LE CUBE MAGIQUE HONGROIS

Jean LEFORT

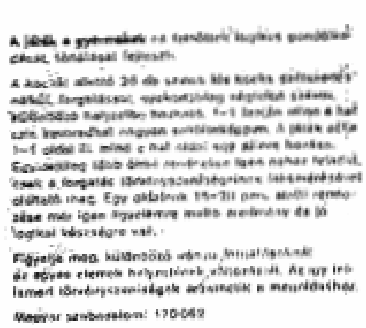
Le "cube magique" a été inventé par un ingénieur sculpteur hongrois, le professeur Ernö Rubik, qui a vendu tous ses droits de reproduction à l'industrie. Les deux spécimens que l'on peut emprunter à la bibliothèque irem proviennent de Hongrie. Il est très difficile de s'en procurer car la demande dépasse largement l'offre actuellement[1].
Pour ceux qui pensent que le mode d'emploi est donné en hongrois sur l'emballage, nous les détrompons immédiatement en donnant une traduction du texte :

CUBE MAGIQUE

jeu spatial et logique.

Coopérative Politechnika

distribué par : TRIAL



Ceci est un jeu pour enfants et adultes, développant la pensée logique et la visualisation spatiale. Il y e 26 petits cubes de couleur attachés les uns aux autres. En les tournant, ils peuvent prendre pratiquement une infinité de positions relatives. Sur chaque face, les s ix couleurs peuvent être mélangées de plusieurs façons. Le but du jeu est de rendre chaque face unicolore. L'obtenir sur plusieurs faces est très difficile. Cela n'est possible qu'à l'aide des connaissances des règles de rotation. Mettre 15 à 20 minutes pour colorier uniformément une seule face

[1] En dehors des deux exemplaires du cube magique hongrois que l'on peut emprunter à l'IREM, il est possible d'en acheter auprès de : "L'œuf cube" 24, rue Linné , Paris 5ème.

est un bon score et démontre une grande aptitude à la résolution des problèmes logiques. Regardez les effets des rotations dans chaque direction sur la position de chacun des éléments. Les règles que vous pourrez ainsi découvrir vous conduiront à la solution.
Brevet hongrois n° 170.062

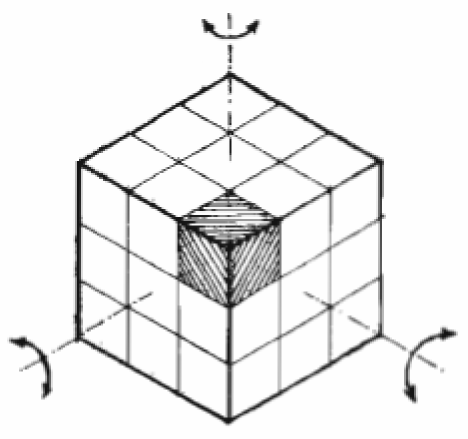
TÁJÉKOZTATÖ
Anyaga : Ütésálló sztirol
Jellemzöi : Höre lágyuló, kevésbé törékeny
Kezelése : Langyos, szappanos vízben mosható

Matériaux
Matière : Styrol anti-choc
Propriétés : s'amollit à la chaleur ; peu fragile.
Entretien : lavage en eau tiède légèrement savonneuse

