Les entiers d'Euler

Les entiers dont je veux vous entretenir sont moins connus que les nombres d'Euler ou les nombres eulériens, analogues respectivement aux nombres de Bernoulli ou aux nombres de Stirling. Et pourtant, sous une certaine forme, ces entiers qui fascinaient Euler étaient déjà connus des Anciens.

Je vais d'abord en montrer l'origine et en donner l'expression générale. J'en établirai ensuite quelques propriétés remarquables. Puis j'en donnerai des applications en théorie des nombres.

On verra à cette occasion la commodité de la notation de nombre périodique et l'utilité de la notion de polynome arithmétique.

I. Expression générale des entiers d'Euler

Considérons le produit illimité

$$\Pi(X) = (1 - X)(1 - X^2)(1 - X^3)\dots$$

qu'Euler a rencontré à propos du problème de la partition des entiers. Il a par exemple montré que le nombre p(n) des partitions de n en sommes d'entiers distincts ou non, est engendré par la fonction

$$\frac{1}{\Pi(X)} = 1 + \sum_{n>0} p(n)X^n.$$

En développant $\Pi(X)$ en série entière, on s'attend a priori à trouver des coefficients de plus en plus grands. On est d'autant plus surpris de ne constater que des coefficients 1 ou −1, isolés dans des lacunes de coefficients nuls, lacunes dont l'ampleur croît dans l'ensemble et tend vers l'infini. De façon plus précise :

(1) $$\Pi(X) = 1 - X^{a_1} - X^{a_2} + X^{a_3} + X^{a_4} - X^{a_5} - X^{a_6} + \dots + \varepsilon_n X^{a_n} + \dots$$

Les coefficients sont, par couples de termes, alternativement −1 et +1. Pour voir comment se comportent les exposants, dressons en une liste initiale :

Tableau I des entiers d'Euler a_n

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a_n	1	2	5	7	12	15	22	26	35	40	51	57	70	77	92	100
Δ_n	1	3	2	5	3	7	4	9	5	11	6	13	7	15	8	

* Conférence faite à la Régionale de Strasbourg en avril 1979

Les a_n semblent suivre une loi compliquée, puisque leur vitesse de croissance est oscillante. Il est naturel de former la suite des différences $\Delta_n = a_{n+1} - a_n$. On constate que ses termes de rang impair sont les entiers naturels et ses termes de rang pair sont les nombres impairs en partant de 3.

Nous allons donner une expression simple du terme général $\varepsilon_n X^{a_n}$ de la série (1), grâce à deux définitions et à un théorème.

Définitions

(1) Un nombre périodique $u_n = [u_1, u_2, \ldots, u_k]$ est égal au u_i des crochets tel que $n = i$, modulo k. (On représente donc très naturellement une suite de période k par ses k premiers termes, en particulier $u_n = [a,b]$ signifie que $u_n = a$ si n est impair et $u_n = b$ si n est pair.)

(2) Un polygone arithmétique P(n) n'est défini que pour n entier positif et ne prend que des valeurs entières ; il diffère d'un vrai polynome en ce que certains de ses coefficients sont des nombres périodiques.

Nous admettrons le théorème de sommation suivant, facile à établir.

Théorème 1

(1) Si $u_n = [a,b]$ et $v_n = [a,b]\, n$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{(a+b)n + [a-b,\ 0]}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \frac{(a+b)n^2 + [2a,\ 2b]\, n + [a-b, 0]}{4}$$

On voit sans peine que

$$\Delta_n = \frac{n+1}{2}\ [1,2]$$

On peut donc calculer

$$a_n = 1 + (\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{n-1}).$$

En appliquant le théorème 1 et en tenant compte pour les crochets de la différence de parité de n – 1 et de n, on trouve :

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3(n-1) + [0,\ -1]}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3(n-1)^2 + [4,\ 2]\ (n-1) + [0,\ -1]}{4}$$

