THEME ET VARIATION

Les étudiants connaissent notre goût pour la géométrie : ils passent souvent dans notre bureau, à la recherche d'une "petite solution géométrique". Voici un exemple, le problème de Bertrand, qui nous a paru instructif, tant par la variété des méthodes d'attaque (il existe bien d'autres solutions que celles qui suivent) que par la richesse des prolongements (vous imaginerez facilement maints problèmes de construction et d'extremeum).

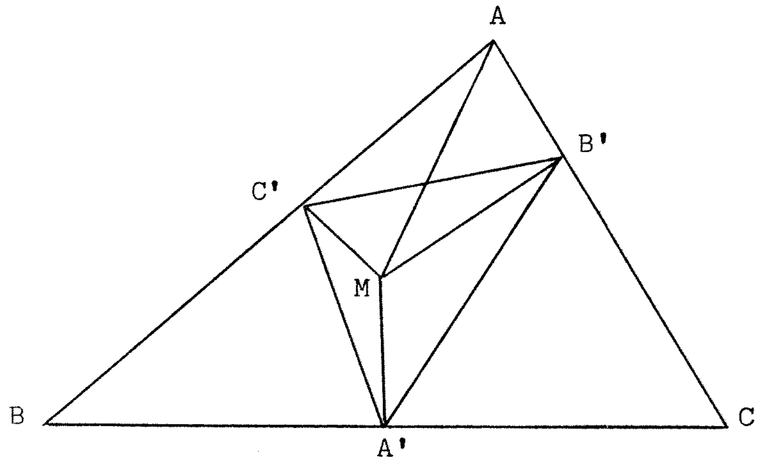
Lisez l'énoncé, sous la forme même où il fut proposé aux étudiants, tracez la figure et au lieu de vous précipiter sur la solution "naturelle" : déterminants et analytique, méditez...

PROBLEME DE BERTRAND

ON DESIGNE PAR Γ LE CERCLE CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE DONNE ABC. SOIT M UN POINT SE PROJETANT ORTHOGONALEMENT EN A'B'C' SUR LES COTES DU TRIANGLE. ON DESIGNE PAR S(M) L'AIRE ALGEBRIQUE DU TRIANGLE A'B'C' (son signe est déterminé par la position du triangle par rapport à son bord, parcouru dans le sens A'B'C' : triangle vu à gauche signe +, à droite signe −). DETERMINER S(M). EN DEDUIRE LE THEOREME DE LA DROITE DE SIMSON.

NOTATIONS ET CONVENTIONS

Dans toute la suite nous supposerons l'aire algébrique s du triangle ABC positive. A'B'C' sera appelé triangle podaire de M ("podos", pied). Si M est sur l'une des droites AB, BC, CA, S(M) est nulle si et seulement si M est en A, B, ou C (remarque I)



SOLUTION I

Nous supposons que M n'est sur aucune des droites AB, BC, CA.

Le quadrilatère $AB'MC'$, dont les angles B', C' sont droits est inscriptible dans le cercle de diamètre MA : l'angle $\widehat{B'MC'}$ a même sinus que l'angle $\widehat{BAC}$ ou A, donc :

$$MA = \frac{B'C'}{\sin(\widehat{B'MC'})} = \frac{B'C'}{\sin A}$$

R étant le rayon du cercle Γ circonscrit au triangle ABC, de côtés a, b, c, on a $\sin A = \frac{a}{2R}$ d'où :

$$B'C' = \frac{a}{2R} MA .$$

Les côtés du triangle podaire de M s'expriment facilement en fonction de MA, MB, MC :

$$a' = \frac{a}{2R} MA \qquad b' = \frac{b}{2R} MB \qquad c' = \frac{c}{2R} MC$$

(il est immédiat que ces résultats restent valables si M est sur la droite

AB , ou BC , ou CA) .

La formule de Héron (cf renvoi 1) donne la surface arithmétique du triangle podaire

$$|S(M)| = \frac{1}{4}\sqrt{(a'+b'+c')(b'+c'-a')(c'+a'-b')(a'+b'-c')}$$

$$|S(M)| = \frac{1}{16R^2}\sqrt{(aMA+bMB+cMC)(bMB+cMC-aMA)(cMC+aMA-bMB)(aMA+bMB-cMC)}\ .$$

Droite de Simson.

