

En observant

des élèves qui cherchent ...

Au cours de recherches en didactique, nous avons été amené à observer beaucoup de comportements d'élèves. Nous avons en particulier, observé quelques élèves en train de résoudre le problème suivant qui se trouve dans "le livre du problème - vol. 6 - géométrie d'incidence" - Université Louis Pasteur - éditions CEDIC -

Énoncé :

P. **1.7** Recherche d'isomorphismes

Voici (à gauche) le diagramme cartésien d'une relation :

P	A	B	C	D	E	F
a	X	X	X			
b	X				X	X
c	X					
d		X	X	X		
e				X	X	X
f	X					X

	X				X	
		X	X			
		X		X	X	X
	X		X			
		X	X			X
	X				X	

Voici d'autre part (à droite) un autre diagramme où les lettres qui désignent les colonnes ou les lignes ne sont pas inscrites. Montrer que l'on peut inscrire des lettres, en sorte que ce second diagramme représente la même relation que le premier. (Solution p. 123)

Solution proposée : Dans cet ouvrage, nous trouvons la solution suivante :

Solution de P. 17

1. On peut commencer par se rassurer en vérifiant que les deux diagrammes ont le même nombre de croix.
2. Dans le modèle, il n'y a qu'une seule ligne (la ligne c) qui ne comporte qu'une croix. Sur le second diagramme, il n'y en a pas : mais l'on remarque qu'il y a une colonne ne comportant qu'une seule croix. On va donc essayer d'intervertir le rôle des lignes et des colonnes. Cela permet de placer la lettre c et la lettre A. De la même façon, on pourra inscrire les lettres F et f. (La colonne F, sur le modèle, est la seule qui comporte trois croix).
3. Sur le modèle, rien ne distingue les colonnes B et C. Sur le second diagramme il y a deux lignes portant deux croix, que rien ne distingue. Nous allons inscrire *arbitrairement* B et C en face de ces lignes.
4. Sur le modèle, les colonnes D et E restantes comportent chacune deux croix. Mais seule la colonne D a une croix sur la même ligne que B et C. Cette remarque permet de placer D et d, puis a, puis grâce à la colonne E, la ligne b. Les lignes a et e ont leurs croix sur des colonnes différentes, ce qui permet de placer e.
5. En conclusion, il y a deux façons de compléter le tableau : chacune correspond à un choix des colonnes B et C.

P				c		f
	x				x	
		x	x			
A		x		x	x	x
	x		x			
F		x	x			x
	x				x	

P	d	b	e	c	a	f
B	x				x	
E		x	x			
A				x	x	x
D	x		x			
f		x	x			x
C	x				x	

On remarquera qu'en général, il est difficile de reconnaître que deux tableaux cartésiens représentent des relations isomorphes. Il ne suffit pas, bien sûr, que pour chaque ligne ou colonne du modèle on trouve une ligne ou colonne du diagramme à compléter ayant le même nombre de croix qu'elle. (La simplicité des exercices 11 à 5 est exceptionnelle). Il est aisé d'imaginer des énoncés plus faciles ou plus difficiles, sur le même thème.

Méthode d'observation :

Nous avons proposé ce problème à un élève A . Une fois la solution trouvée (s'il ne l'a pas trouvé, nous la lui donnons par écrit), nous lui avons demandé de transmettre cet énoncé à un élève B. Puis nous avons demandé à l'élève B de résoudre le problème à son tour. Le compte-rendu relate ici uniquement le comportement de l'élève en train de chercher bien que nous ayons des observations relatives à la transmission de l'énoncé. Nous avons ainsi observé individuellement 4 élèves de 6ème et 4 élèves de 4ème.

Analyse des démarches à suivre

Cet énoncé ne se réfère pas à un problème de relations mais à un problème d'incidence. Il présente des invariants de 2 types qui sont à découvrir par l'élève

- premier invariant : nombre de croix par ligne, par colonne.
- deuxième invariant: les incidences doivent être conservées.

Ceci apparaît comme une contrainte du problème mais elle ne conduit pas encore à une solution.

Il est remarquable de constater que tous les enfants ont compris plus ou moins vite que le point de départ était un examen de ces invariants.

- Dans cet exercice, il y a plusieurs seuils à franchir dont :
- se rendre compte du sens de la relation (où placer les majuscules et les minuscules), en référence du premier type d'invariants.
 - réaliser qu'il y a des incidences à respecter et à conserver.
 - utiliser ces incidences de manière déductive pour arriver à trouver une solution .
 - se rendre compte éventuellement que le problème admet 2 solutions dues au choix arbitraire de B et de C qui sont interchangeable.

