LES POLYÈDRES EN SECONDE

Jean LEFORT

Introduction

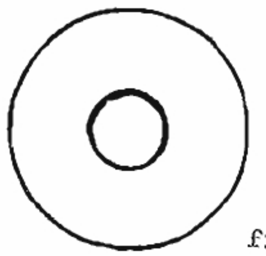


fig.1

Qu'est-ce que c'est ? "C'est un mexicain vu de dessus". Comprendre la réponse, c'est déjà connaître toute une imagerie, à commencer par celle du sombrero, du dessin en projection, ...

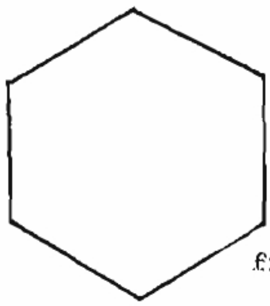


fig.2

En mathématique, c'est un peu la même chose. Qu'est-ce que c'est ? Plusieurs réponses peuvent être données. Suivant le contexte, l'une ou l'autre seule est valide : "hexagone", "contour apparent d'un cube", "projection d'un prisme hexagonal ", ..: Mais, pour comprendre chacune de ces réponses, il faut déjà avoir manipulé les objets mathématiques correspondants.

En seconde, un chapitre important du nouveau programme se rapporte à la géométrie dans l'espace. Pour moi, l'essentiel du programme consiste à faire manipuler des solides et des figures de l'espace et à montrer en quoi leur représentation plane permet de reconstituer les propriétés de ces solides ou figures. Une bonne vision dans l'espace est souvent la clef d'une bonne "vision" de théories mathématiques, plus abstraites, comme les espaces non euclidiens, le corps des p-adiques, les ensembles de cardinal transfini ...

Des dessins, mais pas n'importe lesquels

La représentation plane d'un objet dans l'espace peut se faire de bien des façons; citons en vrac: perspective cavalière, projection orthogonale, géométrie cotée, perspective conique, développement, section, coupe, ... Chacune de ces représentations possède ses règles, ses avantages et ses inconvénients. Voici à titre d'exemple quelques figures fausses. Il est difficile d'expliquer pourquoi elles le sont si on n'a pas manipulé longuement des solides.

