Sur les suites de Fibonacci et de Lucas

Après un bref aperçu historique, on signale quelques résultats remarquables, plus ou moins récents, sur les suites F_n de Fibonacci et L_n de Lucas. Puis on expose une méthode simple et nouvelle, qui permet d'obtenir automatiquement une foule de relations entre les fonctions F_n et L_n. Enfin, on étend cette méthode à des suites plus générales.

I.- Aperçu historique

Voici quelques dates marquantes arrondies, qui montrent que jusqu'à la fin du 19e siècle on ne s'est occupé de la suite de Fibonacci que très sporadiquement.

1200 - Fibonacci tombe sur sa suite à propos d'un problème de population de lapins. Ce mathématicien, le plus illustre du Moyen-Age, est mieux connu sous le nom de Léonard de Pise. On lui doit entre autre l'introduction de la numération décimale en Europe. Après lui, la suite va dormir pendant quatre siècles.

1600 - L'astronome Képler rencontre la suite dans l'étude de la disposition des feuilles sur la tige d'une plante, racines lointaines de la moderne phyllotaxie [1].

1750 - Robert Simson déduit de la relation de récurrence $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ la formule $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, qui relie également trois termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

1850 - Binet montre comment on peut calculer un terme de la suite connaissant son rang.

1880 - Lucas introduit sa suite, qui vérifie la même loi de récurrence linéaire, mais diffère par les valeurs initiales [2]. Il est d'ailleurs le premier à employer la dénomination actuelle "suite de Fibonacci". On va voir que le jumelage des deux suites dépasse de loin en intérêt cette dernière seule, qui devient dès lors aussi prolifique que des lapins.

1963 - Le "Fibonacci Quarterly" est créé, revue américaine consacrée essentiellement à ces suites jumelles. Depuis ce temps 17 gros volumes ont déjà paru!

---

* Conférence faite à la Régionale de Strasbourg en octobre 1980.

De nos jours, la suite de Fibonacci a trouvé des applications inattendues dans des domaines aussi variés que la composition musicale et la distribution électrique, la génétique et la théorie d'optimisation ou la combinatoire.

II.- Quelques propriétés des suites F_n et L_n

Formons une suite dont chaque terme à partir du troisième est la somme des deux précédents, en prenant pour valeurs initiales d'abord 1 et 1, puis 1 et 3:

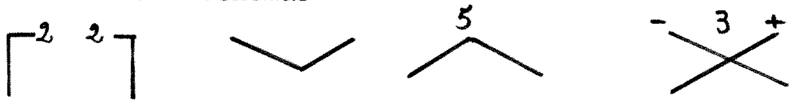
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	...
L_n	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	...

Les suites F_n de Fibonacci et L_n de Lucas sont donc définies par la récurrence

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad F_1 = F_2 = 1$$

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \qquad L_1 = 1,\ L_2 = 3$$

Voyons d'abord quelques relations de voisinage entre les deux suites, relations linéaires dans lesquelles n'interviennent que les termes F_n, L_n et leurs voisins directs. Leurs schémas



se lisent respectivement

$$L_n + F_n = 2F_{n+1}, \qquad L_n - F_n = 2F_{n-1}, \qquad F_{n-1} + F_{n+1} = L_n,$$

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 5\,F_n, \qquad L_{n-1} + F_{n+1} = L_{n+1} - F_{n-1} = 3\,F_n\,.$$

Naturellement il existe aussi des relations de voisinage non linéaires. Par exemple:

$$L_n^2 - F_n^2 = 4\,F_{n-1}\,F_{n+1}, \qquad L_n^2 + F_n^2 = 2\,(F_{n-1}^2 + F_{n+1}^2),$$

$$F_{n-1}^4 + F_n^4 + F_{n+1}^4 = 2\left[\,2F_n^2 + (-1)^n\,\right]^2.$$

Remarquons que les deux premières de ces huit formules entraînent immédiatement la troisième et celles du second degré.