D'où en simplifiant

Théorème 2

(2) Le n-ième entier d'Euler est le trinome arithmétique

$$a_n = \frac{3n^2 + [4,\ 2]\ n + [1,\ 0]}{8}$$

Corollaire

Le terme général de la série $\Pi(X)$ est

$$[-1, -1, 1, 1] \quad X^{\frac{1}{8}(3n^2 + [4, 2]\, n + [1, 0])}$$

Nous définissons les entiers d'Euler a_n par le tableau I, indéfiniment prolongé à l'aide des deux progressions arithmétiques imbriquées, et la formule (2) en découle. Par contre nous avons admis la formule (1). Du vivant d'Euler elle restait conjecturale. Ce n'est qu'au siècle suivant que diverses démonstrations en ont été données, notamment par Legendre (2), Cauchy, Jacobi et Sylvester. Au sujet de cette relation je crois qu'il vous intéressera d'entendre Euler lui-même. Dans un mémoire intitulé "Découverte d'une loi toute extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs" (3), il dit :

"J'ai multiplié actuellement un grand nombre de facteurs ensemble et j'ai trouvé cette progression (.....). On n'a qu'à entreprendre cette multiplication et à la continuer aussi loin qu'on jugera à propos, pour se convaincre de la vérité de cette série (.....). J'ai longtemps cherché en vain une démonstration rigoureuse (.....) et j'ai proposé la même demande à quelques-uns de mes amis dont je connais la force dans ces sortes de questions ; mais tous sont tombés avec moi d'accord sur la vérité de cette conversion, sans avoir pu déterrer aucune source de démonstration. Ce sera donc une vérité connue, mais pas encore démontrée."

Euler a écrit ce texte en français, comme celui des citations qui vont suivre.

II. Propriétés des entiers d'Euler

Posons d'abord une question toute simple. Quelle est la parité du n-ième entier d'Euler ? En examinant le tableau I, il semble que les parités se reproduisent avec la période 8. Or,

$$a_{n+8} = \frac{3(n+8)^2 + [4, 2]\ (n+8) + [1, 0]}{8} = a_n + 6_n + [28, 26]$$

Comme $6n + [28, 26]$ est pair pour tout n, il s'en suit :

Théorème 3

La parité de a_n est celle du nombre périodique $[1,0,1,1,0,1,0,0]$

De même $a_n = [1,-1,-1,1,0,0]$ modulo 3, car $a_{n+6} = a_n + 3\ \dfrac{3n + [11,10]}{2}$

Voici maintenant une question plus importante. Trouver une propriété caractéristique des a_n. Pour que N soit un nombre d'Euler, il faut que l'équation

$$N = \frac{3n^2 + [4, 2]\ n + [1, 0]}{8}$$

ou

$$3n^2 + [4, 2]\ n + [1, 0] - 8N = 0$$

ait une racine positive entière. Il faut donc que son discriminant réduit

$$\Delta = \left[2,\ 1\right]^2 - 3\left[1,\ 0\right] + 24\,N = \left[4,\ 1\right] - \left[3,\ 0\right] + 24\,N = \left[1,\ 1\right] + 24N = 1 + 24\,N$$

soit un carré parfait. Reciproquement soit

$$24\,N + 1 = k^2$$

où k, nécessairement non multiple de 3, est de la forme 3n + 2 ou 3n + 1. L'égalité (2), qui peut s'écrire

$$24a_n + 1 = 9n^2 + 3\left[4,2\right]n + \left[4,1\right] = (3n + \left[2,1\right])^2,$$

montre alors que N est le n-ième entier d'Euler.

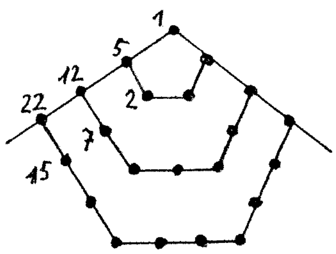
Théorème 4

Un entier n est d'Euler si et seulement si 24 N + 1 est un carré parfait k^2. Son rang est alors $\left[\frac{k}{3}\right]$ (partie entière de $\frac{k}{3}$).