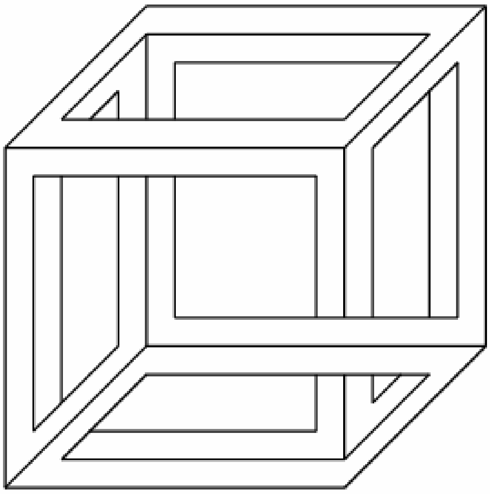


fig. 3

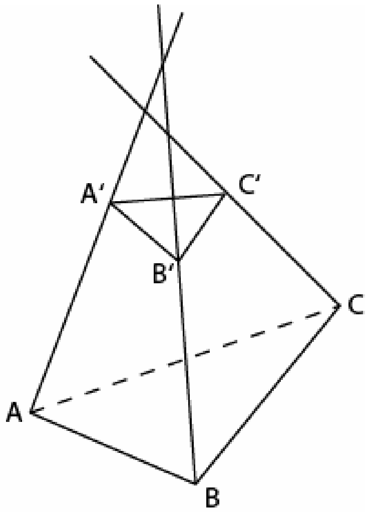


fig. 4

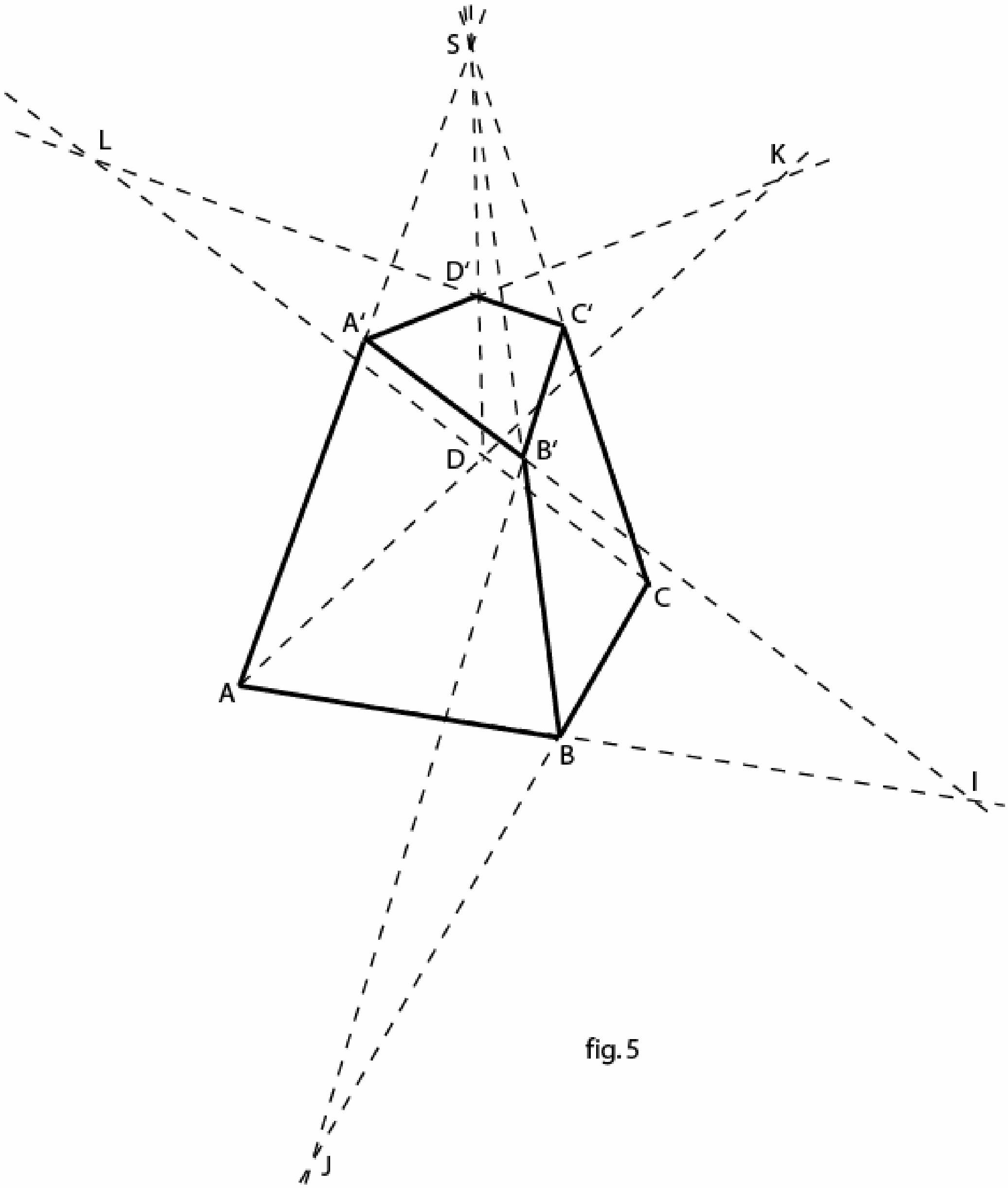


fig. 5

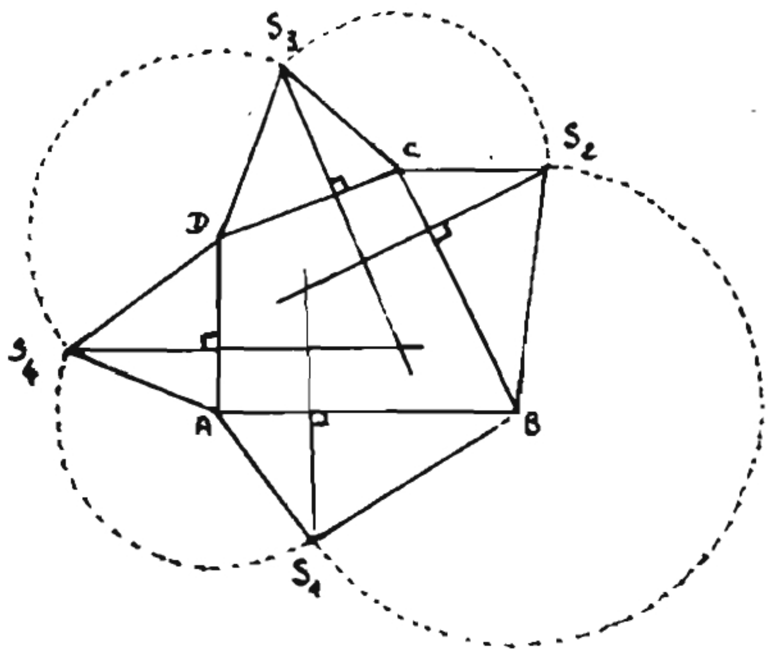


fig. 6

Il m'est difficile d'expliquer en une phrase simple et correcte pourquoi le dessin du "cube" (fig. 3) est faux, mais j'ose espérer que tous les lecteurs "voient" pourquoi il en est ainsi.
Pour le "tronc de pyramide" à base triangulaire (fig. 4), l'erreur provient du fait que les arrêtes devraient concourir; or il est facile de voir que les droites (AA'), (BB') et (CC') n'ont pas, sur le dessin, de point commun.
Par contre, les quatre droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') de la figure 4 sont bien concourantes. Mais on peut affirmer que, soit les 4 points *A, B, C, D,* soit les 4 points *A', B', C', D'* ne sont pas coplanaires sinon les deux plans ainsi déterminés se couperaient suivant "la droite" (*IJKL*).
Enfin, pour bien comprendre pourquoi la dernière figure n'est le développement d'aucune pyramide, le mieux est de découper un tel "patron" et d'essayer de le remonter. Il n'y a aucune difficulté à assembler deux faces consécutives telles que BS_1A et BS_2C ... mais pas moyen d'en assembler trois consécutives.
La raison profonde de cette impossibilité provient du fait que lorsqu'on bascule une face telle que ABS_1 autour de AB, S_1 décrit un arc de cercle d'axe (AB), cercle dont la projection sur le plan ($ABCD$) est un segment orthogonal à (AB). Pour que la figure soit le développement d'une pyramide, il faut que les quatre droites

(S_1H_1)	passant par	S_1 orthogonal à	(AB),
(S_2H_2)		S_2	(DC),
(S_3H_3)		S_3	(CD),
et (S_4H_4)		S_4	(DA),

soient concourantes en un point S' qui est la projection orthogonale du sommet S de la pyramide sur le plan de sa base. Cependant cette condition nécessaire n'est pas suffisante, comme le montre la figure 7 ci-dessous.