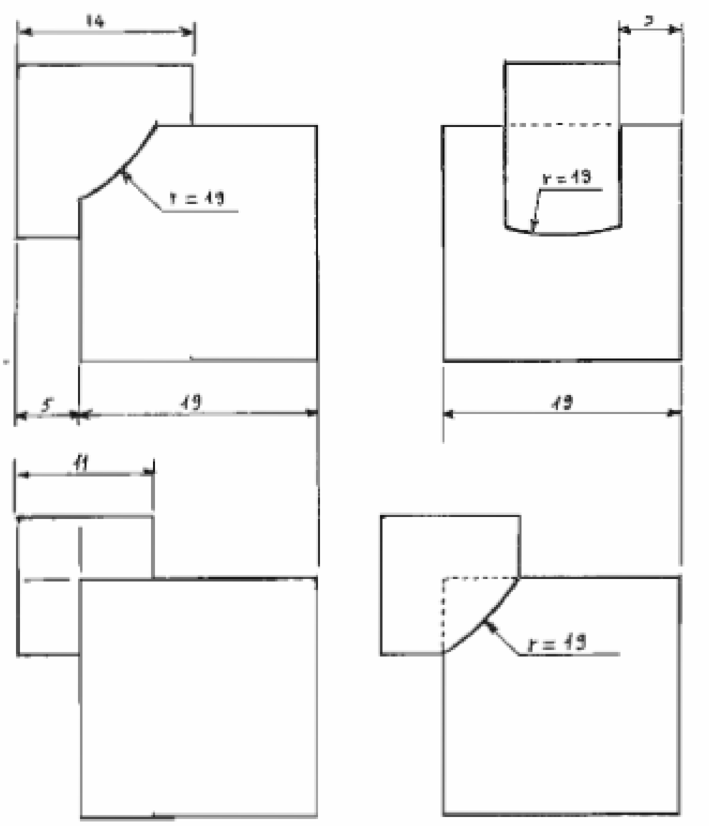
Quelques remarques

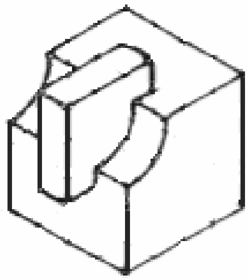
a) Le mode d'emploi se complait en généralités et en banalités. Quand il annonce qu'il y a une infinité de positions relatives des couleurs, il n'exagère pour ainsi dire pas car noue démontrerons ci-dessous qu'il y en a 43,25 milliards de milliards, soit à raison d'une position par microseconde (ce qui est rapide, même pour un ordinateur) 1, 370 million d'années
b) Comme il est indiqué, s'il est presque facile de colorier une seule face, c'est un tout autre problème de colorier correctement les six faces du cube. Y passer ses loisirs pendant une dizaine de jours semble être une bonne moyenne à condition d'avoir quelques connaissances des rotations dans l'espace et de théorie des groupes.

I – Réalisation et construction

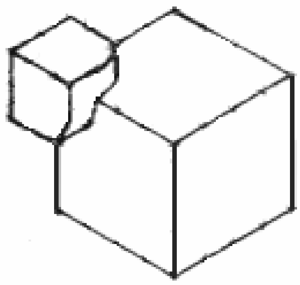


Une des premières questions qui vient à l'esprit dès que l'on a tourné les trois faces indiquées ci-contre, c'est comment sont accrochés les cubes les uns aux autres, en particulier ceux des sommets ? Comment fonctionne mécaniquement le cube magique ? Pour le comprendre le plus simple est de le démonter. Mais par où commencer ? Aucune vis, aucun trou apparent ... Et pourtant il a bien du être monté en usine ! En réalité le dernier petit cube introduit l'a été en force et il faut très légèrement forcer pour l'ôter, à condition de choisir l'angle convenable.
Tourner la face supérieure du cube d'environ 15 à 20° de façon à amener un petit cube médian (hachuré ci-dessous à la hauteur de la séparation verticale de deux petits cubes des étages inférieurs. En s'aidant d'un tournevis ou d'une lame, soulever le cube médian en le basculant vers le centre. Le cube magique se démonte alors sans difficultés et laisse apparaître un mécanisme d'une simplicité étonnante (voir page hors texte). Le remontage n'est pas plus difficile, le dernier petit cube médian étant fortement pressé dans une position analogue à celle du démontage.