Les a_n ont encore une autre propriété caractéristique. Distinguons dans (2) n impair ou pair :

1) $n = 2k - 1 \Longrightarrow a_n = \frac{3k^2 - k}{2} = 1,\ 5,\ 12,\ 22\ \ldots$

2) $n = 2k \Longrightarrow a_n = \frac{3k^2 + k}{2} = 2,\ 7,\ 15,\ \ldots$



Les entiers $\frac{3k^2 - k}{2}$ sont les nombres pentagonaux, connus depuis l'Antiquité. Ils comptent les points marquants des pentagones fermés ci-contre. Les entiers $\frac{3k^2 + k}{2}$ ont aussi une représentation arithmogéométrique simple : ils comptent les points marquants des pentagones ouverts. Nous les appellerons donc nombres pentagonaux de seconde espèce.

Remarquons qu'on les obtient aussi par $\frac{3k^2 - k}{2}$ pour k = -1, -2, -3, ...

Théorème 5

Les entiers d'Euler sont identiques aux nombres pentagonaux $\frac{3k^2 \mp k}{2}$

Les a_n vérifient-ils une relation de récurrence ? Oui, car a_n est un polynome arithmétique. On sait en effet (1) que tout polynome arithmétique u_n de caractéristiques (d, g, p) (on précisera de suite cette notion) vérifie la relation de récurrence linéaire

$$\left\{(1 - u)^{d - g}\,(1 - u^p)^{g + 1}\right\} = 0$$

les accolades signifiant que dans le polynome développé on remplace toute puissance u^i par u_{n-i}.

Pour a_n de (2) le degré $d = 2$, le grade $g = 1$ (c'est-à-dire que n^1 est la plus haute puissance à coefficient périodique) et la pseudo-période $p = 2$ (plus petit commun multiple des périodes des coefficients). Donc :

$$\left\{(1 - a)(1 - a^2)^2\right\} = \left\{1 - a - 2a^2 + 2a^3 + a^4 - a^5\right\} = 0$$

et par suite :

Théorème 6

Les entiers d'Euler vérifient la relation de récurrence linéaire

$a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2a_{n-3} + a_{n-5} = 0.$

Quelle est la fraction génératrice de a_n ? On sait (1) que tout polynome arithmétique u_n de relation de récurrence $\left\{F(u)\right\} = 0$ est engendré par une fraction rationnelle $\frac{f(X)}{F(X)}$, où le degré de $f(X)$ est inférieur à celui de $F(X)$. Donc a_n est engendré par une fraction

$$\frac{f(X)}{(1 - X)(1 - X^2)} = 1 + X + 2X^2 + 5X^3 + 7X^4 + \dots + a_n X^n + \dots$$

où le polynome $f(X)$ est du 4e degré au plus. On en déduit facilement

$$f(X) = 1 - X^2 + 3X^3 + X^4$$

d'où :

Théorème 7

Les entiers d'Euler sont engendrés par la fraction rationnelle

$$\frac{1 - X^2 + 3X^3 + X^4}{(1 - X)(1 - X^2)^2} = 1 + \sum_{n > 0} a_n X^n$$

III. Applications

1) Partitions d'entiers.

Nous allons démontrer la proposition suivante :

Théorème 8

Soient p et i respectivement les nombres de partitions d'un entier en un nombre pair ou impair d'entiers inégaux. Alors $p = i$, sauf pour les entiers d'Euler. Pour un tel entier de rang n, $p = i + [-1,-1,1,1]$, la variable du crochet périodique étant n.

Corollaire

Le nombre de partitions d'un entier en parts inégales est pair, sauf pour les entiers d'Euler.

Le coefficient C_N dans la série entière

$$(1 - X)(1 - X^2)(1 - X^3)\ldots = 1 + C_1X + C_2X^2 + \ldots + C_NX^N + \ldots$$

est le même que celui de X^N dans le polynome

$$(3) \qquad (1 - X)(1 - X^2)(1 - X^3) \ldots (1 - X^N) = 1 + C_1X + C_2X^2 + \ldots + C_NX^N + X^{N+1}P(X).$$

Or en effectuant le produit (3) sans réduire les termes semblables, on obtient avec le coefficient (+1) tout X^N dont l'exposant se présente comme partition de N en un nombre pair de termes inégaux et avec le coefficient (−1) tout X^N dont l'exposant est obtenu comme partition de N en un nombre impair d'entiers distincts. Donc $C_N = p - i$, qui d'après (1) vaut $\varepsilon_n = [-1,-1,1,1]$ ou 0, suivant que N est entier d'Euler ou non.

