

COURBES REMARQUABLES

"Le proximal de n points et leurs focales"*

On va étudier - élémentairement - une famille de courbes planes, qui ont une définition géométrique simple. Puis on étendra les résultats à des surfaces semblablement définies. Comme application essentielle, on trouvera le proximal de n points du plan ou de l'espace, problème posé jadis par Fermat pour $n = 3$.

Définitions : Nous appelons focale, le lieu des points du plan dont la somme s des distances à n points fixes est constante. Nous dirons que ces derniers sont les foyers de la courbe et que s est sa somme focale.

A part l'ellipse, nos focales n'ont pas de propriété optique, contrairement aux classiques focales de Darboux .

I. Nature analytique de la focale.

Toujours à part l'ellipse, l'étude de la focale semble inabordable par son équation cartésienne, tant elle est complexe.

Théorème 1. Une n-focale est une branche d'une courbe algébrique, qui est de degré 2^n en général .

Les rayons focaux r_i du point courant (x,y) de la focale vérifient l'équation multipolaire

$$(f) \quad r_1 + r_2 + \dots + r_n - s = 0.$$

La focale est une branche de la courbe d'équation

$$(A) \quad \prod (\epsilon_1 r_1 + \epsilon_2 r_2 + \dots + \epsilon_n r_n - s) = 0$$

où les $\epsilon_i = \pm 1$ présentent toutes les 2^n combinaisons de signes possibles. Le produit Π est invariant si on y change r_i en $-r_i$. Dans Π effectué, tout r_i ne figure donc que par son carré. Comme (A) est de degré 2^n par rapport aux r_i , elle est de degré 2^n au plus en x, y .

* Conférence faite à la Régionale de Strasbourg en mai 1981

Quelques propriétés de la courbe A

- 1) L'ellipse est le seul cas remarquable d'abaissement du degré de l'équation. En effet:

$$(1) \quad \Pi_2 = (r + r' - s)(-r - r' - s)(r - r' - s)(-r + r' - s) = 0$$

est du second degré seulement en x, y . (Les termes du quatrième degré en r_i sont $(r^2 - r'^2)^2 = (2cx)^2$, où c désigne la distance focale). Le degré de l'équation peut aussi s'abaisser s'il y a des foyers multiples.

- 2) La courbe A se compose de 2^n branches, dont certaines sont imaginaires*.

En effet, toute combinaison de signes dans

$$(2) \quad \epsilon_1 r_1 + \epsilon_2 r_2 + \dots + \epsilon_n r_n = s$$

donne une branche. Mais si, par exemple, tous les ϵ_i sont négatifs, la branche correspondante est manifestement imaginaire. Pour (1), seul le facteur $r + r' - s$ donne une branche réelle, si s est supérieur à sa valeur minimale $s_0 = c$.

- 3) Pour tout point intérieur à la focale f (on verra qu'elle est convexe et fermée)

$$\sum \epsilon_i r_i < \sum r_i < s.$$

Donc aucun point de A n'est intérieur à f .

- 4) Pour $n = 3$, le produit Π_3 a huit facteurs, mais A_3 ne comporte pour $s > s_0$ que 4 branches réelles, car aux facteurs qui ont deux ou trois ϵ_i négatifs, correspondent des branches imaginaires. Si par exemple, les foyers sont les sommets d'un triangle équilatéral de côté a et que $s = 2a$, chacune des trois branches réelles, autres que la focale, a la forme d'un coeur qui entoure f , et la rosace A_3 est effectivement du 8e degré (voir la figure qui précède l'article).

* Le mot imaginaire signifie ici inexistant et non "ayant une équation vérifiée par des nombres complexes x, y ."

5) Montrons que pour $s > s_0$, la courbe A n'a pas de point à l'infini. Une branche réelle ne pourrait avoir un tel point, que si dans (2) il y avait autant de signes (+) que (-), car pour un point à l'infini, les rayons focaux ne diffèrent que de quantités finies. Supposons par exemple $\epsilon_i = 1$ pour $i \leq \frac{n}{2} = k$, les autres ϵ étant négatifs, et soient A_1, A_2, \dots, A_k et A'_1, A'_2, \dots, A'_k les foyers correspondants. Alors en sommant en un point M du plan pour i de 1 à k

$$\sum r_i - \sum r'_i < \sum (r_i - r'_i) < \sum A_i - A'_i < s$$

où s est la somme focale de f . Donc pour ces ϵ la relation (2) ne sera satisfaite pour aucun point du plan. Ainsi l'existence d'une ellipse $(F, F', 2a)$ exclut la coexistence d'une hyperbole $(F, F', 2a)$.