Les points ABC jouant le même rôle nous pouvons supposer que a' est supérieur ou égal à b' et c' . Pour que les points A'B'C' soient alignés il faut et il suffit que le plus grand côté a' du triangle A'B'C' soit égal à la somme des deux autres côtés : $aMA = bMB+cMC$. Cette condition est remplie si, et seulement si, M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC d'après le théorème de Ptolémée(cf renvoi 2) et la remarque 1. Il existe une droite passant par A'B'C' , dite droite de Simson de M , si et seulement si M est sur le cercle circonscrit ou triangle ABC .

Complément.

Déterminer M pour que son triangle podaire soit semblable à un triangle donné est tout aussi simple : les rapports $\frac{MB}{MA}$, $\frac{MC}{MA}$ sont connus.

SOLUTION 2.

Utilisons l'inversion I de pôle A , de puissance $k = hMA$, h étant la distance de A à la droite de BC . M étant supposé distinct de A a un inverse M" , B et C ont pour inverses B",C" . L'inversion I fait passer du triangle MBC à un triangle M"B"C" $\boxed{\text{égal}}$ au triangle podaire A'B'C' de M . En effet :

$$B''C'' = BC \times \frac{k}{AB.AC} = a\,\frac{hMA}{bc} = \frac{aMA}{2R} = B'C'$$

$$B''M'' = BM \times \frac{k}{ABAM} = MB\,\frac{hMA}{CMA} = \frac{h}{c}\,MB = \frac{bh}{2Rh}\,MB = \frac{bMB}{2R} = C'A'$$

$$C''M'' = CM \times \frac{k}{ACAM} = MC\,\frac{hMA}{bMA} = \frac{h}{b}\,MC = \frac{ch}{2Rh}\,MC = \frac{cMC}{2R} = A'B' .$$

Soit d la distance de M'' à la droite $B''C''$, comme les triangles $A'B'C'$, $M''B''C''$ sont égaux :

$$|S(M)| = \frac{1}{2}\,B''C'' \times d = \frac{1}{2}\,a\,\frac{MA}{2R}\,d = a\,\frac{MA}{4R}\,d .$$

Mais d, distance de M'' à la droite $B''C''$, inverse du cercle Γ circonscrit du triangle ABC, s'exprime en fonction de P, puissance de M par rapport à Γ :

$$d = \frac{|kP|}{2R \times AM^2} \quad \text{(cf renvoi 3)}$$

d'où

$$|S(M)| = \frac{aMA}{4R}\,\frac{hMA\,|P|}{2RAM^2} = \frac{ah}{2}\,\frac{|P|}{4R^2} = \frac{s\,|P|}{4R^2}$$

$$\boxed{|S(M)| = \frac{s\,|P|}{4R^2}}$$

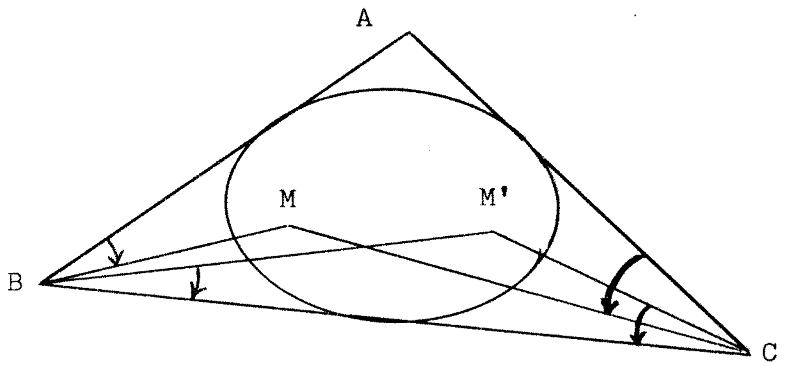
Le résultat est valable même si M est en A puis qu'on peut aussi bien le démontrer en utilisant une inversion de pôle B.

Droite de Simson.

$A'B'C'$ sont alignés si et seulement si $M''B''C''$ le sont, c'est-à-dire si et seulement si $MBCA$ sont cocycliques. Le triangle podaire de M se réduit à une droite (droite de Simson) si et seulement si M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

SOLUTION 3.