Notons que F_n et L_n sont de même parité, et que leurs valeurs paires se suivent de 3 en 3. Ceci est un cas particulier d'un beau théorème établi par Carmicael vers 1900:

Toute suite d'entiers vérifiant une relation de récurrence linéaire et homogène

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_r u_{n-r}$$

est périodique modulo k, si k est premier avec a_r.

Pour la suite de Fibonacci on peut même énoncer:

F_n est divisible par un entier k si et seulement si n est divisible par a, F_a étant le plus petit nombre de Fibonacci divisible par k.

Par exemple le plus petit F_n divisible par 13 étant F_7, les multiples de 13 de la suite sont F_7, F_{14}, F_{21}, ...

On sait d'ailleurs qu'au moins un des k^2-1 premiers nombres de Fibonacci est divisible par k.

Citons encore le remarquable théorème de Zeckendorf:
Tout entier est, de manière unique, une somme de nombres de Fibonacci, tels que deux quelconques soient non consécutifs et distincts.

Au cours des quinze dernières années, on a montré que la suite F_n ne présente que deux carrés (1 et 144) et deux cubes (1 et 8). Le seul cube de la suite L_n est 1.

Question ouverte: on ne sait si la suite F_n présente une infinité de nombres premiers. Mais on a démontré (ce qui semble à priori plus difficile) qu'un entier voisin d'un nombre de Fibonacci supérieur à 8 n'est jamais premier (c'est-à-dire $F_n \pm 1$ est composé pour $n > 6$).

Autre question ouverte: on voit facilement que la série de terme général $1/F_n$ converge. Mais on ne connait pas la valeur exacte de sa somme; on ne sait même pas si elle est rationnelle ou non.
Par contre, on sait que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+2}} = 1.$$

III.- Association avec les fonctions hyperboliques

Tout repose ici essentiellement sur une notation simple*, mais non courante:

$$[A,B]_n = \begin{cases} A \text{ si } n \text{ est impair} \\ B \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

* Plus généralement $[u_1, u_2, \dots, u_p]$ désigne le terme courant u_n d'une suite de périodes p, égal au u_i du crochet tel que $i = n$, mod p (E. EHRHART, Polynômes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire, Birkhaüser, Bâle, 1977).

Les fonctions " fibonacciennes" (c'est-à-dire F_n et L_n) sont données par les formules de Binet

$$F_n = \frac{a^n - b^n}{a-b} \qquad L_n = a^n + b^n$$

où a et b sont les racines de l'équation

$$X^2 - X - 1 = 0$$

Dans le bülletin de l'APMEP (septembre 1980), nous avons montré que si l'on pose

$$\log a = \alpha, \qquad \alpha n = x, \qquad \alpha m = y$$

on obtient

$$(1) \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{ch}\, kx = \frac{1}{2}[\sqrt{5}F_{kn}, L_{kn}]_{kn} & \mathrm{sh}\, kx = \frac{1}{2}[L_{kn}, \sqrt{5}F_{kn}]_{kn} \\ \mathrm{ch}(x+y) = \frac{1}{2}[\sqrt{5}F_{n+m}, L_{n+m}]_{n+m} & \mathrm{sh}(x+y) = \frac{1}{2}[L_{n+m}, \sqrt{5}F_{n+m}]_{n+m}. \end{array} \right.$$

Les formules de la dernière ligne subsistent si on y remplace partout le signe (+) par (-).

D'où:

<u>Théorème 1</u>. <u>La subsistution (1) associe à toute identité hyperbolique, qui ne présente que des arguments de la forme $kx \pm k'y$, une ou plusieurs identités entre fonctions fibonacciennes</u> .

IV.- Recherches d'identités fibonacciennes

Trois exemples suffiront pour montrer l'efficacité et l'aisance de notre méthode.

<u>Exemple 1</u>.

