RALLYE 1981

Un exercice, sept méthodes!

L'un des problèmes donnés en Première au Rallye Mathématique de cette année était le suivant :

" Montrer que si n réels ($n \geqslant 2$) ont une somme non nulle, pour tout entier p tel que $1 \leqslant p < n$, il existe p termes de cette suite dont la somme est également non nulle ".

Nous devons cet énoncé à notre collègue WEISSBECKER du Lycée Couffignal de Strasbourg. L'idée lui en a été donnée par le théorème classique qui énonce la propriété dite d'"associativité" du barycentre d'un "système pondéré" de n points: on peut remplacer p de ces points, de masse totale non nulle, par leur barycentre, etc, etc .... Une question est apparue naturelle à notre collègue: est-il possible de trouver des sous-systèmes ayant cette propriété pour tout p donné ($p < n$) ?

En dehors de son intérêt pour le Rallye, cet exercice nous a paru remarquable à plus d'un titre.
D'abord, tout en étant accessible à un élève de seconde, il peut "poser des problèmes" à un élève de terminale, voire à un élève de niveau supérieur. Ensuite la correction des copies du Rallye nous a révélé une richesse tout à fait inattendue des manières de l'aborder (*). Aussi pensons-nous qu'il pourrait constituer un thème instructif de réflexion et de discussion, autant dans une classe de seconde, de première que de terminale.

C'est ce qui nous a incité à le proposer aux lecteurs de l'"Ouvert" qui trouveront ci-dessous un résumé des solutions que nous connaissons. Nous espérons qu'ils nous en proposeront quelques autres...

F.KOECHLIN R.ISS

Solutions : N.B. Pour simplifier le langage, nous commettons l'abus qui consistera à désigner par s_p à la fois une suite de p termes choisis parmi les n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ donnés et la somme des termes de cette suite (même dans le cas $p = 1$).

Solution 1: Que se passe-t-il si toutes les s_p (pour p donné) sont nulles ?
Si toutes les sommes s_p (il y en a C_n^p) sont nulles, leur somme l'est aussi. Or dans cette somme, tous les a_i figurent le même nombre de fois k (avec $k = C_{n-1}^{p-1}$) . Elle s'écrit donc $k(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = 0$

Or, $s_n \neq 0$. Il ya donc au moins une s_p non nulle.

Solution 2 : Si une s_p est nulle, peut-on, en y changeant un terme, en déduire une s_p non nulle ?

Si, par exemple, $s_p = a_1 + a_2 + \ldots + a_p = 0 \qquad 1 \leqslant p \leqslant n-1$,
les (n-p) autres nombres ne sont pas tous nuls, car leur somme est non nulle. On en choisit un non nul, soit b.
Les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ne sont pas tous égaux à b (sinon on aurait $s_p = pb \neq 0$). Il en existe donc un qui est différent de b, par exemple, $a_1 \neq b$. Alors :

$$s'_p = b + a_2 + \ldots + a_p = b - a_1 \neq 0$$

Solution 3: D'une s_p non nulle, peut-on extraire une s_{p-1} non nulle ? ("récurrence descendante" sur p)

Supposons $s_p = a_1 + a_2 + \ldots + a_p \neq 0 \qquad 2 \leqslant p \leqslant n$
Un des termes de cette somme est différent de s_p (sinon on aurait $ps_p = s_p$ et donc $s_p = 0$ car $p \neq 1$)
Soit par exemple $a_p \neq s_p$. Alors :

$$s_{p-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1} = s_p - a_p \neq 0$$

A partir de $s_n \neq 0$, on peut donc, en enlevant un terme chaque fois, trouver une suite de sommes $s_{n-1}, \ldots, s_1$ non nulles.

Solution 4 : Récurrence sur n

Hypothèse de récurrence: supposons que, lorsque (n-1) nombres ont une somme non nulle, pour tout $p \leqslant n-1$, il existe une s_p non nulle.

Si $a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_n \neq 0$, en raisonnant comme dans la 3ème solution, on en déduit une somme s_{n-1} non nulle.

La récurrence (facile à amorcer) est donc établie.

Solution 5: A partir d'une s_p non nulle, peut-on fabriquer une s_{p+1} non nulle ? ("récurrence ascendante" sur p).

Soit par exemple: $a_1 + a_2 + \dots + a_p = s_p \neq 0 \quad 1 \leqslant p \leqslant n-2$

- ou bien les (n-p) nombres restants (ils sont au moins 2) ne sont pas égaux, alors il y en a au moins un qui est différent de $(-s_p)$.