Cette solution est moins intéressante en elle-même que par ses prolongements : travaux de Liouville, de Poncelet (polygônes inscrits, circonscrits à une conique donnée).



On sait qu'il existe une conique Ω et une seule de foyer M donné, tangente aux trois droites AB,BC,CA.A'B'C' étant les projections orthogonales de M sur les droites précédentes, supposons M sur aucune de ces droites. Alors si A'B'C' sont alignés Ω est la parabole de foyer M , de tangente au sommet A'B' , si A'B'C' ne sont pas alignés Ω est la conique à centre de foyer M , de cercle principal Γ , cercle circonscrit au triangle ABC .

Autrement dit, si M n'est pas en A,B, ou C , les points A'B'C' sont alignés si et seulement si Ω est une parabole (1).

Si d'un point B on mène deux tangentes BA,BC à une conique Ω de foyers M et M' , les couples de droites (BA,BC) et (BM,BM') sont isogonaux (théorème de Poncelet) cette propriété est équivalente à : les angles de droites (BA,BM),(BM',BC) sont égaux modulo π . De même les angles (CA,CM),(CM,CB) sont égaux modulo π .

Pour que Ω soit une parabole il faut et suffit que les droites BM', CM' aient même direction. Ceci a lieu si et seulement si les angles de droites (BA, BM) et (CA, CM) sont égaux modulo π, c.à.d. si et seulement si M est sur le cercle Γ circonscrit au triangle ABC (sauf en ABC). En recoupant avec (1) on voit que $A'B'C'$ sont alignés si et seulement si M est sur Γ.

SOLUTION 4.

Utilisons les coordonnées barycentriques. Pour tout point M du plan ABC il existe un triplet et un seul de nombres réels (u,v,w) tel que :

$$\begin{cases} u+v+w = 1 \\ u\vec{MA} + v\vec{MB} + w\vec{MC} = \vec{0} . \end{cases}$$

Désignons par O et R le centre et le rayon du cercle Γ circonscrit au triangle ABC et calculons la puissance $P = P_\Gamma(M)$ de M par rapport à Γ.

Nous avons

$$\vec{OM} = u\vec{OA} + v\vec{OB} + w\vec{OC}$$

avec

$$R = uR + vR + wR .$$

D'où

$$\vec{OM}^2 = (u^2+v^2+w^2)R^2 + 2(vw\vec{OB}\vec{OC} + wu\vec{OC}\vec{OA} + uv\vec{OA}.\vec{OB})$$

$$R^2 = (u^2+v^2+w^2)R^2 + 2(vw\ R^2 + wu\ R^2 + uv\ R^2) .$$

Et

$$P = \vec{OM}^2 - R^2 = 2vw(\vec{OB}\vec{OC} - R^2) + 2wu(\vec{OC}\vec{OA} - R^2) + 2uv(\vec{OA}\vec{OB} - R^2) .$$

Mais, en partant de $\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB}$ nous avons $\vec{BC}.\vec{BC} = 2(R^2 - \vec{OB}\vec{OC})$ $2(\vec{OB}\vec{OC} - R^2) = -a^2$, de même $2(\vec{OC}\vec{OA} - R^2) = -b^2$, $2(\vec{OA}\vec{OB} - R^2) = -c^2$.

Alors

$$\boxed{P = -a^2vw - b^2wu - c^2uv}$$

Remarque 2

Nous pouvons aussi écrire

$$P = \vec{MO}^2 - \vec{AO}^2 = (\vec{MO} + \vec{AO})\vec{MA} = (2\vec{MO} + \vec{AM})\vec{MA} = 2\vec{MO}\vec{MA} - \vec{MA}^2$$

ainsi que les formules analogues $P = 2\vec{MO}\vec{MB} - \vec{MB}^2$ $P = 2\vec{MO}\vec{MC} - \vec{MC}^2$

donc $$P = uP + vP + wP = 2\vec{MO}(\vec{O}) - u\vec{MA}^2 - v\vec{MB}^2 - w\vec{MC}^2$$

$$\boxed{P = -uMA^2 - vMB^2 - wMC^2}$$

Ainsi P s'exprime simplement en fonction de $u,v,w,$ et des carrés des distances du point M aux sommets du triangle ABC. La formule s'étend aisément au cas de quatre points $ABCD$ non coplanaires, Q désignant la puissance de M par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$ et $u,v,w,t,$ vérifiant

$$\begin{cases} u + v + w + t = 1 \\ u\vec{MA} + v\vec{MB} + w\vec{MC} + t\vec{MD} = \vec{O}\,. \end{cases}$$

