L'explication de la règle du parallélogramme

Si la loi de composition des forces parallèles a été élucidée par Archimède, celle des forces concourantes fut beaucoup plus difficile à découvrir. Il fallut attendre le XVIe siècle pour que Simon STEVIN (1548 - 1620) en donne une formulation claire. C'est dire que l'intervention du parallélogramme en Statique est loin d'être évidente.

Plus tard, de nombreux savants -notamment Newton, Varignon, Daniel Bernouilli - tentèrent de démontrer la règle du parallélogramme, c'est-à-dire de la déduire de quelques principes plus faciles à admettre. Leurs efforts ne furent pas très convaincants.

En 1875, Gaston Darboux (Bull. des Sciences Math. Tome IX) parvient enfin à caractériser l'addition des vecteurs par les quatre axiomes suivants :

Axiomes de Darboux

I L'addition des vecteurs est associative et commutative.

II Elle est continue.

III Lorsqu'on la restreint aux vecteurs d'une droite, elle se réduit à l'addition algébrique usuelle.

IV L'addition des vecteurs est invariante par toute isométrie de l'espace euclidien (on dit que l'addition est isotrope).

Dans la suite, nous appellerons résultante de deux vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{Q}$, le vecteur $\vec{P} \oplus \vec{Q}$ obtenu en appliquant une loi de composition satisfaisant aux axiomes de Darboux.
Nous réserverons l'appellation somme (vectorielle) au vecteur $\vec{P} + \vec{Q}$ obtenu par la règle du parallélogramme.

Le théorème de Darboux affirme donc que pour tout couple de vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{Q}$

$$\vec{P} \oplus \vec{Q} = \vec{P} + \vec{Q}$$

x x x x

x x x

x x

x

Voici d'abord quelques conséquences immédiates des axiomes :

Proposition I Pour tout vecteur $\vec{P}$, $\vec{P} \oplus \vec{0} = \vec{P}$ et $\vec{P} \oplus (-\vec{P}) = \vec{0}$ (conséquences de l'axiome III)

Proposition II Pour tout couple de vecteurs $\vec{P}$, $\vec{Q}$ non colinéaires $\vec{P} \oplus \vec{Q}$ appartient au plan Π défini par $\vec{P}$ et $\vec{Q}$.

En effet $\vec{P} \oplus \vec{Q}$ doit être invariant par la symétrie. orthogonale par rapport à Π (axiome IV)

Proposition III Si $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{P} \oplus \vec{Q}$ n'est parallèle ni à $\vec{P}$, ni à $\vec{Q}$.

Car s'il n'en était pas ainsi, il existerait deux vecteur $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ et un scalaire λ tels que $\vec{P} \oplus \vec{Q} = \lambda\vec{Q}$. Dans ces conditions, on aurait $(\vec{P} \oplus \vec{Q}) \oplus (-\vec{Q}) = (\lambda - 1)\vec{Q} = \vec{P} + (\vec{Q} - \vec{Q}) = \vec{P}$ ce qui contredit l'indépendance linéaire de $\vec{P}$ et $\vec{Q}$.

Proposition IV Etant donné un vecteur $\vec{P}$ non nul, et un vecteur unitaire $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{P}$, il existe deux scalaires α et β non nuls, ne dépendant que de $\|\vec{P}\|$, tels que

$$\vec{P} \oplus \vec{u} = \alpha\frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|} + \beta\vec{u}$$

L'existence de tels scalaires non nuls résulte des propositions II et III. Ces scalaires ne dépendent que de $\|\vec{P}\|$, car si l'on choisit un autre couple $\vec{P}'$, $\vec{u}'$ avec $\|\vec{P}'\| = \|\vec{P}\|$, il existe une isométrie qui applique $\vec{P}$ sur $\vec{P}'$, $\vec{u}$ sur $\vec{u}'$.

Darboux pose $f(\|\vec{P}\|) = \dfrac{\alpha(\|\vec{P}\|)}{\beta(\|\vec{P}\|)}$

La démonstration qui suit sera essentiellement une étude de cette fonction $x \mapsto f(x)$ (définie sur $\mathbb{R}^+$).

