Courrier des lecteurs,

se couvrir de gloire!

Le problème du "couvercle"

Dans le manuel de 3ème, élaboré par une équipe de l'IREM de Strasbourg (éd. Istra), on trouve une étude destinée à <u>ouvrir</u> l'enseignement sur la curiosité de nos élèves.

Voici ce texte:

1. Problème du «couvercle»*.

Découpons dans une feuille de papier un morceau C. On dit que C est un *couvercle* pour un ensemble E de points du plan si on peut placer C sur le plan de manière à cacher tous les points de E. (On dit : couvrir E.)

Problème : Chercher C aussi *petit* que possible, de façon qu'il soit un couvercle pour *tous* les ensembles E de diamètre au plus égal à 1. (Un ensemble E est de diamètre inférieur ou égal à 1 si deux points quelconques de E sont toujours à une distance inférieure ou égale à 1.)

Suggestion : Organiser dans la classe un concours. Trouver le plus petit couvercle C pour les ensembles E ayant seulement trois points (avec distances mutuelles inférieures ou égales à 1). Si vous pensez avoir une bonne réponse, adressez-la à l'IREM de Strasbourg, 10, rue du Général Zimmer, 67084 Strasbourg Cedex.

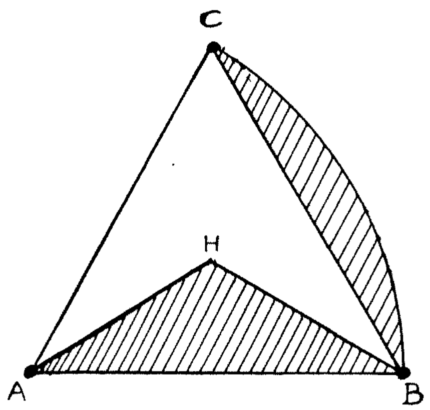
Le livre du professeur (compagnon indispensable du même ouvrage), indique à ce propos :

Il n'est évidemment pas question de demander aux élèves de trouver les solutions des problèmes encore ouverts que nous proposons ici, à moins de découvrir un Gauss au milieu des gosses de la classe... Mais l'apparente simplicité de certains de ces problèmes peut être un sujet d'étonnement.

Nous recevons à ce propos une lettre de M. Thierry Bautier qui enseigne à Arras. ("L'intérieur avec nous!")

Voici ce qu'il écrit :

Une solution pour un ensemble de trois points, de diamètre inférieur ou égal à 1 est :

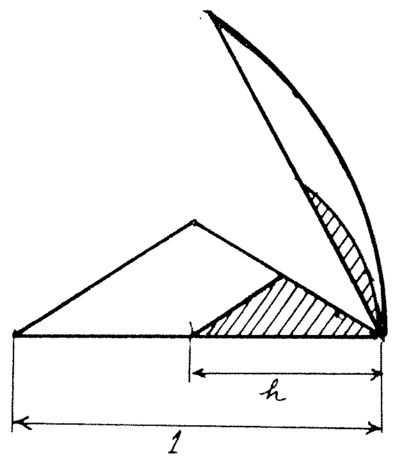


le triangle est équilatéral de côté 1. L'arc de cercle est obtenu en traçant le cercle de centre A, de rayon 1. Le point H est le centre de gravité du triangle ABC.

Il fallait donner une signification précise à l'expression "C aussi petit que possible". J'ai choisi celle-ci : Ce couvercle doit couvrir tout ensemble de trois points de diamètre inférieur ou égal à 1, mais il doit perdre cette propriété si on lui enlève l'un quelconque de ces points.

Il est facile de voir que le couvercle proposé recouvre bien tout ensemble de trois points de diamètre égal à 1. Si α et β sont les deux points à la distance 1, et γ le troisième point. Selon la position de γ par rapport à α et β, on met α et β en correspondance avec A et B, ou avec B et C, ou avec C et A.

Si l'ensemble est de diamètre égal à h $h < 1$, on sait alors qu'il est recouvert par le couvercle solution à l'échelle h. Or ce plus petit couvercle est inclus dans le plus grand:



donc le grand couvercle recouvre tout ensemble de trois points de diamètre inférieur ou égal à 1.

"le" plus petit couvercle recouvrant tout ensemble de trois points de diamètre inférieur ou égal à 1 est le couvercle solution auquel on a ôté le segment AH.