La substitution (1) donne

n impair: $\dfrac{5F_n^2}{4} - \dfrac{L_n^2}{4} = 1$

n pair : $\dfrac{L_n^2}{4} - \dfrac{5F_n^2}{4} = 1$

Donc pour tout n:

$$(2) \qquad L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n.$$

<u>Application</u>. Soit à résoudre en entiers positifs l'équation diophantienne

$$X^2 - 5Y^2 = 4.$$

D'après (2) conviennent

$$X = L_{2n}, \qquad Y = F_{2n} \qquad (n > 0).$$

On montre qu'on obtient ainsi toutes les solutions.

Exemple 2. $\qquad \mathrm{ch}(x + y) + \mathrm{ch}(x - y) = 2\mathrm{ch}x\mathrm{ch}y$

$$\mathrm{sh}(x + y) + \mathrm{sh}(x - y) = 2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y.$$

En examinant quatre cas, suivant les parités de n et m, on obtient finalement

$$L_{n+m} + L_{n-m} = \left[5F_nF_m,\ L_nL_m\right]_m$$

$$F_{n+m} + F_{n-m} = \left[L_nF_m,\ F_nL_m\right]_m.$$

Pour m = 1, on trouve les relations de voisinage

$$L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$$

$$F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$$

On établit de même

$$L_{n+m} - L_{n-m} = \left[5F_nF_m,\ L_nL_m\right]_{m-1}$$

$$F_{n+m} - F_{n-m} = \left[L_nF_m,\ F_nL_m\right]_{m-1}.$$

De ce qui précède on déduit sans peine

$$2F_{n+m} = F_nL_m + L_nF_m$$

$$2L_{n+m} = L_nL_m + 5F_nF_m.$$

En portant $m = \pm 1$ dans l'avant-dernière identité, on trouve les relations de voisinage

$$2F_{n+1} = F_n + L_n$$

$$2F_{n-1} = L_n - F_n.$$

Exemple 3.

$$\mathrm{sh}(x + y)\ \mathrm{sh}(x - y) = \mathrm{sh}^2x - \mathrm{sh}^2y$$

$$\mathrm{ch}(x + y)\ \mathrm{ch}(x - y) = \mathrm{ch}^2x + \mathrm{sh}^2y.$$

Selon les parités de n et m, la substitution (1) fournit quatre expressions pour $F_{n+m}F_{n-m}$ et autant pour $L_{n+m}L_{n-m}$. En tenant compte de (2), on peut condenser les résultats dans deux identités:

$$F_{n+m}F_{n-m} - F_n^2 = (-1)^{n+m+1}F_m^2$$

$$L_{n+m}L_{n-m} - L_n^2 = (-1)^{n+m}L_m^2 - 4(-1)^n.$$

La première est la formule de Catalan qui date de 1886, la seconde est sans doute inédite.

En portant dans ces deux relations d'abord $m = 1$ puis $m = 2$, on trouve les identités

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad F_{n+2}F_{n-2} - F_n^2 = (-1)^{n+1}$$

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^{n+1} \qquad L_{n+2}L_{n-2} - L_n^2 = 5(-1)^n.$$

Dans la première on reconnait la formule de Simson, mentionnée au début.

V.- Fonctions fibonacciennes généralisées.

Soit s un entier positif et a et b les racines de l'équation

$$X^2 - sX - 1 = 0.$$

Nous appellerons "fonctions fibonacciennes généralisées" les entiers

$$f_n = \frac{a^n - b^n}{a-b} \qquad \mathcal{L}_n = a^n + b^n.$$

Nous désignerons encore ces égalités par "formules de Binet".

Si on pose

$$\Delta = s^2 + 4, \qquad \alpha = \log a, \qquad \alpha n = x, \qquad \alpha m = y,$$

on trouve, en opérant comme pour les fonctions fibonacciennes ordinaires,

$$(3) \quad \begin{cases} \mathrm{ch}\,kx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\Delta}\, f_{kn}, \mathcal{L}_{kn}\right]_{kn} & \mathrm{ch}(x + y) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\Delta}\, f_{n+m}, \mathcal{L}_{n+m}\right]_{n+m} \\ \mathrm{sh}\,kx = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}_{kn}, \sqrt{\Delta}\, f_{kn}\right]_{kn} & \mathrm{sh}(x + y) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}_{n+m}, \sqrt{\Delta}\, f_{n+m}\right]_{n+m}. \end{cases}$$

D'où:

Théorème 2. La substitution (3) associe à toute identité hyperbolique, qui ne présente que des arguments de la forme $kx \pm k'y$, une ou plusieurs identités entre fonctions fibonacciennes généralisées.