Stratégies employées par les élèves

Dans cette situation, les élèves peuvent utiliser différentes stratégies . Par exemple:

- 1) ils cherchent les éléments invariants du problème et les considèrent comme fixes. Il est relativement facile de placer A et f. Puis ensuite, par déduction, ils placent les lettres restantes en mettant alternativement les majuscules et les minuscules. Cette stratégie est suivie par Florence et Gérard qui ont résolu relativement vite le problème.

- 2) ils essaient de compléter d'abord la ligne (ou la colonne), majuscules ou minuscules, puis, une fois cette ligne fixée, ils complètent la colonne (ou la ligne). Cette stratégie est plus longue et conduit à certaines rectifications. Elle est utilisée le plus fréquemment (4 élèves sur 8 l'emploient). Une remarque de Daniel met en évidence cette manière de procéder: "j'ai déjà une colonne, je vais essayer de trouver l'autre".

- 3) nous observons également la stratégie du tâtonnement empirique: les élèves placent les lettres un peu au hasard et vérifient ensuite si le résultat est correct. Cette méthode conduit à repartir fréquemment de zéro et n'amène guère au résultat. Nous le retrouvons chez Valérie et chez Pierre -Alain.

Quelques démarches suivies

Dans un premier temps, les élèves respectent l'ordre du premier tableau: ils commencent par mettre la flèche dans le même sens, les majuscules en ligne et les minuscules en colonne. Ils s'aperçoivent très vite (en moyenne au bout de 2 mn), qu'on n'arrive pas à résoudre le pro-

blème de cette manière. Une remarque de Valérie illustre cette prise de conscience qui amène à changer le sens de la relation: " Vous ne vous êtes pas trompé ? Il y en a qu'une où il ne devrait pas y en avoir qu'une " . Tous les élèves ont fini par trouver qu'il fallait changer le sens de la flèche, c'est-à-dire mettre les minuscules en colonne et les majuscules en ligne.

Dans un second temps, la plupart des élèves essaient de placer A ou f. A partir de ce moment-là, nous observons des comportements différents. Nous remarquons qu'ils comptent et recomptent les croix dans les lignes et les colonnes. Certains considèrent A ou f comme éléments fixes alors que d'autres les effacent, suivant la stratégie adoptée.

Aucun élève n'a suivi exactement la solution proposée par écrit. Seule Florence a suivi une démarche qui se rapproche de cette solution. Elle ne s'est cependant pas posé de question au sujet de B et C. Elle n'a pas remarqué le choix arbitraire de B et de C. Par contre, Daniel et Laurent réfléchissent longtemps avant de placer B et C. Voici la démarche suivie par Laurent :

Recherche de problème de Laurent (quatrième)

Temps mis pour trouver une solution: 12 mn.

Laurent met la flèche vers le haut, puis l'efface.

Il compte les croix dans les deux diagrammes, remet la flèche vers le haut: . Il place cependant A en colonne (correctement) puis place f correctement, puis c, puis b, puis F, puis E et D , puis e.

Il réfléchit, compte les croix dans les deux tableaux.

Il efface F, le place en dessous, efface E. Il place a, d, E, efface b, place a, efface à nouveau E.

Il compare les deux tableaux, place d puis intervertit b et d, puis remet b et d à leurs places initiales.

Il efface D et la remplace par E. Il hésite et réfléchit avant de placer D.

	a	b	c	e	f
E					
D					
A					
F					
F					
E					

Il a mis toutes les lettres sauf B et C. Il réfléchit longtemps avant de placer B et C et compare les deux tableaux.

Il change le sens de sa flèche, n'arrive pas à se décider pour placer C et B. Il met très discrètement B en haut, réfléchit, vérifie avant de placer B et C. Il lui a bien fallu 6mn pour placer B et C.

	d	b	e	c	a
•					
E } •					
A					
D					
F					
•					

Remarque: Laurent avait tendance à placer d'abord les lettres minuscules, puis de compléter les majuscules, mais ce n'était pas systématique.

Ces deux élèves ont remarqué que B et C occupaient une position un peu spéciale par rapport aux autres lettres (ce sont les seuls éléments interchangeables), mais cependant, l'idée ne leur est pas venue que le problème pouvait avoir deux solutions. Nous pouvons nous demander pourquoi.

Il est intéressant qu'aucun des huit élèves n'ait pensé qu'un problème pouvait admettre plus d'une solution. Ils ont cherché la solution et non pas une solution.

D'autre part, nous avons observé deux comportements assez spéciaux face à cette tâche.

- 1) Pierre-Alain semblait complètement paniqué face à sa feuille et avait perdu tous ses moyens de réflexion.
- 2) Daniel, dès la moindre difficulté, dit qu'il ne comprend pas et veut abandonner le problème.