<u>Remarques</u>

1) Quoique le théorème 8 résulte presque immédiatement de l'identité (1), il semble que Legendre ait été le premier à l'énoncer (2).

2) A présent les grandes lacunes de la série (1) s'expliquent : elles traduisent simplement le fait qu'en général les partitions d'un entier en un nombre pair ou impair de termes inégaux s'équilibrent.

2) <u>Fonction σ (n) d'Euler</u>

On désigne habituellement par σ (n) <u>la somme des diviseurs de l'entier n.</u> Ainsi $\sigma(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$. Voici les premières valeurs de σ (n) :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
σ (n)	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18	12	28	14	24	24	31

Les nombres premiers sont évidemment caractérisés par $\sigma(p) = p + 1$. <u>Pour des nombres premiers inégaux</u> $p_1, p_2, \ldots, p_r$ <u>la fonction σ (n) est multiplicative,</u> c'est-à-dire

$$\sigma(p_1 p_2 \ldots p_r) = \sigma(p_1)\sigma(p_2) \ldots \sigma(p_r)$$

On le voit aisément en effectuant le produit $(1 + p_1)(1 + p_2) \ldots (1 + p_r)$ du second membre. Plus généralement

$$\sigma(p_1^{\alpha 1}\, p_2^{\alpha 2} \ldots p_r^{\alpha r}) = \sigma(p_1^{\alpha 1})\ (p_2^{\alpha 2}) \ldots\ (p_r^{\alpha r}).$$

A propos du tableau des σ (n) Euler observe : "L'irrégularité de la suite des nombres premiers s'y trouve entremêlée (...). Il semble même qu'il y ait ici beaucoup plus de bizarrerie." Et pourtant il y a découvert une loi :

<u>Théorème 9</u>

<u>La fonction σ (n) vérifie la relation récursive</u>

$$(4) \quad \sigma(n) = \sigma(n-a_1) + \sigma(n-a_2) - \sigma(n-a_3) - \sigma(n-a_4) + \ldots, \text{ par convention } \sigma(k) = \begin{cases} n & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Les a_i sont les entiers d'Euler et les signes sont alternés par couples de termes.

Exemple : $\sigma(7) = \sigma(6) + \sigma(5) - \sigma(2) - \sigma(0) = 12 + 6 - 3 - 7 = 8$.

Voici l'ingénieuse démonstration du maître.

Prenons la dérivée logarithmique des deux membres de (1) et multiplions la par (−X) :

$$Y = \frac{X}{1-X} + \frac{2X^2}{1-X^2} + \frac{3X^3}{1-X^3} + \ldots = \frac{X + 2X^2 - 5X^5 - 7X^7 + \ldots}{1 - X - X^2 + X^5 + X^7 \ldots} = \frac{N}{D}.$$

Développons les fractions du premier membre en série entière :

$$\begin{aligned}
Y = x &+ x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + \ldots \\
& 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + 2x^8 + \ldots \\
& 3x^3 + 3x^6 + \ldots \\
& 4x^4 + 4x^8 + \ldots \\
& 5x^5 + \ldots \\
& 6x^6 + \ldots \\
& 7x^7 + \ldots \\
& 8x^8 + \ldots
\end{aligned}$$

où

$$Y = \sigma(1)X + \sigma(2)X^2 + \sigma(3)X^3 + \sigma(4)X^4 + \ldots$$

La relation 0 = YD − N s'écrit donc

$$\begin{aligned}
0 = \sigma(1)x &+ \sigma(2)x^2 + \sigma(3)x^3 + \sigma(4)x^4 + \sigma(5)x^5 + \sigma(6)x^6 + \sigma(7)x^7 + \ldots \\
&- \sigma(1)x^2 - \sigma(2)x^3 - \sigma(3)x^4 - \sigma(4)x^5 - \sigma(5)x^6 - \sigma(6)x^7 + \ldots \\
&- \sigma(1)x^3 - \sigma(2)x^4 - \sigma(3)x^5 - \sigma(4)x^6 - \sigma(5)x^7 + \ldots \\
&+ \sigma(1)x^6 + \sigma(2)x^7 + \ldots \\
&- x - 2x^2 + 5x^5 + 7x^7 + \ldots
\end{aligned}$$

En annulant le coefficient de X^n au second membre on trouve la relation (4). On le voit facilement en regardant comment s'obtient par exemple le coefficient de X^7.