En effet, si $\alpha = A$, $\beta = B$ $\gamma \in [A,H]$, on peut aussi recouvrir $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ d'une autre manière.

$$\alpha = B \ , \ \beta = C \quad \gamma \in [B,H].$$

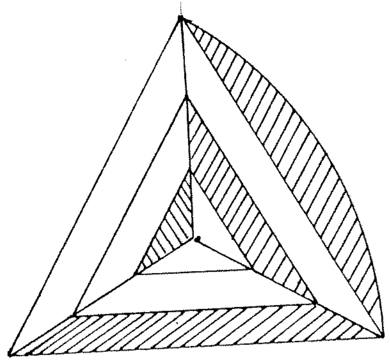
On n'a donc pas besoin de $[A,H]$.

Une fois cette précision apportée, tous les autres points sont nécessaires. Il suffit d'imaginer l'ensemble $\{A,B,D\}$ (A et B sont nécessaires pour recouvrir $\{A,B,C\}$) où D est le point que l'on a ôté. On ne peut plus le recouvrir par notre couvercle.

Si l'on met de côté le problème des bords que l'on évacue du couvercle (impossible dans la réalité), cette solution n'est pas l'<u>unique</u> "plus petit couvercle".

On peut en imaginer une infinité.

Par exemple:

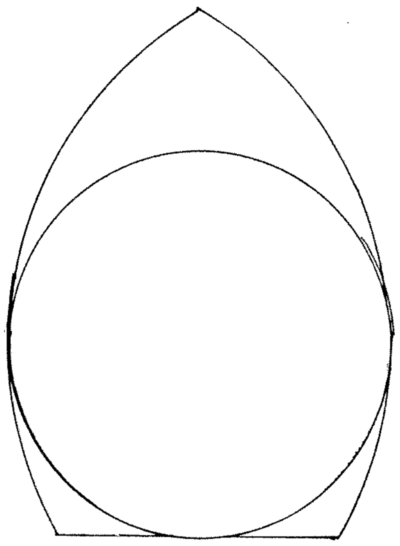


(la partie noircie est la partie conservée)

Je n'ai pas eu le temps de bien regarder le cas où le nombre n de points augmente.

Il me semble que les cas difficiles sont n = 4 et n = 5.

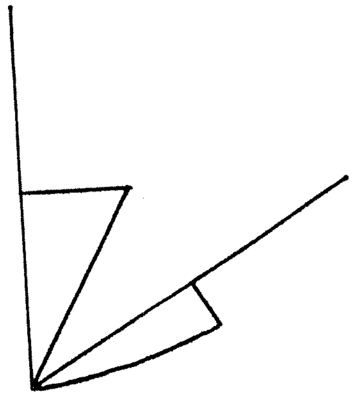
Par contre, pour $n \geqslant 6$, "le" plus petit" couvercle me semble être:



Si diam $\mathcal{E}$ = 1, on met la "pointe" du couvercle du côté des points les plus éloignés des deux points à la distance 1.

Notre correspondant termine sa lettre en émettant quelques doutes sur la possibilité de faire trouver ces solutions par des élèves.

Voici des extraits de la lettre par laquelle F. Pluvinage a répondu à notre collègue :



Cher Collègue,

Merci de votre lettre. Votre solution mérite d'être proposée à l'Ouvert (organe commun de l'IREM de Strasbourg et de la régionale APM). Elle est certainement minimale* au sens de l'inclusion, sens que vous avez, très raisonnablement, choisi pour l'expression "aussi petit que possible". Est-elle également minimale au sens des aires? A voir.

Un seul point, dans votre lettre, m'accroche un tout petit peu. La recherche est très certainement non seulement accessible, mais fructueuse pour des élèves. Je ne saurais trop vous conseiller de la proposer pour un travail en groupes de quelques séances (pas une toute seule), en évitant surtout de parler de votre solution. Vous risquez d'être étonné de toute la géométrie qui aura ainsi été abordée sérieusement, et de vous voir proposer des idées que vous n'attendiez pas. Essayez même de parler du problème avec 4 points au lieu de 3. Et si après 4 ou 5 séances de travail en groupes sur ce sujet, qui vous a intéressé vous-même, vous regrettez que votre classe se soit lancée dans cette activité, écrivez-moi une lettre d'eng...

Bien cordialement,

* toutefois, on peut faire plus "petit" en admettant de retourner la feuille de papier(isométries inverses).