  Par exemple: $a_{p+1} \neq -s_p$

  Alors: $$s_{p+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_p + a_{p+1} = s_p + a_{p+1} \neq 0$$

- ou bien les (n-p) autres nombres sont égaux à $-s_p$; dans ce cas les $a_1, a_2, \dots, a_p$ ne sont pas tous égaux à $-s_p$ (sinon on aurait $-ps_p = s_p \Rightarrow s_p = 0$). Soit par exemple: $ap \neq -s_p$. Alors :

$$s'_{p+1} = (a_1 + \dots + a_{p-1}) + a_{p+1} + a_{p+2} = (sp - ap) - 2s_p = -(s_p + a_p) \neq 0$$

A partir d'un terme non nul de s_n (il y en a au moins un), on peut donc trouver une suite de sommes $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ non nulles.

Solution 6: que se passe-t-il si des sommes s_p qui ne diffèrent que par un terme sont nulles ?

Un des a_i au moins est non nul, par exemple $a_1 \neq 0$.

Supposons nulles les (p+1) sommes obtenues en supprimant successivement dans $a_1 + a_2 + \dots + a_p + a_{p+1}$

les termes $a_1, a_2, \dots, a_{p+1}$:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 + \cdots + a_p + a_{p+1} = 0 \\ a_1 + a_3 + \cdots + a_p + a_{p+1} = 0 \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_p + a_{p+1} = 0 \\ \text{-----------------} \\ a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la première équation des suivantes, on obtient $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = a_{p+1}$

On en déduit $a_1 + a_2 + \ldots + a_p = pa_1 = 0$
Or $a_1 \neq 0$. Sur les $(p+1)$ sommes s_p ci-dessus, il y en a donc au moins une non nulle.

<u>Solution 7</u> : <u>Construire une $s_p \neq 0$ en choisissant convenablement le signe de ses termes</u>.

Quitte à changer tous les signes, nous pouvons supposer $s_n > 0$. On en réordonne les termes de façon que les premiers termes $a_1, \ldots, a_k$ soient strictement positifs, les suivants $a_{k+1}, \ldots, a_n$ négatifs ou nuls.

Il est facile de voir alors que toute somme

$$s_p = a_1 + a_2 + \ldots + a_p \qquad 1 \leqslant p \leqslant n$$

est strictement positive. (c'est évident si $p < k$; sinon s_p est supérieure ou égale à s_n).

<u>Commentaire</u>:

- la propriété: (1) $a \neq 0 \Rightarrow ka \neq 0$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ est essentielle dans <u>toutes</u> ces démonstrations, même dans la 7ème où la structure de groupe ordonné suppose la propriété (1).
- seules les solutions 2 et 7 permettent de fabriquer directement (autrement que par récurrence) une somme s_p non nulle, pour p donné.

---

* sur les 160 copies de première corrigées au Rallye, 113 ont abordé ce problème. 25 copies n'ont pas compris l'énoncé (interprété de la façon

suivante: $\forall n, \exists p < n$ tel que $s_p \neq 0$). 53 copies n'ont rien fourni de valable (étude pour des petites valeurs de n ou p seulement, raisonnements faux, etc...). 35 copies en revanche ont fourni sinon une démonstration complète, au moins une idée de raisonnement valable. Ainsi, six copies utilisent la solution 1; huit, la solution 2; treize, les solutions 3 ou 4; cinq, la solution 5. Des variantes des solutions 6 et 7 proposées respectivement par 1 et 2 copies.

<u>QUESTION:</u> QUEL JOUR SOMMES-NOUS ?

<u>REPONSE</u> :

$$[\,2{,}6m - 0{,}2\,] + d + a + [\,\tfrac{a}{4}\,] + [\,\tfrac{s}{4}\,] - 2\,s$$