Soulignons que ce sont les mêmes qu'entre fonctions fibonacciennes ordinaires, à cela près qu'un éventuel facteur 5 ou $\sqrt{5}$ est remplacé par Δ ou $\sqrt{\Delta}$.

Par exemple

$$f_{2n} = f_n \mathcal{L}_n \qquad \mathcal{L}_n^2 - \Delta f_n^2 = 4(-1)^n.$$

Les relations de voisinage sont en général modifiées (quand dans leur démonstration intervient Δ ou $\mathcal{L}_1 = s$). Mais si dans l'identité

$$(4) \qquad f_{n+m} + f_{n-m} = \left[\mathcal{L}_n f_m, f_n \mathcal{L}_m\right]_m$$

on met $m = 1$, on voit, en tenant compte de $f_1 = 1$, que subsiste

$$(5) \qquad f_{n+1} + f_{n-1} = \mathcal{L}_n.$$

Application. Si l'on pose

$$n + m = a, \qquad n - m = b$$

la formule (4) devient

$$\mathcal{F}_a + \mathcal{F}_b = \left[\mathcal{L}_{\frac{a+b}{2}}\mathcal{F}_{\frac{a-b}{2}}, \mathcal{F}_{\frac{a+b}{2}}\mathcal{L}_{\frac{a-b}{2}}\right]_{\frac{a-b}{2}}$$

qui exige que a-b soit pair, pour que les indices soient entiers. D'où:
Théorème. Un nombre $\mathcal{F}_a + \mathcal{F}_b$ n'est pas premier, si $a - b$ est pair autre que 2. Quant à $\mathcal{F}_a + \mathcal{F}_{a+2}$, il est premier juste si $\mathcal{L}_{a+1}$ l'est.(5)

Car $\mathcal{F}_a + \mathcal{F}_b = \mathcal{F}_{\frac{a+b}{2}}\mathcal{L}_2$ si $a - b = 4$, et si $a - b > 4$ il n'y a pas de facteur $\mathcal{F}_1 = 1$ ou $\mathcal{F}_2 = \mathcal{L}_1 = s = 1$ dans le crochet.

Remarques. 1) Dans les mêmes conditions $\mathcal{L}_a \pm \mathcal{L}_b$ n'est pas premier; si $a - b$ est pair autre que 2 ou 4, $\mathcal{F}_a - \mathcal{F}_b$ n'est pas premier.

2) On comprend maintenant pourquoi un entier voisin direct d'un nombre de Fibonacci supérieur à 8 n'est jamais premier.

Il suffit de considérer $F_a \pm 1$ comme $F_a \pm F_1$ si a est impair, comme $F_a \pm F_2$ si a est pair, et de noter que $a - 1$ et $a - 2$ dépassent 4 si $a > 6$.

Récurrence. On peut aussi définir $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{L}_n$ par la récurrence

$$\mathcal{F}_{n+1} = s\mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n-1} \qquad \mathcal{L}_{n+1} = s\mathcal{L}_n + \mathcal{L}_{n-1}$$

$$\mathcal{F}_0 = 0, \mathcal{F}_1 = 1 \qquad \mathcal{L}_0 = 2, \mathcal{L}_1 = s$$

que l'on déduit sans peine des formules de Binet.

E. EHRHART,
Strasbourg.

[1] F. Stoltz, Quelques problèmes posés par la phyllotaxie, L'Ouvert, 18, (1979).
[2] Lucas, Note sur le triangle de Pascal et la série de Lamé, Nouvelle Corresp. Math., 2, 74, (1876) et Théorie des fonctions numériques périodiques, Am.J. Math., 1, 184-220, (1878).