMER 1912 : Uber das Denken der Natürvölker I : Zahlen und Zahlgebilde - M.Wertheimer - Zeitschrift für Psychologie, 60, p.321-378, 1912.

WINKLER 1930 : Das grundlegende Rechnen als Bewegung - M.Winkler - Breslau : Winkler non daté.

WOHLWILL 1962 : An experimental analysis of the development of the conservation of number - J.F.Wohlwill, R.C.Lowe - Child Development, 33, p.153-167, 1962.

WOHLWILL 1963 : The learning of absolute and relational number discrimination by children - J.F.Wohlwill - Journal of Genetic Psychology, 101, p.217-228, 1963.

WOODWORTH 1937 : Experimental Psychology (revised) - R.S.Woodworth, H.Schlosberg - New-York : Holt, 1954.

WYGOTSKI 1934 : Denken und Sprechen - L.S.Wygotski - Frankfort am Main : Fischer, 1977.

ZDM 1980 : Zentralblatt für Didaktik der Mathematik - Stuttgart : Klett, 1980.

ZECH 1977 : Grundkurs Mathematik-didaktik - F.Zech - Weinheim : Beltz, 2e éd. 1978.

ZIMILES 1963 : A note on Piaget's concept of conservation - H.A.Zimiles - Child Development, 34, p.691-695, 1963.