PERIODIQUE ?
Les curieuses définitions des manuels

Une fonction périodique, dites-vous? Ce n'est pas le grand théorème de Fermat! (idiotisme en usage chez les mathématiciens, et dont un équivalent serait: "Ce n'est pas le Pérou"). D'ailleurs, les manuels ne s'attardent pas trop sur le sujet:

1) . ALEPH 1 (p.10) : la fonction F est périodique si, et seulement si, il existe un réel t tel que, pour tout x de $\mathcal{D}_F$, $\overrightarrow{F(x+t)} = \overrightarrow{F(x)}$. Le réel t est une période de F, la période de F étant sa plus petite période positive non nulle.

2) . Queysanne Revuz (p.87) : Une fonction f, de domaine $\mathcal{D}$, est périodique s'il existe un nombre $P > 0$ tel que :

$(\forall x \in D),\ f(x+P) = f(x)$

On dit que P est une période de f.

On montre que kP, $k \in \mathbb{N}^*$ l'est aussi.

Lorsque nous parlons d'une fonction f, il s'agira toujours de la plus petite période (strictement positive).

3) . Col. DONEDDU. Analyse T2. (p.31) : Une fonction f est dite périodique s'il existe un nombre a tel que :

$\forall x,\ f(x+a) = f(x)$

le nombre a est une période apparente.

La période p est la plus petite période positive apparente.

4) . Condamine et Vissio: Une application f, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, est dite
(p.78) périodique et de période P, si P est le plus petit nombre réel strictement positif, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+P) = f(x)$$

5) . Lelong Ferrand: Soit G un groupe abélien, noté +, et f une appli-
(P.339) cation de G dans un ensemble quelconque. On dit que f admet l'élément a de G pour période, si pour tout $z \in G$, on a :

$$f(z+a) = f(z)$$

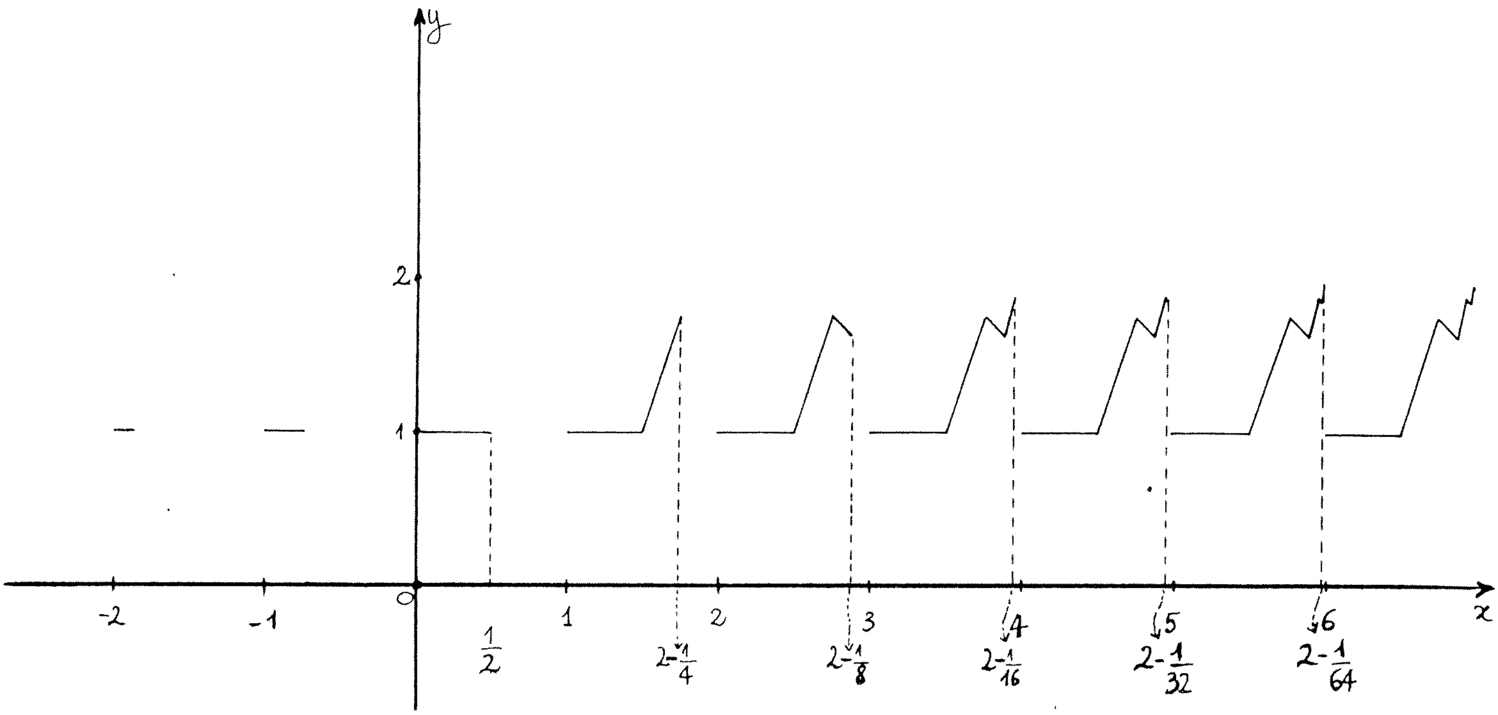
Une fonction f admettant une période non nulle a est dite périodique, de période a.

Indiquons tout de suite notre admiration devant les précautions prises dans 4) et dans 5). Seulement, selon ces définitions en béton, $x \longmapsto \operatorname{tg} x$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x-E(x)}$ ne sont pas périodiques :

4) remarquera que ce ne sont pas des "applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$".