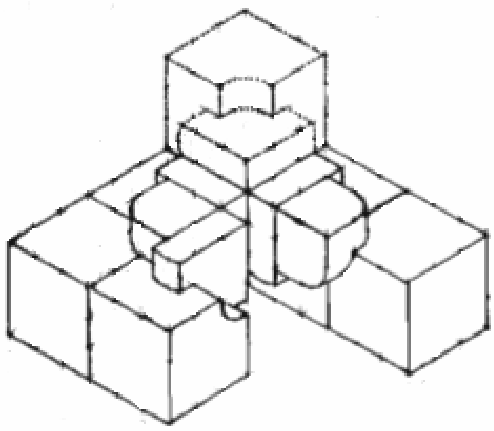




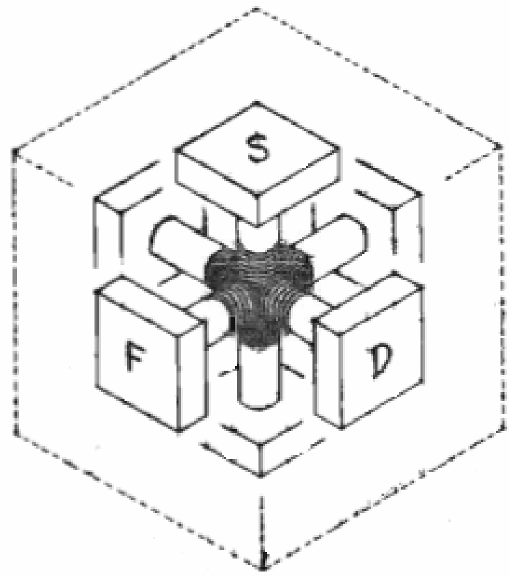
cube médian



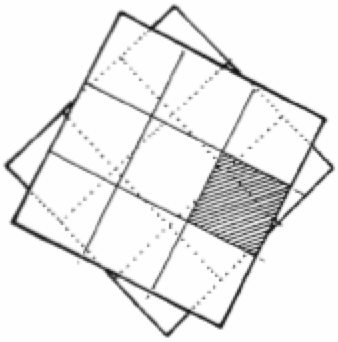
cube de coin

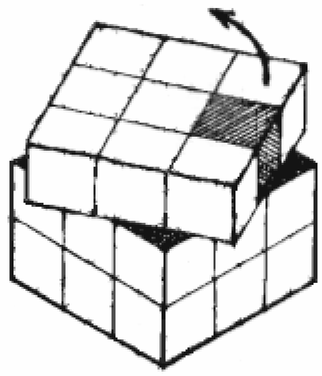


Assemblage de quelques cubes sans le trièdre central



Trièdre central ; la partie ombrée est fixe, les centres des faces pivotant autour de leur axe





Attention : Pour des raisons qui vont apparaître au paragraphe suivant il faut remonter le cube magique dans la position achevée (c'est-à-dire avec toutes les faces unicolores). C'est ainsi une façon (peu élégante) de résoudre le problème.

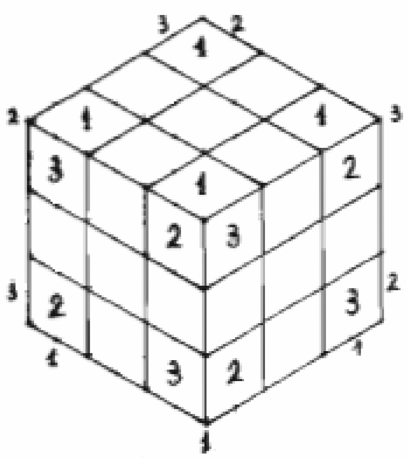
II – Généralités sur les mouvements

Il est clair qu'un cube de coin reste toujours un cube de coin et qu'un cube médian reste médian au cours d'un déplacement quelconque. On peut toujours supposer que les centrer de faces sont fixes (en réalité ils peuvent tourner sur eux-mêmes comme nous l'avons vu lors du démontage, mais cela importe peu pour la coloration).
Chaque cube de coin a huit positions et dans chacune de ces huit positions il peut présenter ses trois couleurs de trois façons.
Chaque cube médian a douze positions dans chacune desquelles il peut présenter ses deux couleurs de deux façons.
Il semble donc que le nombre total de positions soit :

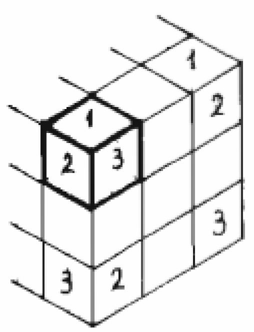
$$N = 8\,! \times 3^8 \times 12\,!\,2^{12}$$
$$= 519\,024\,039\,293\,878\,272\,000$$