6) Pour une quadrifocale par exemple, en plus de f , la courbe A du 16e degré ne comporte que quatre branches réelles. Elles entourent f et correspondent aux facteurs du type $r' + r'' + r''' - r - s$ de Π_4 .

Remarque. Toute courbe définie par une relation $\sum a_i r_i = s$, où les a_i sont des entiers positifs, est une courbe focale dont les foyers multiples sont d'ordre a_i . En particulier, les ovales de Descartes.

$$ar + br' = s \quad (a, b, \text{entiers positifs})$$

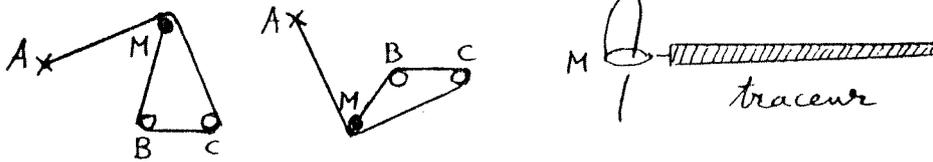
sont des focales.

II.- Construction par fil d'une focale.

Par fil, on peut facilement tracer une focale avec précision, en généralisant la construction de l'ellipse par la "méthode des jardiniers".

Nous nous contenterons d'exposer la méthode pour $n=3$, $n=4$ et un ovale de Descartes $n=5$.

1) Construction de la trifocale



On fixe la feuille à la planche à dessin par trois punaises, plantées aux foyers donnés A, B, C. Les extrémités d'un fil de longueur ℓ sont attachées l'une en A, l'autre à la pointe M du crayon. Le fil contourne le segment BC, et il est tendu en M par le crayon. Alors:

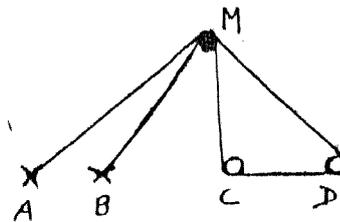
$$MA + MB + MC = \ell - BC$$

est bien constant.

Traceur : plutôt qu'un crayon, il est pratique d'employer un traceur, obtenu en enfonçant une grosse aiguille dans un porte-plume. Le fil est attaché au bout M du chas et y repasse pour former le lacet variable MBC. On repasse à l'encre la trace gravée sur la feuille par la pointe M.

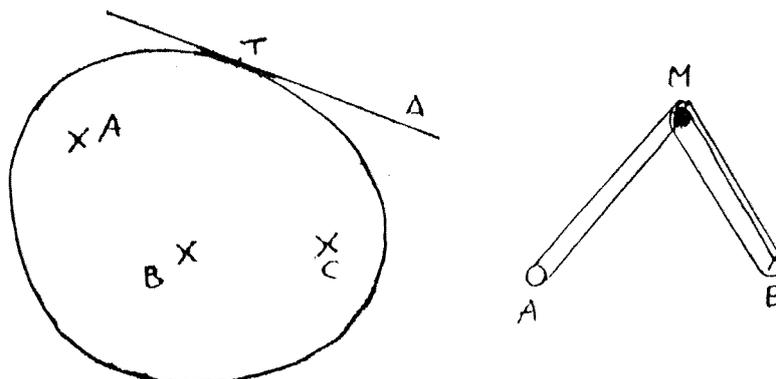
2) Construction de la quadrifocale .

La figure ci-contre montre comment le fil fixé en A et en B et contournant le triangle MDC, assure la constance de la somme focale.



3) Construction de l'ovale de Descartes $2r + 3r' = s$.

Partant du foyer d'attache B, le fil contourne successivement M, B, M et A pour revenir au point mobile M, second point d'attache du fil.



Application. Trouver sur une droite Δ le point tel que la somme de ses distances à trois points donnés A, B, C soit minimale.

On règle la longueur ℓ du fil de manière que la trifocale (A, B, C, ℓ) soit tangente à Δ . Le point de contact est le point cherché. (On admet ici implicitement que la trifocale est une courbe convexe fermée, ce qu'on démontrera par la suite).

III.- Construction de la tangente en un point d'une focale.