Nous obtenons, en partant de $Q = 2\vec{MO}\vec{MA} - \vec{MA}^2$:

$$\boxed{Q = -uMA^2 - vMB^2 - wMC^2 - tMD^2}$$

et en partant de $Q = \vec{OM}^2 - R^2 = (u\vec{OA} + v\vec{OB} + w\vec{OC} + t\vec{OD})^2 - (uR + vR + wR + tR)^2$

nous arrivons à :

$$\boxed{Q = -uvAB^2 - vwBC^2 - wtCD^2 - tuDA^2 - uwAC^2 - vtBD^2 - wtCD^2 - tuDA^2}\,.$$

Remarque 3

$$\begin{cases} u + v + w = 1 & \Rightarrow \quad \vec{AM} = v\vec{AB} + w\vec{AC} \\ u\vec{MA} + v\vec{MB} + w\vec{MC} = \vec{O}\,. \end{cases}$$

En formant $\vec{AM}\,.\,\vec{AM}$:

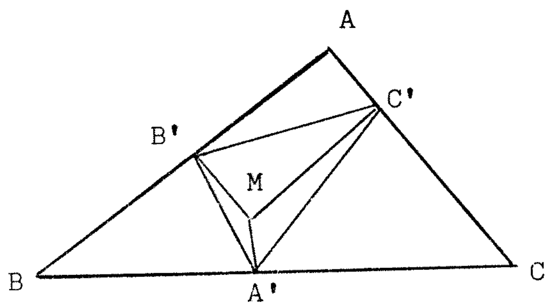
$$AM^2 = v^2c^2 + w^2b^2 + 2vw\vec{AB}\vec{AC} \quad \text{or} \quad a^2 - b^2 - c^2 = -2\vec{AB}\vec{AC}$$

$$\boxed{AM^2 = w^2b^2 + vw(-a^2+b^2+c^2) + v^2c^2}$$

$$AM^2 = (v+w)(b^2w+c^2v) - a^2vw = (1-u)(b^2w+c^2v) = b^2w+c^2v - I\ .$$

Cette formule et celles obtenues par permutation circulaire donnent u,v,w en fonction de AM^2, BM^2, CM^2 (cf renvoi 4).

<u>Calcul de l'aire algébrique</u> $S(M)$ <u>du triangle podaire</u> $A'B'C'$



Soit α le nombre relatif qui a pour valeur absolue MA' et pour signe $+$ si M et A sont du même côté de BC, $-$ dans le cas contraire. Définissons de même β et γ en remplaçant A' et A par B' et B, puis C' et C. L'aire algébrique s du triangle ABC a été supposée positive, c'est la somme des aires algébriques des triangles BMC, CMA, AMB :

$$\frac{1}{2}a\alpha + \frac{1}{2}b\beta + \frac{1}{2}c\gamma = 1\ .$$

D'autre part $\sin(MB',MC') = \sin A$ (cf solution 1). L'aire algébrique du triangle $MB'C'$ vaut $\frac{1}{2}\beta\gamma\sin A = \frac{1}{4R}a\beta\gamma$, les aires algébriques des triangles

MC'A' , MA'B' valent $\frac{1}{4R} b\gamma\alpha$, $\frac{1}{4R} c\alpha\beta$ et la somme de ces 3 aires donne l'aire algébrique du triangle podaire A'B'C'

$$\boxed{S(M) = \frac{1}{4R} (a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta)} .$$