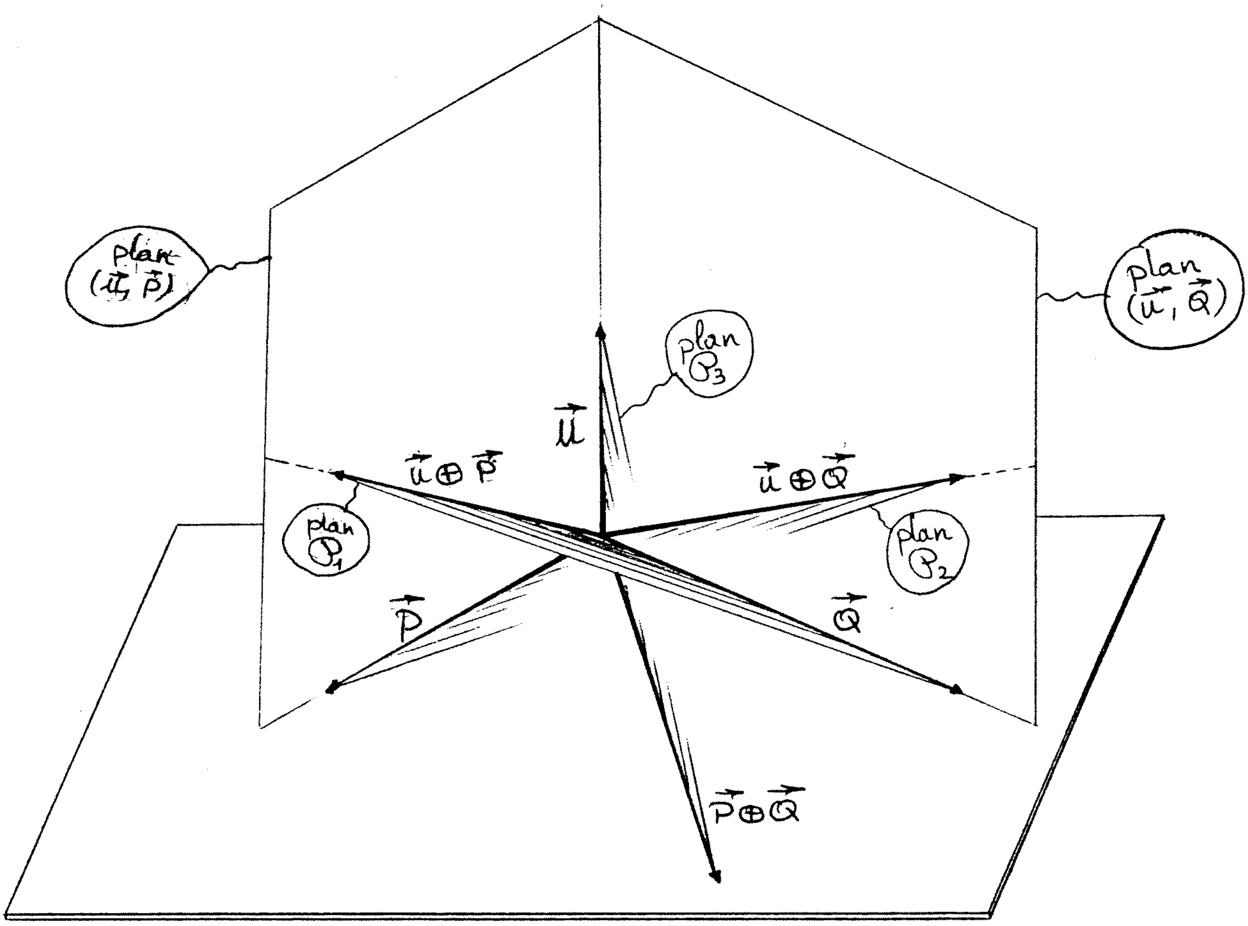
Démonstration du théorème. 1ère étape Soit $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ deux vecteurs indépendants, et $\vec{u}$ un vecteur unitaire normal au plan $(\vec{P},\vec{Q})$. Le repère $\left(\frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|}, \frac{\vec{Q}}{\|\vec{Q}\|}, \vec{u}\right)$ est unitaire (mais non nécessairement orthogonal, si $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ ne le sont pas).

Soient X, Y, Z les composantes du vecteur

$\vec{V} = \vec{u} \oplus \vec{P} \oplus \vec{Q}$ par rapport à ce repère.

Alors $\vec{V} = \vec{u} \oplus \vec{P} \oplus \vec{Q} = X\frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|} + Y\frac{\vec{Q}}{\|\vec{Q}\|} + Z\vec{u}$

Le vecteur $\vec{V}$ est porté par l'intersection de trois plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ engendrés respectivement par $\vec{Q}$ et $\vec{u} \oplus \vec{P}$, $\vec{P}$ et $\vec{u} \oplus \vec{Q}$, et enfin $\vec{u}$ et $\vec{P} \oplus \vec{Q}$.



