Pluridisciplinarité:

Mais que voulais-tu donc dire platon?

Une collègue philosophe, désirant entretenir ses élèves de la nature de la Science, décida de leur faire étudier le "Théétète" de Platon. Socrate, le géomètre Théodore de Cyrène et son brillant élève, le futur mathématicien Théétète y examinent les différentes définitions de ce terme.

Or, au début du dialogue, Socrate éprouve le jeune homme en l'interrogeant, et celui-ci affirme sa valeur ainsi :

Théétète :

Théodore, que voici, avait fait devant nous les constructions relatives à quelques unes des puissances, montré que celles de trois pieds et de cinq pieds ne sont point, considérées selon leur longueur, commensurables à celle d'un pied, et continué ainsi à les étudier, une par une, jusqu'à celle de dix sept pieds: il s'était, je ne sais pourquoi, arrêté là. Il nous vint donc à l'esprit, le nombre des puissances apparaissant infini, d'essayer de les rassembler sous un terme unique, qui pût servir à désigner tout ce qu'il y a de puissances.

Socrate :

Et vous avez trouvé un terme adéquat ? (...)

Théétète:

Tout ce qui est nombre fut par nous séparé en deux groupes : celui qui peut se résoudre en un produit d'égal par égal, nous l'avons représenté par la figure du carré, et nous l'avons appelé tétragonal et équilatéral (...) Celui qui s'intercale entre les nombres du premier genre, comme le trois; le cinq, et, en général, tout nombre qui ne peut se résoudre en produit d'égal par égal, mais se résout en plus grand par plus petit et constitue une figure à côtés inégaux, nous l'avons représenté par la figure du rectangle et l'avons appelé nombre rectangulaire.

Socrate :

Excellent, mais ensuite ?

Théétète :

Toutes les lignes dont le carré constitue un nombre plan équilatéral, nous les avons définies longueurs. Toutes celles dont le carré constitue un nombre rectangulaire, nous les avons définies puissances, parce que, non commensurables aux premières si on les considère selon leur longueur, elles leur sont commensurables si on considère les surfaces qu'elles ont puissance de former. Pour les solides, enfin, nous avons fait des distinctions analogues.

Cette collègue, troublée, m'a demandé de lui "traduire" les assertions de Théétète.

Il s'agit, comme on l'a deviné, de l'irrationnalité des racines carrées d'entiers qui ne sont pas carrés parfaits, exprimée dans le langage géométrique en vigueur dans la mathématique grecque.

Théétète commence par expliquer que son maître Théodore a montré, par des constructions géométriques semble-t-il, l'irrationnalité (la "non commensurabilité à l'unité") de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... jusqu'à $\sqrt{17}$. Il affirme en avoir obtenu une généralisation. Appelant "nombre tétragonal (carré) et équilatéral"(à côtés égaux) ce que nous appelons carré parfait, il nomme les autres entiers " nombres rectangulaires ".

Il donne ensuite un début de classification des lignes, c'est-à-dire des réels positifs, à l'aide de leurs carrés :

- ceux dont le carré est un carré parfait, autrement dit les entiers.
- ceux dont le carré est un entier non carré parfait (dit rectangulaire).

...

Il nomme ces derniers puissances, car ils ont "puissance d'engendrer une surface commensurable" (i.e. leur carré est entier). Nous les nommons racines carrées d'entiers. Et il annonce le résultat suivant: <u>les racines carrées d'entiers qui ne sont pas carrés parfaits sont irrationnelles.</u>

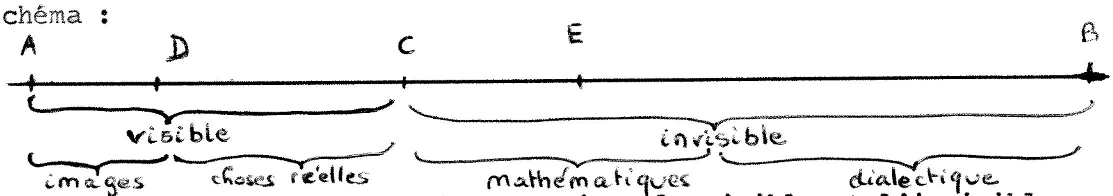
Enfin il affirme s'être attaqué à la même classification à l'aide des cubes. Le support géométrique rendait bien plus ténébreuses les puissances supérieures.