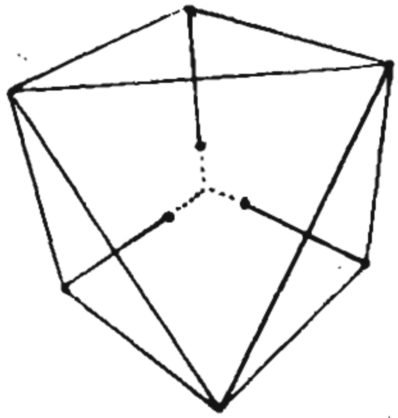


fig. 7

Ces quelques exemples simples peuvent inciter les élèves à étudier la géométrie dans l'espace. Les seuls résultats importants qu'ils ont au programme de seconde peuvent se résumer en :

1°) dans un plan de l'espace tout se passe comme dans un plan ordinaire.
2°) quand on change de plan, l'unité de longueur ne change pas.
3°) quelques règles d'incidences et le théorème des trois perpendiculaires.

Je n'ai pas la prétention de croire que cela suffise. De toute façon, ces trois points impliquent la connaissance de bien d'autres et je prétends que l'essentiel est que l'élève de seconde finisse l'année en comprenant une figure de géométrie dans l'espace. Dans ce but, je vais essayer de montrer que l'étude approfondie du cube et de quelques autres polyèdres simples, étude alliant la théorie et la manipulation, permet d'atteindre ce but.

Le cube

Il peut sembler qu'en seconde les élèves aient passé l'âge de jouer avec des cubes. Pourtant, ce solide élémentaire et fondamental est souvent encore mal connu et il vaut mieux l'analyser longuement (position et nombre de faces, d'arêtes...) avant toute autre manipulation. J'en veux pour preuve l'expérience suivante : dans une terminale E, j'avais demandé à un élève de dessiner un cube par un sommet, une diagonale de bout. Au début, il a commencé par tracer une croix

avant de rectifier son erreur.

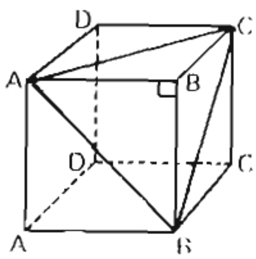


fig 8

Cela prouve qu'au cube est associée l'idée de carré ou celle de symétrie d'ordre 4, mais jamais celle de triangle équilatéral ou d'hexagone régulier. Et pourtant la symétrie ternaire existe bel et bien dans le cube comme le montre le triangle équilatéral de la figure 8. On peut profiter de l'occasion pour construire deux tétraèdres réguliers ayant mêmes sommets que le cube. Ce résultat est une bonne application des règles 1 et 2 énoncées plus haut.

Si on dispose de cubes en polystyrène, il peut être intéressant de les couper par différents plans donnant des sections triangulaires, carrées, rectangulaires, pentagonales, hexagonales (en particulier donnant un hexagone régulier - figure 9-), parallélogrammique ...

Cela met en évidence un certain nombre de théorèmes comme l'intersection de deux plans parallèles par un troisième ....

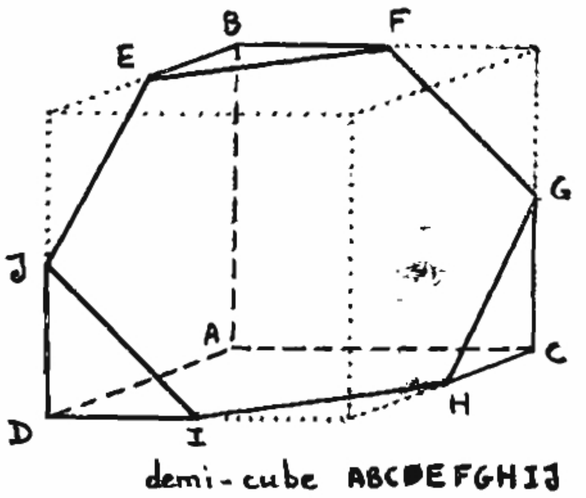


fig. 9

On peut également étudier l'ombre au soleil d'un cube et remarquer qu'il est impossible d'obtenir l'une des figures ci-dessous.

fig. 10

ce qui est une approche de la projection.