Les aires algébriques $\frac{1}{2} a\alpha$, $\frac{1}{2} b\beta$, $\frac{1}{2} c\gamma$ des triangles BMC , CMA , AMD sont proportionnelles aux coordonnées barycentriques u,v,w de M (cf renvoi 5) et ont pour somme s tandis que $u+v+w = 1$, donc :

$$us = \frac{1}{2} a\alpha \quad vs = \frac{1}{2} b\beta \quad ws = \frac{1}{2} c\gamma$$

d'où $vw\, s^2 = \frac{1}{4} bc\,\beta\gamma = \frac{abc}{4a} \beta\gamma = \frac{Rs}{a} \beta\gamma$ car $s = \frac{abc}{4R}$

$$\beta\gamma = \frac{s}{R} a\, vw \text{, de même } \gamma\alpha = \frac{s}{R} b\, wu \text{ , } a\beta = \frac{s}{R} c\, uv .$$

En reportant dans $S(M) = \frac{1}{4R} (a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta)$ nous obtenons :

$$S(M) = \frac{s}{4R^2} (a^2 vw + b^2 wu + c^2 uv)$$

c.à.d.

$$\boxed{S(M) = \frac{s(-P)}{4R^2}} .$$

Droite de Simson.

L'aire S(M) du triangle podaire A'B'C' est nulle si et seulement si $P = 0$, c.à.d. si et seulement si M est sur le cercle Γ circonscrit au triangle ABC . Pour qu'il existe une droite passant par A'B'C' (droite de Simson) il faut et il suffit que M soit sur Γ .

De plus l'aire algébrique S(M) du triangle podaire de M est positive si et seulement si M est intérieur à Γ et la plus grande valeur est atteinte pour M en O , centre de Γ . Elle vaut :

$$S(O) = \frac{s(R^2)}{4R^2} = \frac{s}{4} .$$

Les solutions suivantes répondent plus particulièrement aux étudiants ayant trouvé l'expression $S(M) = \frac{1}{4R}(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta)$ mais pas la liaison avec la puissance P de M par rapport au cercle Γ circonscrit au triangle ABC.
Pour arriver à la droite de Simson ils souhaitaient démontrer sans trop de calculs que $a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = 0$ détermine le cercle Γ. Visiblement $a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = 0$ détermine une conique Ω passant par A,B,C (pour A par exemple on a $a\beta = \gamma = 0$ donc $a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = 0$). Comment trouver deux autres points communs à Γ et Ω ?

SOLUTION 5.

La bissectrice intérieure Δ de l'angle A du triangle ABC passe par I, centre du cercle inscrit (rayon r) et par I_a, centre d'un cercle exinscrit (rayon r_a). Les angles $\widehat{IBI_a}$ et $\widehat{ICI_a}$ étant droits, le cercle de diamètre IJ passe par B et C. Son centre J est sur Δ et sur la médiatrice de BC, donc <u>sur le cercle Γ</u> circonscrit au triangle ABC. Pour I on a $\alpha = \beta = \gamma = r$, pour $I_a : \alpha = -r_a$, $\beta = \gamma = r_a$ et pour leur milieu J :

$$\alpha_J = \frac{r-r_a}{2} \qquad \beta_J = \gamma_J = \frac{r+r_a}{2}.$$

Pour montrer que J est sur la conique

$\Omega : a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = 0$, calculons $q = a\beta_J\gamma_J + b\gamma_J\alpha_J + c\alpha_J\beta_J$:

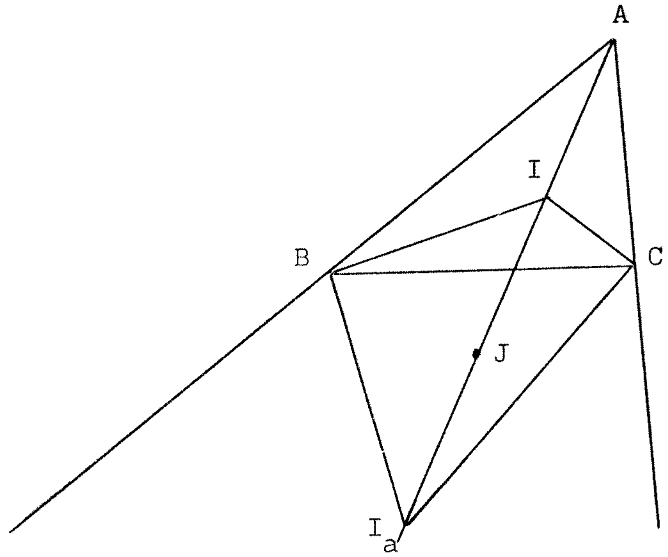
$$q = a\beta_J^2 + (b+0)\alpha_J\beta_J = \beta_J[a\beta_J + (b+c)\alpha_J]$$