Nous lui avons suggéré à deux reprises de réfléchir encore un peu et finalement, il trouve la solution après 15 mn. Voici le protocole de recherche de Daniel.

Recherche de problème de Daniel (sixième)

Temps mis pour trouver la solution: 15 mn.

Il a d'abord mis p ↗, a repris le même ordre; puis au bout de 2mn il a vu que cela n'allait pas et il a interverti l'ordre: p ↙

Il place A, puis a, puis B et C après 2mn.

Il compare les deux tableaux, l'air interrogateur.

Après 7mn, il efface tout et dit: "Je ne comprends pas." Il veut abandonner. Je lui suggère de réfléchir encore un peu.

Il compte les croix dans chaque colonne, puis dans chaque ligne, dans les deux tableaux. Au bout de 3mn, il place A et F, puis C, puis a qu'il change trois fois de place. Puis, après 2mn, il place b, puis E et D après 2mn. Il est arrêté pour placer B et veut abandonner. Je lui suggère de mettre B. Après réflexion, il place B, puis C, puis D et F.

Il rend la feuille.

R	.	b	e	c	a	.
A						
.						
.						
B						
.						
C						

			e		a	f
P	d	b	f	c	e	a
C						
E						
A						
D						
F						
B						

Temps mis par les élèves pour résoudre le problème

NOM	Classe	Temps mis
Florence	4 ème	6 mn
Laurent	4 ème	12 mn
Valérie	4 ème	n'a pas trouvé après 25 mn
Ludovic	4 ème	15 mn
Gérard	6 ème	12 mn
Daniel	6 ème	15 mn
Pierre-Alain	6 ème	n'a pas trouvé après 40 mn
Dominique	6 ème	n'a pas trouvé après 25 mn

Nous constatons que le temps nécessaire aux élèves pour trouver la solution varie beaucoup d'un élève à un autre. Mais c'est bien normal ! Il s'agit d'un problème et non d'une question dont on peut exiger la réponse immédiatement. Les élèves cependant, ne cherchent plus guère après une demi-heure.

Conclusion

Ce problème est intéressant à poser aux élèves. Pour le chercher on n'a pas besoin de connaissances mathématiques spécifiques et on peut l'aborder dès la classe de sixième.

L'élève doit se plonger dans le problème pour le résoudre. Il ne s'agit pas ici d'appliquer des algorithmes appris par coeur mais cet énoncé présente un côté heuristique (d'où le grand écart de durée de recherche). Il fait appel cependant à un raisonnement déductif et demande de la part de l'élève un effort de réflexion. Cette recherche est est profitable même pour ceux qui n'ont pas réussi à trouver la solution. Ils ont d'ailleurs demandé après la séance ce qu'il fallait faire et l'un d'entre eux a déclaré spontanément: " J'aurais dû le trouver tout seul".

Jeanine KUBLER,

boursière de recherche en didactique.

Soutenons LE PETIT ARCHIMEDE

C'est une revue éditée bénévolement par des collègues s'adressant à des élèves de 11 à 17 ans.

ABONNEMENT 1981 (nouveau tarif)

Abonnement de Soutien : 100F

(1)

Abonnement de Bienfaiteur : 500F

(1)

Abonnement ordinaire : 50 F

(1)

Abonnements groupés (minimum 10) : 35 F

(Ils peuvent être servis à une ou plusieurs adresses)

(2)

MAJORATION POUR TOUT ENVOI HORS EUROPE
ou PAR AVION (le préciser) de 50 %

Toutes les collections anciennes sont disponibles :

N° 1 à 10, 11 à 20, 21 à 30, 31 à 40, 41 à 50, 51 à 60 : 35F

Prix de vente au n° : 8F la collection 61 à 70 : 40 F

PRODUCTIONS SPECIALES

Le nouveau calendrier perpétuel : 50 F le paquet de cinquante

(3)

Affiches (5 affiches : 15 F) (10 affiches : 25 F)

(2)

N° Spécial PA Sp1 (index général PA1 à PA50) : 5 F

(1)

N° spécial sur le nombre π : 75F -A partir de 4 exemplaires

A partir de 10 exemplaires : 60 F l'unité 70 F l'unité

(x)

NOM :

Prénom :

Adresse d'expédition :

Code Postal :

Ville :

Bureau distributeur :

Cette demande est à adresser exclusivement à :

ADCS - Abonnement - 61 rue St Fusclerf 80000 AMIENS

Joindre chèque ou mandat à l'ordre de :

ADCS CCP 4736 63 W LILLE

(1) cocher les cases utiles

(2) Nombre d'exemplaires

(3) Nombre de paquets de cinquante cartes postales

LES ETABLISSEMENTS SCOLAIRES
PEUVENT-ILS ÉVITER LES DEMANDES DE
FACTURE ? MERCI