Le développement même du cube réserve lui aussi des surprises. Trouver tous les patrons possibles demande beaucoup d'agilité d'esprit. On ne pensera peut-être pas à celui-ci :

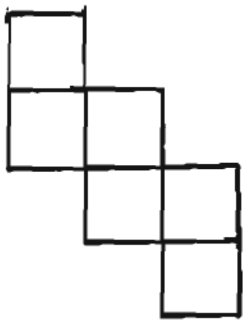


fig. 11

et l'étude des patrons est une bonne introduction à la notion de chemin le plus court sur un cube.

Vers d'autres polyèdres

On a vu que les sommets du cube peuvent être regroupés dans les sommets de 2 tétraèdres; montrons que l'octaèdre apparaît aussi dans l'étude du cube. Pour cela, prenons comme sonnets les centres des faces et joignons deux sommets par une arête s'ils correspondent à deux faces adjacentes. Il est facile de voir que l'on obtient ainsi un polyèdre régulier à 8 faces (d'où le nom d'octaèdre), 6 sommets et 12 arêtes. Chaque face est un triangle équilatéral. Si l'on effectue la même construction à partir des centres des triangles, on retrouve le cube. On dit que cube et octaèdre sont duaux l'un de l'autre.

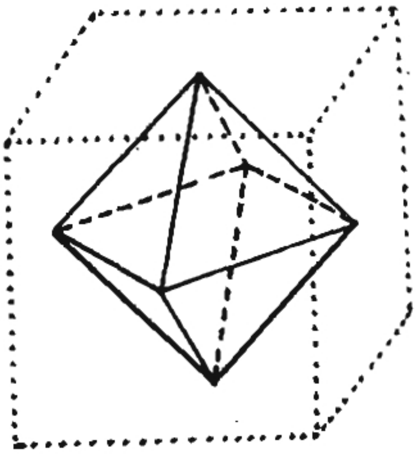
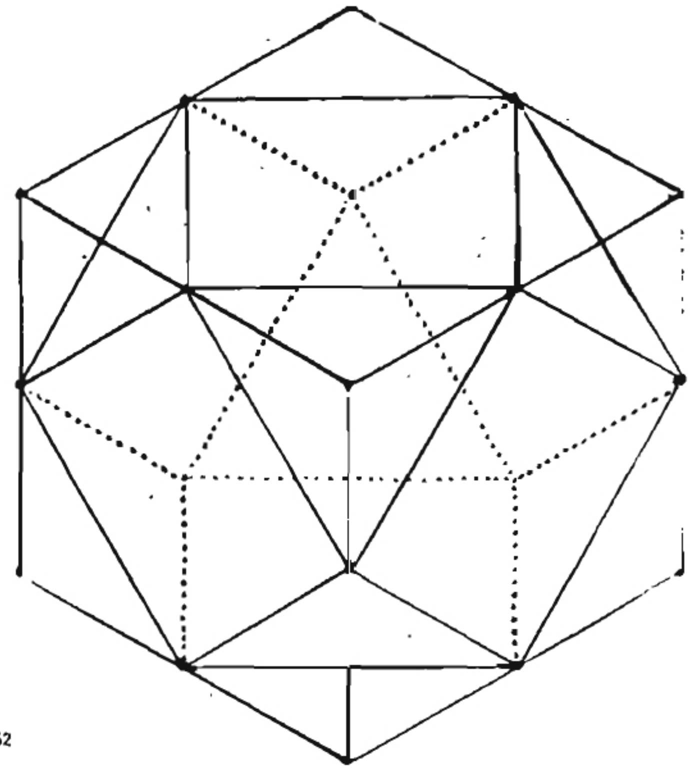


fig. 12

Cube octaèdre à l'intérieur d'un cube



52

fig. 13

A partir du cube, on peut construire bien d'autres polyèdres que l'on retrouve dans certaines structures cristallines. Les figures 13 et 14 ci-dessous montrent le cuboctaèdre et le dodécaèdre rhombique qui sont duaux l'un de l'autre.