On sait qu'on peut construire avec règle et compas la tangente au point courant d'une focale. Mais au lieu de justifier cette construction par le gradient, nous l'établirons plus élémentairement par la cinématique.

Théorème 2. 1) La résultante \vec{R} des vecteurs unitaires, dirigés d'un point d'une focale vers ses foyers, est la normale à la courbe.

2) Si la courbe passe par un foyer F, ce point est anguleux.

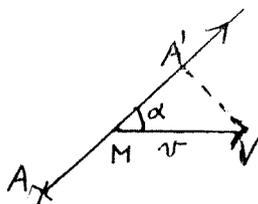
Soit \vec{R}' la résultante des vecteurs unitaires dirigés de F vers les autres foyers. Alors \vec{R}' bissecte l'angle 2α des demi-tangentes en F et $\cos \alpha = \frac{1}{R'}$ ($\frac{k}{R'}$ si F est foyer multiple d'ordre k). (Par définition $R' = \|\vec{R}'\|$)

Focale-point. 1) si en un point du plan $\vec{R} = 0$, il n'y passe pas de focale, ou plutôt la focale se réduit à ce point.

2) si en un foyer F le $R' < 1$ (ou $R' < k$ si le foyer est d'ordre k), il ne passe pas de focale par F, ou plutôt la focale se réduit à ce point (car on aurait $\cos \alpha \geq 1$).

On reviendra sur ces deux cas.

Démontrons à présent le théorème 2.



1) Soit \vec{MV} le vecteur vitesse du point M qui décrit la focale de foyers A, B, ..., C. Projetons V en A' sur l'axe dirigé par \vec{AM} . Comme $\vec{MA'}$ est la dérivée de AM par rapport au temps, la constance de $AM + BM + \dots + CM$ entraîne $\vec{MA'} + \vec{MB'} + \dots + \vec{MC'} = v \cos \alpha + v \cos \beta + \dots + v \cos \gamma = 0$

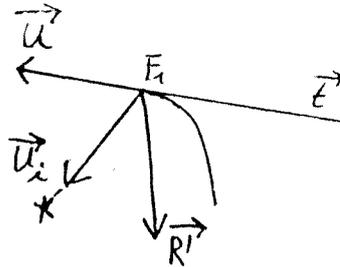
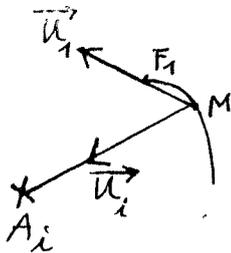
ou

$$(3) \quad \cos \alpha + \cos \beta + \dots + \cos \gamma = 0$$

α étant l'angle orienté (\vec{AM}, \vec{MV}) .

La relation (3) exprime que la projection de \vec{R} sur la tangente MV est nulle: \vec{R} est normale à la courbe.

2) Soient sur une focale un foyer F_1 et un point voisin M , et soient \vec{U}_i les vecteurs unitaires dirigés de M vers les foyers et $\vec{R} = \vec{U}_1 + \sum_{i=2}^n \vec{U}_i$ la résultante des \vec{U}_i ,



normale à la courbe en M . Quand M tend vers F_1 sur la courbe, \vec{U}_1 tend vers le vecteur unitaire \vec{U} , qui prolonge la demi-tangente \vec{t} en F_1 à l'arc

FM de la focale, et $\sum_{i=2}^n \vec{U}_i$ tend vers \vec{R}' , de sorte que \vec{R} tend vers un vecteur $\vec{U} + \vec{R}'$, normal à l'arc F_1M en F_1 . Par suite

$$\vec{U}(\vec{U} + \vec{R}') = 1 - R' \cos(\vec{t}, \vec{R}') = 0$$

$$\text{et } \cos(\vec{t}, \vec{R}') = \frac{1}{R'}$$

Si F_1 est foyer d'ordre k , k vecteurs unitaires visent de M vers F_1 . On trouve alors de même que $\cos(\vec{t}, \vec{R}') = \frac{k}{R'}$.

Remarques. 1) Le théorème s'étend à la courbe, lieu des points dont la somme algébrique s des distances à n points fixes est constante, le vecteur unitaire issu de M ayant alors le sens de \vec{AM} , si la distance AM figure négativement dans s (exemple: une branche d'hyperbole).

2) Un point également attiré par les foyers et astreint à se déplacer sans frottement sur une focale ne passant par aucun d'eux, a un mouvement uniforme (car la résultante des forces est normale à la courbe).

