LE THEOREME DES 12 COULEURS

Le théorème des 4 couleurs démontré par Haken et Appel en 1200 heures d'ordinateurs en 1976 est susceptible de bien des généralisations.

1°) Au lieu de travailler sur un plan, on travaille sur une surface quelconque (voir Ouvert n°12 - Juin 1977).

2°) Au lieu de supposer les pays connexes (c'est-à-dire en un seul morceau), on suppose qu'ils ont au plus deux, trois, ..., n morceaux.

3°) En combinant les deux hypothèses précédentes on peut s'intéresser au coloriage de cartes comportant des pays non-connexes répartis sur des surfaces quelconques, éventuellement non connexes.

....

Le plan et la sphère présentant les mêmes caractéristiques pour ce genre de problème, imaginons que chaque pays (connexe) admette une seule colonie (connexe). On peut imaginer les pays et les colonies sur la même planète, ou bien sur deux planètes différentes. On peut aussi imaginer un partage raisonnable pour l'exploitation des anneaux de Saturne.

..... Combien faut-il alors de couleurs ?

<u>Théorème</u>. Si chaque pays d'une sphère a au plus une colonie coloriée de la même façon que la métropole, alors il suffit de 12 couleurs.

Suivant une méthode habituelle dans ce genre de problème, transformons la carte en un graphe de la façon suivante:
Prenons un point dans chaque région (pays ou colonie); joignons deux points s'ils correspondent à deux régions contigües (ayant une frontière commune).

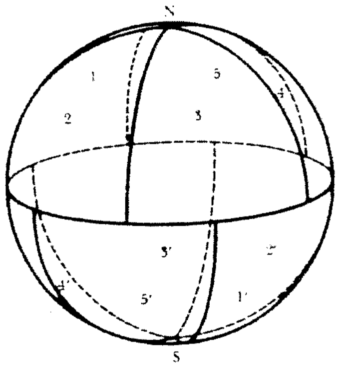
Le graphe ainsi obtenu sera le graphe C* qui est tracé sur la sphère. Soit a son nombre d'arêtes, s le nombre de sommets et f le nombre de "faces". D'après le résultat d'Euler, on a :

$$s - a + f = 2$$

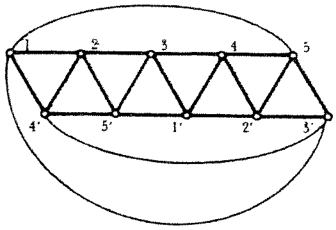
* que l'on appelle aussi graphe colonial C

Fabriquons maintenant un autre graphe que nous appellerons graphe <u>impérial</u> G qui consiste à supposer que chaque pays et sa colonie forment un seul et même empire, c'est-à-dire attribuons un seul sommet à l'ensemble pays-colonie. Cela revient à identifier dans C les sommets correspondants au pays et à sa colonie. Le graphe G n'a aucune raison de pouvoir être tracé sur une sphère.

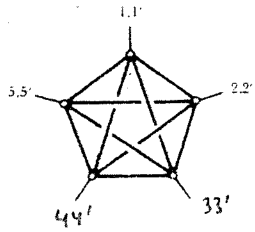
<u>Exemple</u>:



la carte



le graphe colonial



le graphe impérial

Soit k le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour colorier G (on colorie les sommets et deux sommets de même couleur ne sont pas joints par une arête). Considérons alors un sous-graphe G' de G nécessitant également k couleurs pour son coloriage et tel que G' soit le plus petit possible.

Alors en chaque sommet de G' il arrive au moins k-1 arêtes (car si un sommet a moins de k-1 arêtes, les autres peuvent être coloriés avec k-1 couleurs et le graphe G' aussi puisqu'il suffira d'utiliser pour le sommet provisoirement délaissé une des couleurs auxquelles il n'est pas lié).

Soient s' et a' le nombre de sommets et d'arêtes de G'. On a évidemment:

$$(k-1)\, s' \leq 2\, a'$$

puisqu'une arête joint 2 sommets.

Mais d'après la construction de G', sous-graphe de G, lui-même construit à partir de C, on a:

$$a' \leq a \qquad \text{et} \qquad s \leq 2\, s'\,.$$

De plus pour C (tracé sur une sphère), il faut au moins 3 arêtes pour limiter une "face" et 2 "faces" adjacentes définissent une arête donc:

$$3 f \leqslant 2a$$

Nous avons donc les relations:

$$\begin{cases} s - a + f = 2 \\ 3 f \leqslant 2a \\ a' \leqslant a \\ s \leqslant 2 s' \\ (k-1)s' \leqslant 2a' \end{cases}$$

qui conduisent à :

$$\begin{cases} a \leqslant 3s - 6 \\ a' \leqslant a \\ s \leqslant 2s' \\ (k-1)s' \leqslant 2a' \end{cases}$$

puis à :

$$\begin{cases} a \leqslant 6s' - 6 \\ (k-1)s' \leqslant 2a' \end{cases}$$

soit enfin, tout calcul fait:

$$(k-1)s' \leqslant 12s' - 12$$

et en divisant par s' :

$$k-1 \leqslant 12 - \frac{12}{s'} < 12$$

ce qui prouve que

$$\boxed{k \leqslant 12}\,.$$

Autres résultats

1°) Si au lieu d'avoir une seule colonie, chaque pays en a 2 ou 3 .... on démontrer qu'il faut alors 18 ou 24 couleurs. Heawood a démontré que si chaque pays admet au plus m composantes connexes, il faut au plus 6 m couleurs.

2°) Dans le cas du tore, le problème analogue est démontré pour toutes les valeurs de m: Il faut et il suffit de 6m + 1 couleurs.

3°) Dans le cas des 2 planètes où chaque pays connexe d'une des planètes a une colonie connexe sur l'autre, il faut 9, 10, 11 ou 12 couleurs, mais on n'en sait pas plus.

....

Bibliographie:

GARDNER, The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions.

HEAWWOD, Map Colour Theorem

, On the 4-colour Map Theorem

, Quaterly Journal of Mathematics 24(1890). 29(1898)

BECK-BLEICHER-CROWE, Excursions into Mathematics (Worth 1969)

Jean LEFORT.