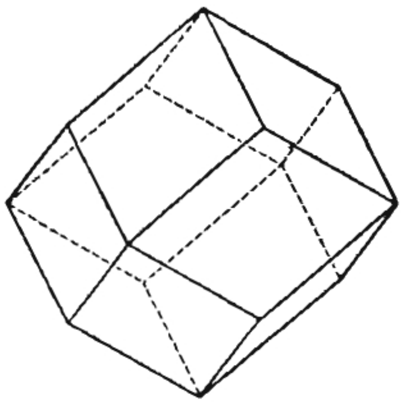


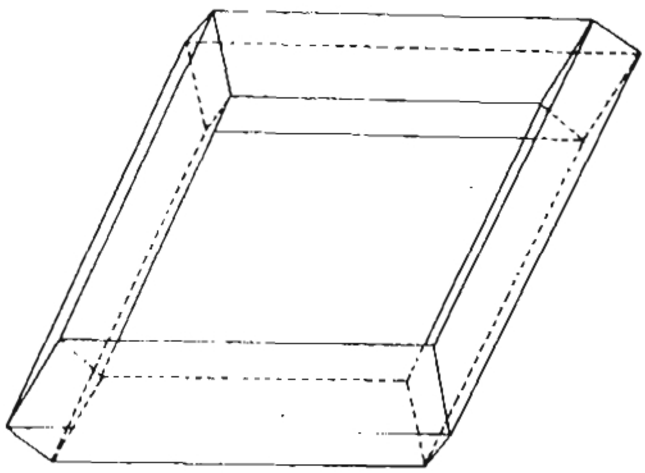
fig. 14 dodécaèdre rhombique

Le tableau ci-dessous récapitule quelques dénombrements simples sur les polyèdres déjà vus :

nom	nombre de sommets	nombre d'arêtes	nombre de faces	$s - a + f$	
tétraèdre	4	4	6	2	autodual
cube	8	12	6	2	duaux
octaèdre	6	12	8	2	
cuboctaèdre	12	24	14	2	duaux
dod. rhombique	14	24	12	2	
½ cube de la fig. 9	10	15	7	2	

On peut établir plus ou moins intuitivement la relation s-a+f = 2 qui semble apparaître. La méthode la plus habituelle consiste à ter une face et à étaler le reste sur un plan. Pour être bien comprise la "démonstration" nécessite le recours à des polyèdres convexes, mais cette relation dite relation d'Euler, s'applique à tous les polyèdres homotopes à une sphère, c'est-à-dire sans trous. Le solide ci-dessous vérifie seulement $s - a + f = 0$

fig. 15



Au moyen de la relation d'Euler et de considérations géométriques simples, on peut construire tous les polyèdres réguliers convexes. Il suffit de remarquer qu'autour d'un sommet, il faut au moins trois faces qui, assemblées, forment un coin (angle polyèdre). On ne peut donc avoir que 3, 4 ou 5 triangles équilatéraux, 3 carrés ou 3 pentagones réguliers. En remarquant que s'il y a n faces autour d'un sommet, il y a aussi n arêtes et que si chaque face possède c côtés (donc c sommets), on a les relations :

$2a = n\,s$	chaque arête détermine 2 sommets et chaque sommet n arêtes
$c\,f = 2a$	chaque arête détermine 2 faces et chaque face c arêtes.
$s - a + f = 2$	relation d'Euler

On peut alors construire les cinq polyèdres platoniciens: tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre. Ces deux derniers sont également duaux l'un de l'autre.