$$q = \beta_J[\tfrac{a}{2}(r+r_a) + (\tfrac{b+c}{2})(r-r_a)]$$

$$q = \beta_J[\frac{a+b+c}{2} r - \frac{b+c-a}{2} r_a]$$

$$q = \beta_J(s-s) = 0$$

q étant nul J <u>est sur Ω</u>. De même Ω passe par K, milieu de II_b , et L , milieu de II_c , I_b et I_c étant centre du cercle exinscrit dans l'angle B , l'angle C . La conique Ω et le cercle Γ ont ainsi 5 points communs ABCJK donc Ω est le cercle Γ lui-même. D'autre part I est l'orthocentre du triangle $I_aI_bI_c$ donc le cercle Γ circonscrit au triangle ABC est le <u>cercle d'Euler</u> du triangle $I_aI_bI_c$.



SOLUTION 6.

Nous allons montrer que la conique Ω : $a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = 0$ et le cercle Γ ont deux points communs à l'infini. Les points à l'infini du cercle Γ sont ceux de n'importe quel cercle du plan, par exemple le cercle (A) de centre A , de rayon nul, caractérisé par $AM^2 = 0$. Il est aisé de calculer AM , soit d'après la remarque 3, soit en utilisant le fait que $B'C' = \frac{aMA}{2R}$ (cf solution 1)

$$\vec{B'C'} = \vec{MC'} - \vec{MB'} \Rightarrow \vec{B'C'}^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\cos A$$

$$AM^2 = 0 \text{ équivaut donc à } \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\cos A = 0 .$$

Posons $\gamma = t\beta$, alors

$$t^2 + 2t\cos A + 1 = 0$$

L'équation de la droite de l'infini L du plan est $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$. Les deux points à l'infini du cercle (A) sont les points de cette droite vérifiant $\gamma = t\beta$ avec $t^2 + 2t\cos A + 1 = 0$.

La conique Ω a pour équation

$$a\beta\gamma + \alpha(b\gamma + c\beta) = 0 \Leftrightarrow -a^2\beta\gamma - a\alpha(b\gamma + c\beta) = 0 .$$

Coupons-la par la droite L : $-a\alpha = b\beta + c\gamma$ et posons $\gamma = \beta t$:

$$-a^2 t + (b+ct)(bt+c) = 0$$

$$bct^2 + (b^2+c^2-a^2)t+bc = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 + 2t\cos A + 1 = 0 \quad \text{car} \quad 2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2 .$$

Les points à l'infini de Ω sont les points de L vérifiant $\gamma = t\beta$, t étant solution de $t^2 + 2t\cos A + 1 = 0$: ce sont les points à l'infini du cercle (A) , donc du cercle Γ .

La conique Ω et le cercle Γ ont ainsi 5 points communs, deux à l'infini et les 3 points ABC , donc Ω est le cercle Γ lui-même.

Renvoi 1.

La formule $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, donnant l'aire s d'un triangle en fonction des côtés a,b,c de somme $2p$ est attribuée à Héron d'Alexandrie (2e siècle après J.C.).

Renvoi 2.

Théorème de Ptolémée (astronome, géographe, mathématicien égyption 2e siècle après J.C.)

cf Géométrie classe de mathématiques par J. Commeau Masson éditeur. On y trouvera p. 327 la démonstration des résultats suivants :

Soient A,B,C,D quatre points quelconques ; associons-leur les nombres $\alpha' = DA.BC, \beta' = DB.CA, \gamma' = DC.AB$.

1° Chacun de ces nombres est inférieur ou égal à la somme des deux autres ;

2° Pour que les quatre points soient cocycliques, il faut et il suffit que l'un de ces nombres soit la somme des deux autres ;

3° Si, par exemple, $\beta' = \alpha' + \gamma'$, les quatre points se succèdent, dans l'ordre A,B,C,D sur un cercle.