LE POINT DE VUE DU PHILOSOPHE

Ainsi, selon mon collègue mathématicien, le jeune Théétète annonce un résultat mathématique de taille au vieux maître. Une lecture attentive de Platon montre cependant que ni Théétète ni Socrate ne soulignent l'acquis que représente la preuve de l'irrationnalité des racines d'entiers non carrés parfaits. Ce résultat est annoncé <u>en passant</u>. Théétète est fier "d'avoir rassemblé sous un terme unique tout ce qu'il y a de puissances". Socrate, pour souligner la qualité de son jeune interlocuteur, le félicitera d'avoir su "comprendre la pluralité (des puissances) sous un terme unique" et l'incitera à trouver "à la pluralité des sciences, une définition unique".

La conception qu'avait Platon des mathématiques, de leur importance et de leur usage est à l'origine de cette attitude, surprenante pour un mathématicien, cohérente pour un philosophe.

Dans la République, Platon fixe le Bien comme terme unique de la Science. Les modes de connaissance s'en trouvent hiérarchisés, selon le schéma :



Cette ligne se décompose en deux parties, le visible et l'invisible, chacune étant partagée à son tour avec la constance du rapport : le visible (AC) est à l'invisible (CB) ce que, dans le visible, les images (AD) sont aux choses réelles (DC). L'invisible, l'intelligible se partage selon la même proportion, et la section mathématique (CE) est à la section dialectique (EB) ce que les images sont aux choses.

La section mathématique, bien que située dans un domaine supérieur au visible, a un statut inférieur vis à vis de la Science dialectique. La raison de ce statut est un double déficit que Platon attribue à la connaissance mathématique: elle est tributaire des figures d'une part, et d'autre part d'hypothèses non critiquées. De plus ces hypothèses sont utilisées non pas pour remonter à l'essentiel, à l'archè (au principe), mais pour aboutir à une fin, le théorême que le mathématicien se propose de démontrer. Platon considère que le raisonnement hypothético-déductif n'a pas pour but la remontée vers le principe du Bien, principe premier de tout ce qui est. Par cette carence, les mathématiques se couperaient de l'origine radicale des choses.

Pour en revenir aux assertions de Théétète, il était plus important de déceler l'unique dans la multiplicité, à propos des puissances, que de prouver une caractérisation de ces puissances, fût-elle un argument pour la présence de l'unique dans "l'infinité des puissances".

Le refus des mathématiciens grecs d'attribuer aux irrationnels, et même aux rapports la qualité de nombre ne provient-il pas de la même exigence philosophique ?

Christiane FULGONY et Eric CHANEY.

VIEUX DE 2500 ANS, ET TOUJOURS UTILE !

L'irrationnalité de $\sqrt{2}$, attribuée à Pythagore ou à son école était bien antérieure à Platon. Sa généralisation fut par par contre contemporaine du philosophe. On ne sait pas si elle fut obtenue par des raisonnements strictement géométriques, ou par des raisonnements arithmétiques.

Vieux de quelques 2500 ans, ce résultat constitue toujours un excellent outil pédagogique, et m'a permis de convaincre certains élèves de 1e A de l'utilité de la logique.

En effet, s'il est facile de prouver :

"Si n est un entier pair, alors n^2 est pair"

les élèves sèchent longuement sur l'implication réciproque :

"n étant un entier, si n^2 est pair, alors n est pair"

jusqu'à ce qu'ils s'intéressent à la proposition contraposée:

"n étant un entier, si n est impair alors n^2 est impair"

dont la preuve est triviale.

Or de (n^2 pair $\Rightarrow$ n pair) découle aisément l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.

Eric Chaney.