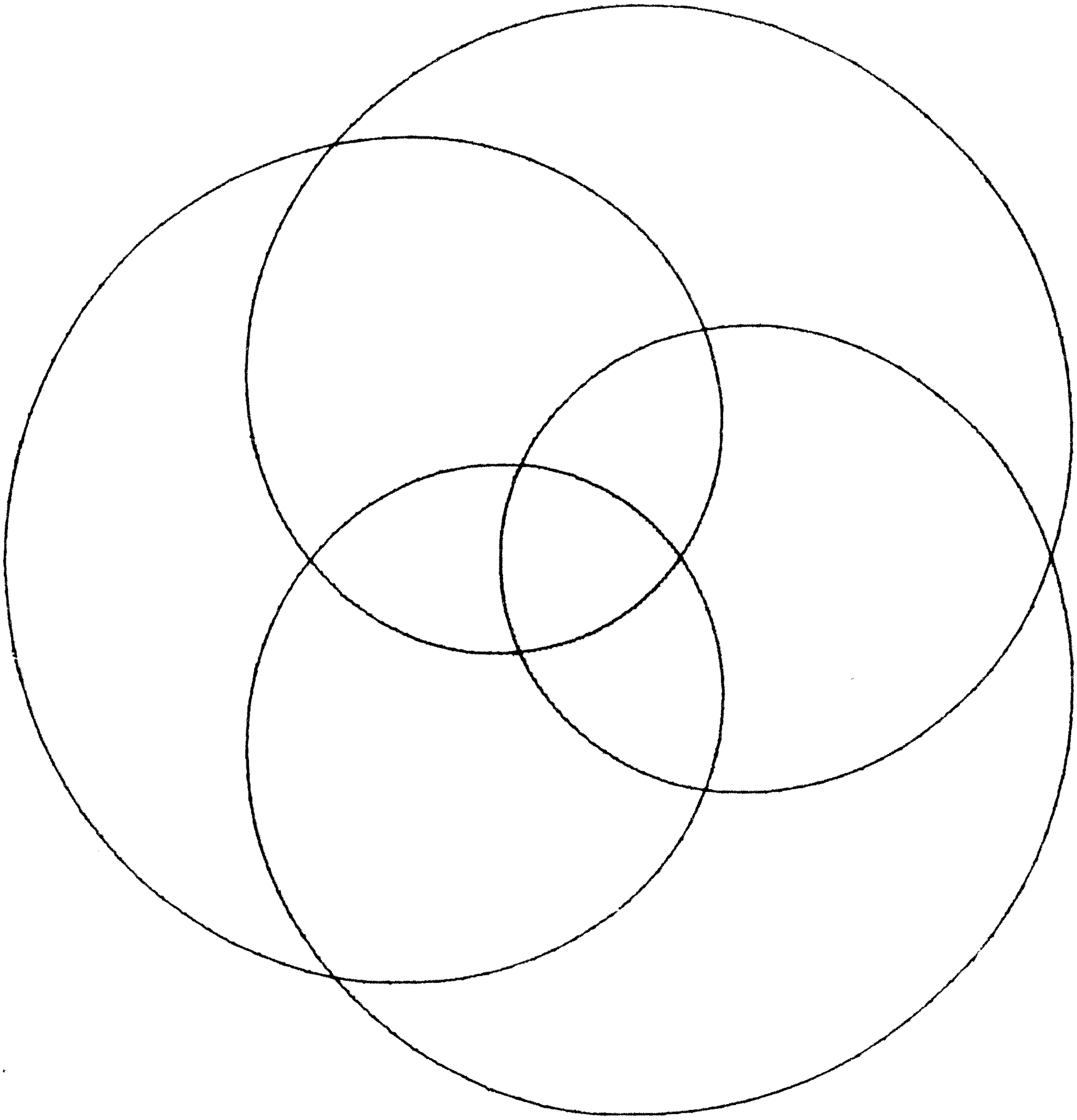
Ce résultat est à prendre modulo 7, et fournit le nom du jour en question suivant la convention: $\dot{0}$ est dimanche, $\dot{1}$ est lundi ...

D'autre part :

- d est la date dans le mois
- m est le numéro du mois, mars portant le n°1, avril le n°2, ... février le n°12.
- a est constitué des deux derniers chiffres du millésime.
- s est constitué des premiers chiffres du millésime.

Exemples :

- Pour le 16 avril 1981, d= 16; m= 2; a= 81; s= 19
- Pour le 1er janvier 2000, d= 1; m= 11; a= 99; s= 19



Cette rosace est une des courbes multifocales étudiées dans l'article qui suit. Elle est le lieu des points dont les distances r, r', r'' aux sommets du triangle curviligne central vérifient:

$$\pm r \pm r' \pm r'' = 2a,$$ a étant le côté du triangle.

Il s'agit d'une courbe algébrique du 8e degré, fermée et sans points anguleux. Elle se trace d'un seul trait.

Le dessin a été effectué par un micro-ordinateur APPLE II; d'après un programme de Nicole VOGEL.

Cette rosace illustre le premier chapitre sur les courbes multifocales de la page 30 . C'est une courbe algébrique ($\mathcal{A}$) du 8e degré. On peut la tracer d'un seul trait, fermé et sans point anguleux.
Soit a le côté du triangle équilatéral T, dont les sommets sont les points doubles de ($\mathcal{A}$) proches du centre, et soient r, r', r" leurs distances d'un point du plan. La trifocale lieu des points tels que

$$r + r' + r'' = 2a$$

est le triangle curviligne de mêmes sommets que T. Chacune des trois autres branches de ($\mathcal{A}$), ,en forme de coeur, est le lieu des points qui vérifient une relation du type

$$r' + r'' - r = 2a.$$

Chaque droite-hauteur de T porte 3 points doubles de la courbe ($\mathcal{A}$); celui qui est un sommet de T se trouve au milieu du segment des deux autres, de longueur 4a. Les côtés a, b, c des trois triangles équilatéraux, dont les sommets sont des points doubles, vérifient

$$c - b = 2a.$$