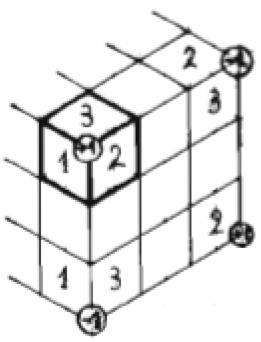
En réalité, par les différentes rotations, toutes ces positions ne sont pas accessibles et c'est bien pourquoi il est hautement conseillé de remonter le cube magique dans sa position achevée.

a) Pour les cubes de coin :



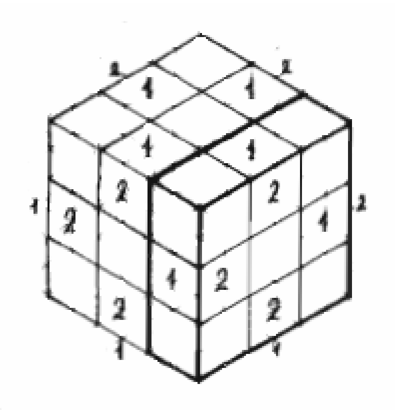
Numérotons les trois faces des cubes de coin de façon à ce que l'orientation induite soit la même sur chacun d'eux (le dessin ci-contre en donne un exemple). On regarde alors l'effet d'un mouvement élémentaire quelconque sur cette numérotation. Dans le cas de la figure, il n'y a modification de cette numérotation que si l'on tourne une face latérale.
Si l'on compare la numérotation d'un cube (par exemple celui en traits gras) et de celui qui a la même position après le mouvement, on remarque que la numérotation a tourné d'un tiers de tour dans le sens positif ; sur les quatre cubes de coin dont la numérotation a changé il y a eu exactement deux rotations d'un tiers de tour dans





un sens et deux dans l'autre ; au total la somme (modulo un tour) est nulle. Comme c'est évidemment le cas pour les faces supérieure et inférieure on en déduit que le résultat est vrai pour une suite quelconque de mouvement. En conséquence **les cubes de coin ne peuvent prendre que le tiers de toutes les positions possibles** ; (on doit éliminer celles pour lesquelles la somme précédente équivaut à 1/3 ou à 2/3 de tour).

b) Pour les cubes médians :



Effectuons une démonstration analogue après avoir numéroté leurs faces comme sur la figure ci-contre. Vu la numérotation choisie, il suffit de regarder ce qui se passe lors d'un mouvement élémentaire pour la face marquée en traits gras. On remarque que le changement de numérotation n'a lieu que pour deux cubes médians, donc dans un mouvement quelconque, que pour un nombre pair de **cubes médians**. Ceux-ci **ne peuvent prendre que la moitié de toutes les positions possibles**.

c) Les transpositions :

On sait qu'une permutation circulaire sur quatre éléments peut se décomposer en un produit d'un nombre impair de transpositions ; par exemple :

$$\begin{pmatrix} A\,B\,C\,D \\ B\,C\,D\,A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\,B \\ B\,A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A\,C \\ C\,A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A\,D \\ D\,A \end{pmatrix}$$

Or, tourner d'un quart de tour une face revient à faire la fois une permutation circulaire sur les quatre cubes de coin et une autre sur les quatre cubes médians. Il y a donc au total un nombre pair de transpositions, (impair plus impair égale pair).

d) Conclusion :

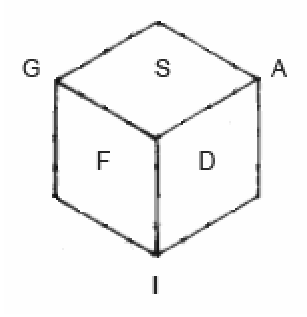
Finalement, le nombre total annoncé : *N*, doit être divisé successivement par 3, puis par 2 et encore par 2, soit en tout par 12. Le nombre de positions possibles des couleurs est alors celui qui a été donné en introduction et veut exactement :

43 252 003 274 489 856 000

On comprend alors que si après démontage on remonte le cube eu hasard, il n'y a qu'une chance sur douze pour qu'on puisse arriver à colorier uniformément chaque face.
Toutefois le nombre précédent peut être multiplié par 2 048 (et non pas 4 096) si l'on tient compte der rotations du centre de chaque face. Que le lecteur démontre ce résultat lui-même !