IV.- Forme des focales.

Il est d'abord clair que si la somme focale est assez grande par rapport à toute distance entre deux foyers, la courbe est presque circulaire .

Définitions. Une courbe convexe fermée est un ovale. Nous dirons qu'il est lisse, s'il n'a pas de point anguleux, et n-latère si sa courbure passe juste par n maxima.

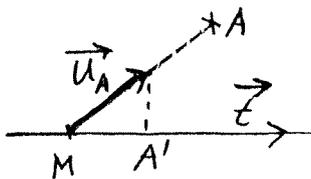
Voici alors un résultat court, simple, général et non évident :

Théorème 3. Toute focale est ovale. Si elle ne passe pas par un foyer, elle est lisse.

Remarques. 1) Nous verrons que si ses foyers sont alignés, elle peut dégénérer en un segment de droite.

2) Une focale régulière (foyers aux sommets d'un polygone régulier) est presque circulaire, si sa somme focale est très près de sa valeur minimale S_0 .

Il est presque évident que la courbe est fermée. Pour démontrer qu'une focale lisse est convexe, il suffit de montrer qu'elle n'a pas de tangente double.



Soit \vec{U}_A le vecteur unitaire dirigé d'un point M d'un axe tangent \vec{t} vers le foyer A et soit \vec{MA}' sa projection sur \vec{t} . Quand M parcourt \vec{t} dans le sens de cet axe, \vec{MA}' décroît constamment de 1 à -1. Il en est de même pour \vec{MB}' , .. , \vec{MC}' , obtenus en remplaçant A par les autres foyers B, .. , C. Par suite, la somme

$$\vec{MA}' + \vec{MB}' + \dots + \vec{MC}'$$

décroît de n à -n et passe une seule fois par la valeur zéro: \vec{t} est tangente simple.

Cela est encore vrai si A est sur \vec{t} , car alors \vec{MA}' est égal à 1 ou à -1, suivant que sur \vec{t} le point M précède A ou le suit. Le théorème s'applique aussi à une focale non lisse, comme limite d'une homofocale lisse.

Application. Sur une droite, il y a au plus deux points dont la somme des distances à n points donnés a une valeur donnée.

Conjecture. Une n-focale lisse est au plus n-latère.

Cette conjecture nous semble probable parce qu'elle est vraie pour l'ellipse et les nombreuses trifocales que nous avons tracées, et qu'elle est presque évidente pour les focales régulières.

Application. Il en résulterait que sur un cercle, on peut avoir de 0 à 6 points, qui ont une somme de distances donnée à trois points donnés. Car si la trifocale correspondante est au plus trilatère, elle coupe le cercle en 6 points au plus.

V.- Proximal de n points du plan.

Comme application essentielle du précédent, nous allons résoudre pour tout n un problème de minimum, important en mathématiques appliquées, traité jadis par Fermat, pour n=3. Il se pose quand on cherche le meilleur emplacement d'une centrale pour un ensemble donné de stations, routières, ferroviaires, électriques ou adductives ("problème du château d'eau").

Définitions. On appelle proximal de n points A_i du plan, le point (s'il est unique) dont la distance moyenne $\frac{\sum r_i}{n}$ aux A_i est minimale. On appelle point de Torricelli des A_i le point T (s'il existe) tel que la résultante des vecteurs unitaires dirigés de T vers les A_i soit nulle.

On désigne par R' la longueur de la résultante des vecteurs unitaires dirigés d'un des points donnés vers les autres.

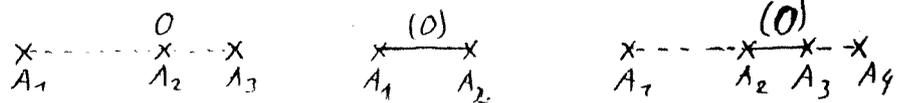
Voici alors un résultat essentiel:

Théorème 4. Pour n points non alignés du plan, il existe juste un proximal O. Si leur point de Torricelli existe, O est ce point; sinon O est un des points donnés (celui pour lequel $R' < 1$, ou $R' < k$ si le point donné est multiple d'ordre k.)

Nous distinguerons trois cas.