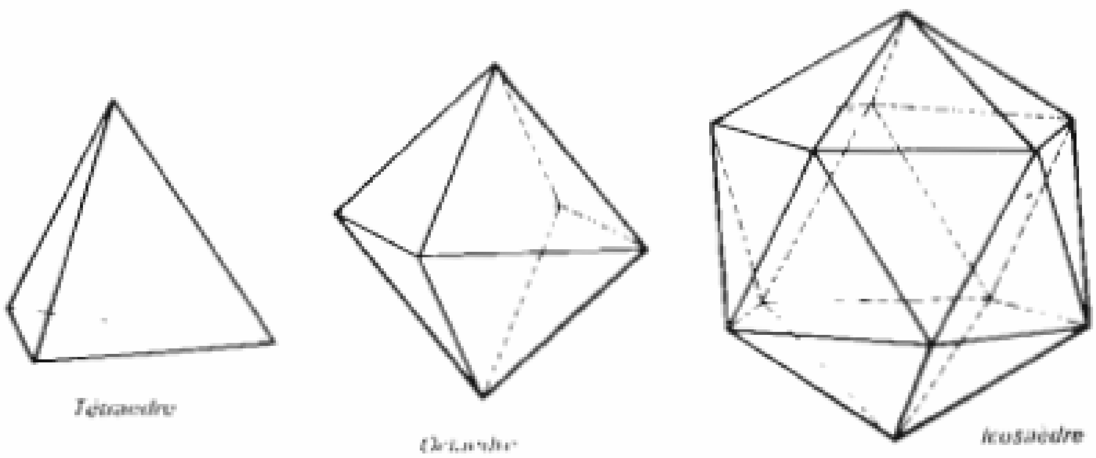
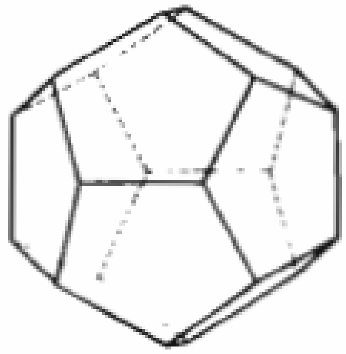


fig. 16 Les polyèdres réguliers autres que le cube



Dodecaedre

Le dodécaèdre permet de retrouver le cube dont nous étions partis. En effet, on peut regrouper les 20 sommets de ce polyèdre de façon à placer 5 cubes, chaque sommet appartenant à deux cubes distincts.

5 cubes dans un dodécaèdre

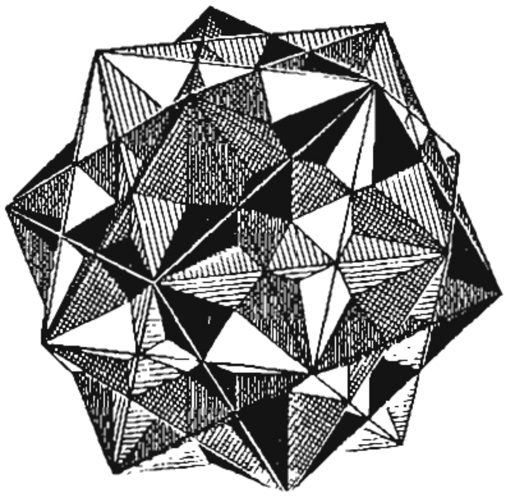


fig. 17

Conclusion et ouvertures

Bien d'autres curiosités géométriques peuvent être mises en évidence par l'étude des polyèdres. Citons les deltaèdres, les flexaèdres ... Les bons élèves s'émerveillent devant des dessins d'hypercube de dimension 4... Tous peuvent chercher des problèmes simples comme l'inexistence de polyèdres convexes à 7 arêtes....
Pour tous ceux qui voudraient aller plus loin, je conseille la courte bibliographie ci-après :

1. Une expérience de travail autonome en seconde, KOCH, IREM de Strasbourg.
2. Mathématiques, seconde, IREM de Strasbourg, ISTRA.
3. Modèles mathématiques, CUNDY, ROLLETT, CEDIC.
4. Excursions into Mathematics, BECK, BLEICHER, CROWE, WORTH Publishers.