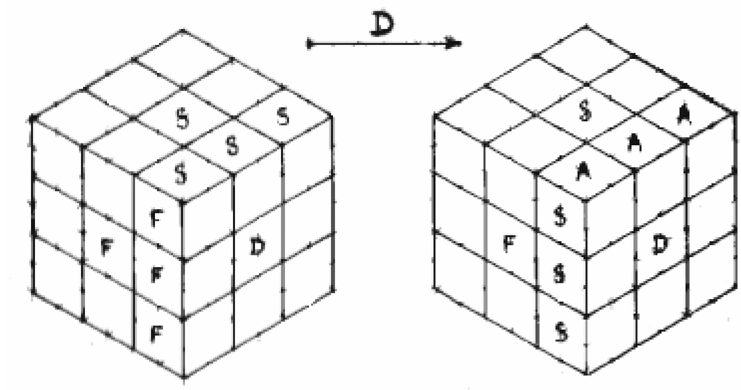
III - Notations

Il serait tentent d'utiliser les couleurs de chaque face pour noter une position quelconque. Cela serait cependant maladroit dans la mesure où, d'un cube à l'autre, les couleurs ne sont pas disposées de la même façon et que, de plus, ce qui est intéressant, ce n'est pas la couleur, mais le mouvement qui échange deux positions. Utilisons donc les noms indiqués sur le croquis ci-après :



S pour la face	Supérieure
I	Inférieure
G	de Gauche
D	de Droite
F	Frontale
A	Arrière

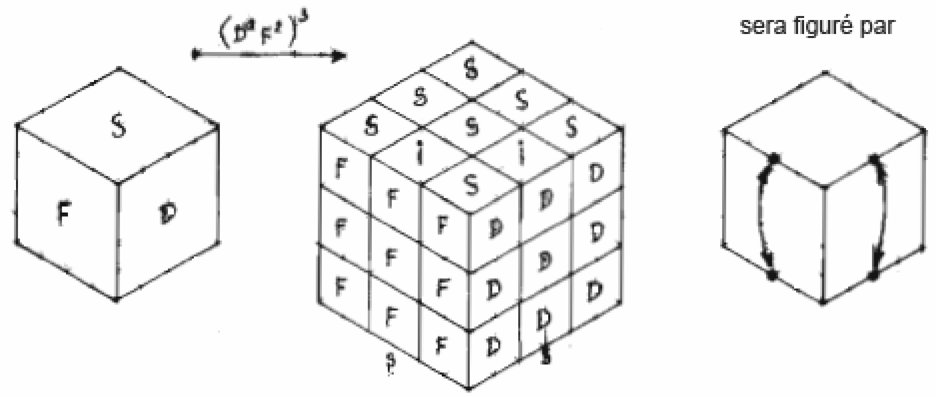
La rotation d'un quart de tour dans le sens positif d'une face quelconque sera notée par la même lettre que la face : Ainsi :



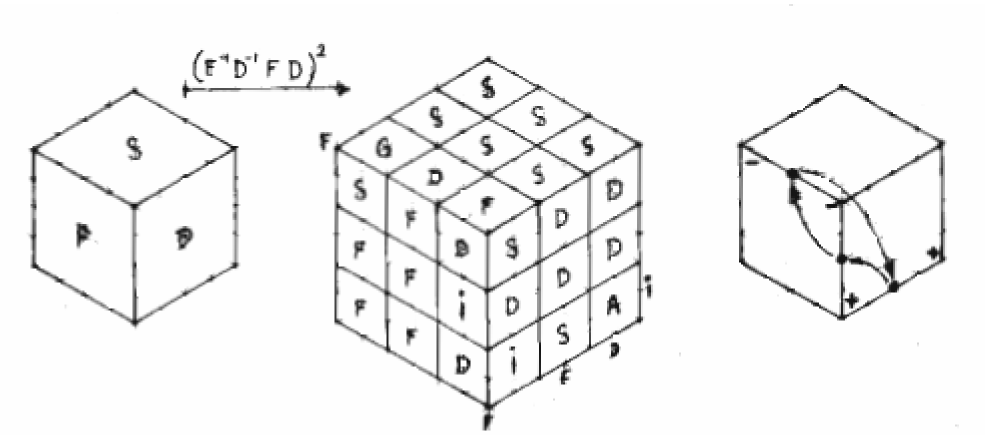
D^2 correspondra au demi-tour et $D^3 = D^{-1}$ au trois-quarts de tour dans le sens positif (ou au quart de tour dans le sens négatif). Une succession de mouvement sera noté tout naturellement dans l'ordre de l'écriture ; exemple : D F^2 $(S\ F)^2$ signifie qu'on effectue successivement D puis F2 puis S puis F puis S puis F .