5) objectera que ces fonctions ne sont pas "définies sur un groupe"!

Mais, pour 1), 2), 3), voici le pavé à digérer :



Ce monstre a un comportement imprévisible, dans la pratique. Voici comment il est construit :

* si $x \leqslant 0$, f est définie sur les intervalles suivants, de droite à gauche :
$\left[-1, -1+\frac{1}{4}\right]$, $\left[-2, -2+\frac{1}{8}\right]$, $\left[-3, -3+\frac{1}{16}\right]$ ----
Elle y vaut constamment 1.

* si $x \geqslant 0$, f est définie sur les intervalles suivants, de gauche à droite cette fois :

$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[1, 2-\frac{1}{4}\right], \left[2, 3-\frac{1}{8}\right], \left[3, 4-\frac{1}{16}\right] \quad ----$$

Chacun de ces intervalles est obtenu en translatant le précédent de 1 et en prolongeant le translaté de la moitié de ce qui lui manque pour remplir le segment $[n, n+1]$. Si on appelle I_n cet intervalle, f y est ainsi définie :

- sur le translaté de I_{n-1}, f est la copie de ce qu'elle était sur I_{n-1}
- sur la partie "nouvelle" de I_n, f est affine et a pour pente le nième chiffre du développement décimal de π, auquel on attribue le signe - si n est pair.

L'observation du dessin vaut d'ailleurs mieux que cette longue explication! Elle permet également de constater que pour 1), 2), 3), et pour bien d'autres, 1 est une période de f.

Le lecteur se convaincra vite que la seule façon de rejeter cet indigeste pavé est d'adopter l'une des définitions suivantes:

1)' f est périodique s'il existe un réel $P \neq 0$ tel que :

$$\forall x \in Df, \quad f(x+P) = f(x) \text{ et } f(x-P) = f(x)$$

variante

2)' (déductible de 1)', mais ce n'est pas un crime)

$$\forall x \in Df, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(x+kP) = f(x)$$

3)' Soit τ_P la translation : $x \mapsto x+P$

f est périodique de période P si:

$f \circ \tau_P = f$ pour un réel $P \neq 0$

Chacune de ces trois définitions a pour conséquence l'invariance de Df par une translation de P. Le non respect de cette invariance était précisément la faille par laquelle 1), 2), 3) ont laissé pénétrer le monstre!

Ne croyez pas que la périodicité s'en trouve terrassée pour autant:

- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et constante. Alors tout réel non nul est période de f. Mérite-t-elle vraiment le qualificatif de périodique ?

- Soit $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. Tout rationnel non nul en est une période !

Ces deux exemples font réexaminer les définitions 1), 2), 3), 4). Toutes parlent, comme allant de soi, d'une "plus petite période positive non nulle". Une innocente fonction constante se joue de tant de suffisance.

En fait, il est facile de montrer que l'ensemble des réels P définis comme période par 1)' ou 3)' forme un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ pourvu qu'on lui adjoigne 0. Or il existe deux types de tels sous-groupes: les sous-groupes denses dans $\mathbb{R}$ (par exemple $\mathbb{Q}$) et les sous-groupes discrets (de la forme $a\mathbb{Z}$).

On comprend que si le groupe des périodes ressort du premier type, il est difficile de trouver une "plus petite période positive". Ce n'est que s'il est du deuxième type que cette notion a un sens.

Heureusement, une bonne partie de nos fonctions usuelles se range dans ce "bon cas", en vertu du résultat suivant:

<u>Si f est définie sur $\mathbb{R}$, continue non constante, alors son groupe de période est discret.</u> (<u>il se réduit à $\{0\}$ si f n'est pas périodique</u>).

Ne faudrait-il pas réserver le vocable "fonction périodique" à celles dont le groupe de périodes est discret ?

Eric CHANEY

N.B. Le petit sourire malicieux de Jean Lefort, lorsqu'il entend "périodique", m'a mis sur la piste du monstre. Un problème posé en TC, communiqué à l'Ouvert par Roger Di Costanzo, professeur au Lycée de Villeneuve-sur-Lot traite du problème de "la plus petite période". En voici l'énoncé :

1) Montrer que, quels que soient $a > 0$ et $x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$na \leqslant x < (n+1)a$$

2) Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$, différent de $\{0\}$. Montrer que $H \cap \mathbb{R}^*$ admet une borne inférieure $a \geqslant 0$

3) <u>Si $a = 0$</u>, montrer que quels que soient $y \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, il existe $x \in H$ tel que : $y - \varepsilon \leqslant x < y + \varepsilon$
(on dit alors que H est dense dans $\mathbb{R}$)

4) <u>Si $a > 0$</u>, montrer alors que $H = a\,\mathbb{Z}$. On montrera d'abord que $a \in H$, puis on utilisera 1)

5) En déduire que tout sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, est soit du type $a\,\mathbb{Z}$ $(a \in \mathbb{R}^{+*})$, soit dense dans $\mathbb{R}$ (voir 3))

6) Soit f définie sur $\mathbb{R}$. On dit que t est période de f si $f(x+t) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\mathcal{T}$, ensemble des périodes de f, est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

7) On dit que f est périodique si $\mathcal{T} \neq \{0\}$. Montrer que si f est périodique, continue sur $\mathbb{R}$, si son groupe de période est dense dans $\mathbb{R}$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.
[Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(o)$]
En déduire le théorème: Une fonction continue, périodique, non constante, admet une plus petite période strictement positive, appelée la période de f.