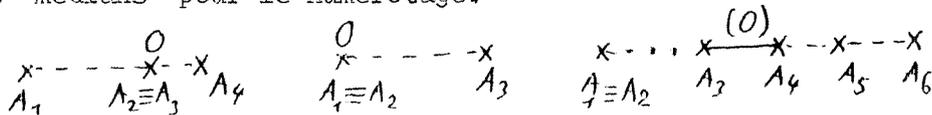
1) Les points donnés A_i sont alignés. Si les A_i sont distincts, on voit faci-

lement que 0 est un de ces points si n est impair, et qu'il est indéterminé sur un segment fermé (0) si n est pair. Il y a le même nombre de points donnés de part et d'autre de 0, respectivement de (0); 0 est le "point médian" des points donnés, (0) est leur "segment médian".



Il en est de même s'il y a des A_i multiples, avec la convention suivante:

on numérote tous les points dans leur ordre de succession sur leur droite-support (par exemple $A_1, A_2, A_3 = A_4 = A_5, A_6, \dots, A_n$); 0 ou (0) sont alors "médiants" pour le numérotage.



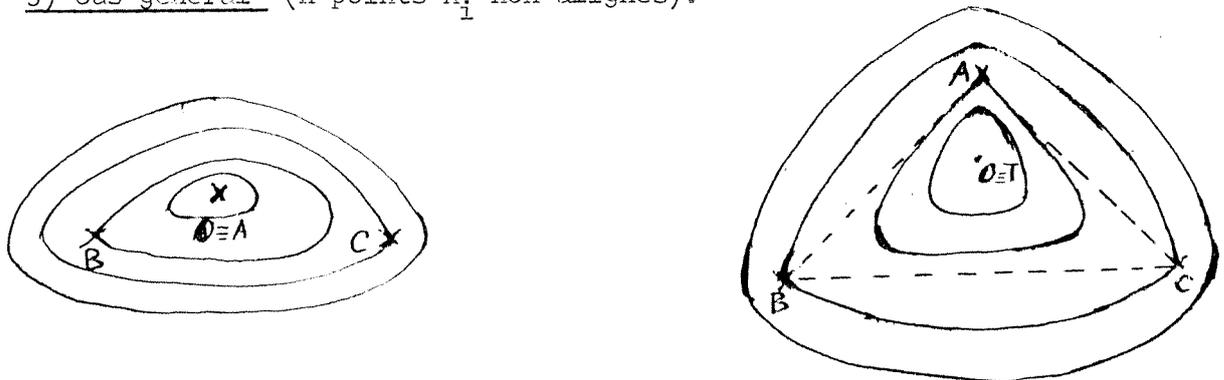
2) Les points donnés sont les sommets d'un triangle

Le problème est alors classique. Dans la première moitié du 17ème siècle, d'éminents mathématiciens l'ont traité, notamment Torricelli, Cavalieri* et Fermat. Il y a deux cas à distinguer ** :

a) les angles du triangle sont inférieurs à 120° . On montre que 0 est le point d'où l'on voit les trois côtés sous le même angle: 0 est donc le point de Torricelli des sommets.

b) sinon, on montre que 0 est le sommet de l'angle obtus du triangle.

3) Cas général (n points A_i non alignés).



* Cavalieri, Exercitationes geometricae (1647)

**Jean de Biasi, Quelques problèmes d'extremum, Bulletin 326 de l'APMEP (décembre 1980)

La focale, lieu des points du plan tels que

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = s$$

à les points donnés pour foyers. Si s varie, on obtient une famille d'ovales emboîtés, car deux homofocales ne peuvent se couper (un point du plan détermine un seul s). Ces ovales sont aussi reserrés qu'on veut.

Si les points donnés ont un point de Torricelli T , la vitesse en ce point n'a aucune direction d'après le théorème 2: la focale passant par T se réduit nécessairement à ce point, qui est donc O . Si T n'existe pas, les seuls points où la construction par le théorème 2 pourrait ne pas donner de tangente sont les foyers. Le proximal O ne peut donc être un point autre qu'un foyer (celui pour lequel $R' < 1$, ou $R' < k$ si le foyer est d'ordre k).

Construction approchée du proximal.

Les n points non alignés A_i étant donnés, leur proximal est le point d'évanouissement des homofocales f qui les ont pour foyers. On dessinera donc avec le traceur des f de plus en plus petites, en diminuant progressivement la longueur du fil.

Détermination mécanique du proximal.