Attention : Ce n'est pas la notation habituelle de la composition des applications, mais c'est plus facile à lire !

Dans certains cas, nous symboliserons les mouvements à l'aide de flèches.



On remarquera cependant que cette figuration ne permet pas de noter un changement d'orientation d'un petit cube. On pourra parfois l'indiquer schématiquement comme par exemple :



où les signes indiquent que les cubes de coin ont tourné d'un tiers de tour dans le sens indiqué (on imagine qu'on les regarde naturellement de l'extérieur du grand cube).

IV – Quelques idées de recherche

Dans le but de comprendre ce qui se passe, nous allons étudier quelques sous-groupes qui permettent de ne modifier la position que de certains petits cubes.

a) Le sous-groupe sandwich :

Il est formé des mouvements de la forme D G^{-1}, c'est-à-dire obtenus en tournant simultanément deux faces opposées en sens inverse, (**Attention** : avec la notation habituelle, cela veut dire les deux faces vers l'avant ou vers l'arrière simultanément). Cela revient à ne considérer que la rotation de la tranche intermédiaire. Nous noterons à l'aide d'une petite lettre ce mouvement :

$$d = D\,G^{-1} \qquad s = S\,I^{-1} \qquad f = F\,A^{-1}$$

On remarque que $d = g^{-1}$

Ce sous-groupe est engendré par trois éléments, par exemple (f , d , s). Il n'est pas aussi énorme que le groupe complet, il n'a que 768 éléments ce qui est assez facile à compter, et il permet l'obtention de jolies figures sur les faces, qui sont toutes de la forme ci-dessous, où α, β, γ et δ sont des couleurs. En notant α' la couleur diamétralement opposée à α nous pouvons facilement obtenir les configurations suivantes :

α	β	α
γ	δ	γ
α	β	α

6 faces telles que $\alpha = \beta = \gamma$ "faces centrées"
6 faces telles que $\alpha = \delta = \beta' = \gamma'$ "faces en X ou croisées"
4 faces centrées et 2 faces unicolores
2 faces croisées et 4 faces telles que $\alpha' = \beta = \gamma = \delta$ "faces en +"

b) Le carré du sous-groupe sandwich :

C'est celui engendré par (f^2, d^2 , s^2). Il est encore plus simple que le précédent ; en particulier il est commutatif. Sa table de Pythagore est très rapidement faite.

c) Le sous-groupe anti-sandwich

Ce sera celui obtenu à partir de mouvements du type D G (= G D). Ce groupe est plus délicat à étudier mais son carré est le même que celui du sous-groupe sandwich.

d) Autres exemples :

Nous laissons le soin au lecteur de trouver d'autres sous-groupes engendrés par quelques éléments tels que (f , d) , (FD) , … En explorant ces différentes voies, le lecteur ,aura remarqué qu'il est possible d'échanger deux paires de cubes médians en laissant tous les autres cubes fixes ou d'échanger deux paires de cubes de coin en laissant également toutes les autres pièces fixes. Par contre, comme il a été démontré, il est impossible de n'échanger qu'une paire de cubes.
On peut aussi échanger simultanément une paire de cubes de coin et une paire de cubes médians (c'est assez compliqué) ou bien faire tourner sur place une paire de cubes médians ou une paire de cubes de coin.
Une autre direction de recherche consiste à rechercher le nombre d'éléments de certains sous-groupes comme par exemple ceux engendrés par un seul élément ou par deux :
(S^{-1} F) a pour ordre 63
(F D) a pour ordre 105 ....

V – Le problème fondamental

Il s'agit, à partir d'une position arbitraire de retrouver la position initiale (ou achevée), c'est-à-dire celle où chaque face est coloriée uniformément. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées. Dans tous les cas, les couleurs sont imposées par le centre des faces.