Convenons de dire que quatre points distincts A,B,C,D pris dans cet ordre forment un quadrangle convexe si les segments AC et BD ont un point commun ; AC,BD sont les diagonales et $(AB,CD),(AC,DB)$ les couples de côtés opposés du quadrangle. Les propriétés 2° et 3° nous permettent d'énoncer :

THEOREME DE PTOLEMEE.- Pour qu'un quadrangle convexe soit inscriptible, il faut et il suffit que le produit des diagonales soit égal à la somme des produits des côtés opposés.

Renvoi 3.

L'inversion de pôle O de puissance k transforme un cercle C de rayon R en une droite D . M étant distinct de O comparer la puissance p

de M par rapport à C et la distance d de l'inverse M' de M à D .

Le repère orthonormé est choisi de telle sorte que l'équation de C soit :

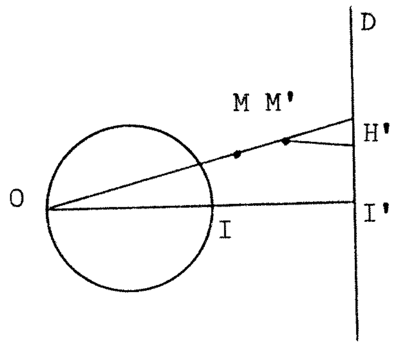
$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0$$

M(x,y) a pour inverse M'(x',y') qui se projette orthogonalement en H' sur D

$$\overline{M'H'} = \frac{k}{2R} - x' = k\left[\frac{1}{2R} - \frac{x}{x^2+y^2}\right] = k\,\frac{x^2+y^2-2Rx}{2R(x^2+y^2)} = \frac{k\,P}{2ROM^2}$$

d'où

$$\boxed{d = \frac{|kP|}{2ROM^2}}$$



Renvoi 4.

Les formules

$$MA^2 = vc^2 + wb^2 + P$$
$$MB^2 = wa^2 + uc^2 + P$$
$$MC^2 = ub^2 + va^2 + P$$

donnent :

$$-a^2MA^2 + b^2MB^2 + c^2MC^2 = 2ub^2c^2 + (-a^2+b^2+c^2)P$$

d'où u , et par permutation circulaire v et w

$$u = \frac{1}{2b^2c^2}\,[-a^2MA^2 + b^2MB^2 + c^2MC^2 + (-a^2+b^2+c^2)P]\ .$$

On peut aussi exprimer u en fonction des côtés a',b',c' du triangle podaire de M car $aMA = 2Ra'$, $bMB = 2Rb'$, $cMC = 2Rc'$ (cf solution 1)

$$u = \frac{1}{2b^2c^2}\,[4R^2(-a'^2+b'^2+c'^2) + P(-a^2+b^2+c^2)]\ .$$

Renvoi 5.

Les aires algébriques $\frac{1}{2}\,a\alpha$, $\frac{1}{2}\,b\beta$, $\frac{1}{2}\,c\gamma$ des triangles BMC, CMA, AMB sont proportionnelles aux coordonnées barycentriques u,v,w de M . En effet :

$$\vec{AM} = v\vec{AB} + w\vec{AC} \Rightarrow \vec{AM}\wedge\vec{AM} = v\vec{AB}\wedge\vec{AM} - w\vec{AM}\wedge\vec{AC} \Rightarrow 0 = v(\tfrac{1}{2}\,c\gamma) - w(\tfrac{1}{2}\,b\beta)$$

et de même

$$0 = w(\tfrac{1}{2}\,a\alpha) - u(\tfrac{1}{2}\,c\gamma)\ .$$

Gilberte PEROT et Jean-Claude SIDLER.

<u>Le clair-obscur au Bac</u>

Extrait d'un sujet de mathématique proposé au baccalauréat Série C à Aix-Marseille en 1980.

N.B. : Tous les instruments de calcul (tables numériques, statistiques, de fonctions trigonométriques, de logarithmes décimaux et népériens; règles et cercles à calcul; calculatrices électroniques) ne sont pas autorisés. Les candidats trouveront, si nécessaire, dans les énoncés des extraits de tables pour les calculs qui leur seront demandés. (Application de la circulaire n° 79.318 du 2 octobre 1979, alinéas 3 et 4).