Donc la trace de $\mathcal{P}_1$ sur le plan $(\vec{u}, \vec{P})$ porte le vecteur $\vec{u} \oplus \vec{P}$, ce qui s'exprime par

$$f(\|\vec{P}\|) = \frac{\alpha(\|\vec{P}\|)}{\beta(\|\vec{P}\|)} = \frac{X}{Z}$$

De même $f(\|Q\|) = \frac{Y}{Z}$ et par conséquent

$\frac{Y}{X} = \frac{f(\|\vec{Q}\|)}{f(\|\vec{P}\|)}$. Cette égalité exprime que le vecteur $\vec{P} \oplus \vec{Q}$

(porté par la trace de $\mathcal{P}_3$ sur le plan $(\vec{P},\vec{Q})$) est colinéaire au vecteur

$$f(\|\vec{P}\|)\frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|}+f(\|\vec{Q}\|)\frac{\vec{Q}}{\|\vec{Q}\|}.$$

Il existe donc un scalaire λ tel que

$$\boxed{(1)\quad f(\|\vec{P}\|)\frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|}+f(\|\vec{Q}\|)\frac{\vec{Q}}{\|\vec{Q}\|}=\lambda\,\frac{\vec{P}\oplus\vec{Q}}{\|\vec{P}\oplus\vec{Q}\|}.}$$

Seconde étape. Posons alors $-\vec{R}=\vec{P}\oplus\vec{Q}$.

On a alors $\vec{P}\oplus\vec{Q}\oplus\vec{R}=\vec{0}$, et $-\vec{P}=\vec{Q}\oplus\vec{R}$.

Nous allons appliquer le résultat (1), en remplaçant $\vec{P}$ par $\vec{R}$:

il existera donc un autre scalaire μ, tel que :

$$f(\|\vec{P}\|)\frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|}+f(\|\vec{Q}\|)\frac{\vec{Q}}{\|\vec{Q}\|}+\lambda\,\frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|}=\vec{0}$$

$$\mu\,\frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|}+f(\|\vec{Q}\|)\frac{\vec{Q}}{\|\vec{Q}\|}+f(\|\vec{R}\|)\frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|}=\vec{0}$$

et par soustraction :

$$(f(\|\vec{P}\|)-\mu)\frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|}+(\lambda-f\|\vec{R}\|)\frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|}=\vec{0}$$

Comme $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont indépendants (prop. III),

$$\lambda=f(\|\vec{R}\|)=f(\|\vec{P}\oplus\vec{Q}\|).$$

En portant cette valeur dans (1), on obtient l'identité.

$$\boxed{(2)\quad f(\|\vec{P}\|)\frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|}+f(\|\vec{Q}\|)\frac{\vec{Q}}{\|\vec{Q}\|}=f(\|\vec{P}\oplus\vec{Q}\|).\frac{\vec{P}\oplus\vec{Q}}{\|\vec{P}\oplus\vec{Q}\|}}$$

Troisième étape. L'identité (2) vient d'être démontrée pour tout couple $(\vec{P},\vec{Q})$ de vecteurs linéairement indépendants . Mais par continuité (Axiome II), elle s'étend à tous les couples de vecteurs, et plus particulièrement aux cas où $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ ont même direction et même sens.

Dans ce cas $\|\vec{P}\oplus\vec{Q}\|=\|\vec{P}+\vec{Q}\|=\|\vec{P}\|+\|\vec{Q}\|$.

Et sachant qu'alors $\frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|}=\frac{\vec{Q}}{\|\vec{Q}\|}=\frac{\vec{P}\oplus\vec{Q}}{\|\vec{P}\oplus\vec{Q}\|}$, l'identité (2) devient

$$\boxed{(3)\quad f(\|\vec{P}\|+\|\vec{Q}\|)=f(\|\vec{P}\|)+f(\|\vec{Q}\|).}$$

Quatrième étape. On sait que toutes les solutions continues de l'équation fonctionnelle

$$f(|x|+|y|)=f(|x|)+f(|y|)$$

sont données par $\boxed{f(|x|)=f(1)\,.\,|x| \qquad (4)}$

(En effet, ce résultat classique se démontre immédiatement pour x entier ou rationnel, puis en prolongeant par continuité, pour tout x réel.)

Portant cette valeur (4) dans l'identité (2), on obtient après simplification :

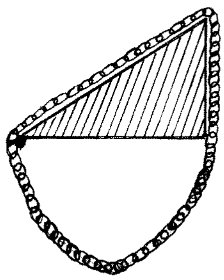
$$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{P} \oplus \vec{Q} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

<u>Remarque finale</u> Il existe une caractérisation beaucoup plus simple de l'addition vectorielle, reposant essentiellement sur l'axiome :

La loi d'addition des vecteurs est invariante par toute projection (parallèlement à une direction).

En fait, Simon STEVIN était parvenu à deviner la règle du parallélogramme, à partir d'un raisonnement s'appuyant sur l'<u>impossibilité du mouvement perpétuel</u>.

Il raisonnait sur le dispositif suivant :



et aboutissait à une décomposition du poids de chaque élément de la chaîne, selon deux directions orthogonales.

Mais, il est vraiment téméraire de prétendre que l'invariance de la composition des forces, par toute projection (non nécessairement orthogonale) est une vérité d'intuition.

G. GLAESER.