1ère méthode[2] :

On place d'abord correctement les cubes de coins en faisant abstraction des mouvements des cubes médians. Pour cela on étudiera l'effet des mouvements suivants :

$$F^{-1} D^{-1} F D \quad ; \quad (F^{-1} D^{-1} F D)^2 \quad ; \quad (F^{-1} D^{-1} F D)^3$$

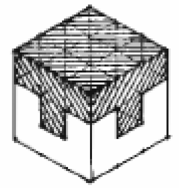
On place ensuite les cubes médians en étudiant l'effet des mouvements :

$$(D^2 S^2)^3 \qquad ; \qquad F^{-1} A S^{-1} (D^2 S^2)^3 S A^{-1} F$$

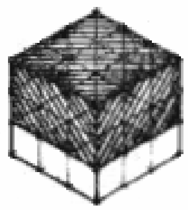
Dans le théorie des groupes, on remarque que l'un des mouvements est le "conjugué" de l'autre.
Au cours des manipulations précédentes on est amené à modifier la position du cube pour que les faces idoines soient en S , D ou F. Il faut également évaluer le nombre de transposition sur les éléments à modifier. Il est quelquefois intéressant d'effectuer quelques mouvements préalables simples: dans le but de situer les petits cubes en des endroits plus agréables.

[2] Cette première méthode est exposée par David SINGMASTER dans un fascicule intitulé : "Notes on the magic cube" que l'on peut emprunter à l'IREM. Outre des informations qui m'ont fourni la moitié de cet article on y trouve, longuement développées sur des exemples simples, des notions sur la théorie des groupes de substitution (groupes finis).

2ème méthode

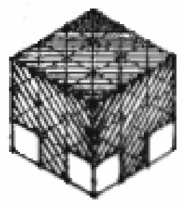


a) Placer correctement l'étage supérieur en tenant compte des bords comme sur le croquis ci-contre. (Ceci est facile sans aucune connaissance).



b) Placer correctement le deuxième étage en étudiant l'effet sur un cube médian de cet étage d'un mouvement tel que :

$$D\ I^{-1}\ D^{-1}\ F\ D^{-1}\ F^{-1}\ D$$



c) Placer correctement les cubes médians de la face inférieure-en étudiant l'effet sur de tels cubes des mouvements du type :

$$(D\ I^2.D^{-1}.I^2\ D^{-1})\ (F\ D\ F^{-1})$$

ou du type de celui donné en (b) mais à la puissance 6.

d) Achever enfin la résolution du problème par des mouvements comme :

$$(\ D\ I^{-1}\ D^{-1}\ F\ D^{-1}\ F^{-1}\ D\ I^{-1}\ )^4$$

ou $$(D\ I^{-1}\ D^{-1}\ F\ D^{-1}\ F^{-1}\ D)\ (F^{-1}\ I\ F\ D^{-1}\ F\ D\ F^{-1})$$

Dans ce dernier mouvement on remarque la combinaison de celui vu en (b) avec un mouvement "symétrique".

3ème méthode

La vôtre, obtenue peut-être en combinant certains des mouvements précédents, en trouvant certains raccourcis, en faisant preuve d'originalité, ...
En appelant "mouvement élémentaire" la rotation d'une face dans un sens ou un autre d'un quart ou d'un demi-tour, on peut estimer qu'il faut environ 200 mouvements élémentaires poux rétablir la position initiale ou achevée à partir d'une position quelconque. On conjecture même qu'une centaine de mouvements élémentaires au plus suffiraient. La première méthode donnée permet un comptage assez simple mais nécessite une bonne analyse des positions ce qui est moins utile dans la deuxième méthode qui est peut-être un peu plus longue.

Conclusion

Le lecteur qui m'aura suivi jusqu'ici possède tous les éléments pour résoudre n'importe quel problème qu'il peut se poser à propos du cube magiques éléments de réponses apportés, il reste suffisamment de questions ouvertes pour pouvoir passer de nombreuses heures en compagnie de ce jouet qui reste le plus épouvantable casse-tête que je connaisse. Je lui souhaite beaucoup de plaisir.