En associant à tout point du plan la résultante \vec{R} des attractions unitaires exercées sur lui par n points donnés A_i , on crée un champ de forces défini partout, sauf

- aux points A_i , où \vec{R} est indéterminé,
- au point de Torricelli des A_i (s'il existe), où \vec{R} est nulle.

On peut déterminer expérimentalement le proximal O des A_i , par un dispositif de poids égaux facile à imaginer, car si O est unique, il est en équilibre stable dans le champ, et si O est indéterminé sur un segment (O) (ce qui peut arriver si les A_i sont alignés), il est en équilibre indifférent sur (O) .

Notons que les homofocales de foyers A_i sont les trajectoires orthogonales des lignes de force du champ, qui concourent d'ailleurs en O .

VI.- Proximal et surfaces focales de n points de l'espace.

Etendons rapidement l'étude précédente à l'espace.

Définitions.

Soit s la somme des distances d'un point M à n points donnés A_i de l'espace. On appelle encore focale, le lieu des M pour s constant. Le lieu des M d'un plan à s constant est dit focale plane. Les A_i sont les foyers de la surface focale ou de la focale plane. Le proximal et le point de Torricelli sont définis comme pour des A_i coplanaires. On appelle ovoïde toute surface convexe fermée. Il est dit lisse s'il n'a pas de point conique.

Théorème 6. Une n-focale est une nappe d'une surface algébrique, de degré 2^n en général.

La démonstration du théorème 1 s'applique ici identiquement.

Théorème 7. La normale en un point d'une surface focale est la résultante des vecteurs unitaires, dirigés du point vers les foyers. (on suppose que le point n'est pas un foyer).

On le démontre aisément à partir de l'équation multipolaire.

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = s$$

Notons qu'ici encore la résultante des vecteurs unitaires est nulle au point de Torricelli, s'il existe, et indéterminée en un foyer.

Théorème 8. Si une surface focale passe par un foyer F , on considère la résultante \vec{R} des vecteurs unitaires dirigés de F vers les autres foyers. Le cône des demi-tangentes en F est de révolution; son axe est \vec{R} et sa demi-ouverture α est donnée par $\cos \alpha = \frac{1}{R} \left(\frac{k}{R} \right)$, si F est foyer multiple d'ordre k .

Théorème 9. Toute surface focale est ovoïde, toute focale plane est ovale. Si elles ne passent pas par un foyer, elles sont lisses.

Comme au théorème 3, on démontre que la surface focale lisse n'a pas de tangente double. Une focale plane est ovale, comme intersection d'un plan et d'un ovoïde de mêmes foyers et somme focale que la courbe.

L'ovoïde focal ne peut dégénérer en segment de droite, que si sa somme focale est minimale et que les foyers sont alignés et en nombre pair. On montre aussi ceci :

Le proximal de n points non alignés est le point d'évanouissement des ovoïdes homofocaux emboîtés, dont ces points sont les foyers. Soumis à des attractions égales par les foyers, il est en équilibre stable.

Mais surtout, on démontre comme le théorème 4, le résultat capital suivant, inédit à ma connaissance :

Théorème fondamental 10. Le proximal de n points non alignés du plan ou de l'espace est leur point de Torricelli, s'il existe; sinon il est l'un des points donnés (celui dont $R' < 1$, ou $R' < k$ si le point est multiple d'ordre k).

Ce théorème s'applique sans doute dans l'espace de dimension quelconque.

VIII.- L'oeuf de poule moyen.

Terminons sur une note un peu plaisante. Si l'on dit "ils se ressemblent comme deux oeufs", on sous-entend que l'oeuf a une forme bien déterminée, donc géométrique. C'est ce que nous allons justifier.

Dans l'Information scientifique, le naturaliste Sire a tracé le profil moyen statistique de l'oeuf de poule. Dans une note parue dans la même revue (décembre 1957) intitulée "L'oeuf de poule a-t-il une forme géométrique?", nous avons montré que ce profil coïncide (à l'épaisseur du trait de crayon près), avec une trifocale pour un choix convenable de trois foyers alignés et de la somme focale. L'oeuf moyen a donc une surface trifocale, à l'épaisseur de la coque près.

Il se trouve que si l'on désigne par h la hauteur de cet oeuf, par p le périmètre de son profil et par e la base des logarithmes naturels, on a avec une bonne approximation

$$p = eh$$

analogue à $p = \pi h$ pour la sphère.

E. EHRHART, Strasbourg.