Signalons une proposition d'Euler qui ressemble étrangement à la précédente. Elle concerne le nombre de partitions de n, dont voici les premières valeurs :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
p(n)	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231

Théorème 10

Le nombre p(n) de partitions de n, répétitions admises, vérifie la relation récursive

$$p(n) = p(n-a_1)+p(n-a_2)-p(n-a_3)-p(n-a_4)+\dots, \text{ par convention } p(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

Les a_i sont les entiers d'Euler et les signes sont alternés par couples de termes.

Cette formule résulte immédiatement du fait déjà mentionné que p(n) est engendré par $\frac{1}{\Pi(X)}$.

N'est-ce pas fabuleux que deux êtres aussi disparates que σ_n, la somme des diviseurs de n, et p_n, le nombre de ses partitions, suivent la même loi récursive, à un détail près ($\sigma(0) = n$, $p(0) = 1$) ?

Ramanujan a montré que $p(5k - 1) = 0$, modulo 5. J'ai trouvé un résultat analogue pour $\sigma(n)$:

Théorème 11

Tout $\sigma(3k - 1)$ est multiple de 3

Abrégeons la notation "A = B, modulo 3" en l'écrivant $A \equiv B$. Désignons par p ou q un nombre premier N autre que 3, suivant que $N \equiv -1$ ou $N \equiv 1$.

La décomposition en facteurs premiers de $n = 3k - 1$ est de la forme

$$n = 3k - 1 = (p_1^{\alpha 1}\, p_2^{\alpha 2} \dots p_r^{\alpha r})(q_1^{\beta 1}\, q_2^{\beta 2} \dots q_s^{\beta s}) = PQ.$$

De $n \equiv -1$ et $Q \equiv 1$ il résulte $P \equiv -1$ et donc $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$ impair.

Il y a donc au moins un α_i, soit α, impair et par suite

$$\sigma(p^{\alpha}) = 1 + p + p^2 + \dots + p^{\alpha} \equiv 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{\alpha} \equiv 0$$

Or, on sait que

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{\alpha 1})\, \sigma(p_2^{\alpha 2}) \dots \sigma(p_r^{\alpha r}) \times \sigma(q_1^{\beta 1})\sigma(q_2^{\beta 2}) \dots \sigma(q_s^{\beta s}).$$

Par suite $\sigma(n) \equiv 0$, car dans ce produit le facteur $\sigma(p^{\alpha}) \equiv 0$.

Remarques

1) On voit de même que $\sigma(n)$ est multiple de 3, si et seulement si la décomposition de n en facteurs premiers présente au moins une puissance de la forme $(3k - 1)^{2k'+1}$ ou $(3k + 1)^{3k-1}$.

2) Liouville a montré que $\sigma(n)$ est pair, sauf si n est un carré ou le double d'un carré.

Pour finir je voudrais vous lire et commenter un texte d'Euler, qui montre, avec une charmante fraîcheur, d'une part son enthousiasme pour son étonnante formule (4) et d'autre part le mystère qui entourait encore pour lui les entiers d'Euler :

"On sera d'autant plus surpris de cette belle propriété, qu'on ne voit aucune liaison entre la composition de ma formule et la nature des diviseurs sur la somme desquels roule la proposition. La progression des nombres 1,2,5,7,12,15, ... ne paraît pas seulement avoir nul rapport au sujet dont il s'agit, mais, comme la loi de ces nombres est interrompue et qu'ils sont mêlés de deux progressions différentes, à savoir 1,5,12,22,35,51, ... et 2,7,15,26,40, 57, ..., il semble presque qu'une telle irrégularité ne saurait trouver lieu dans l'Analyse."

Ainsi Euler s'étonne que a_n prenne ses valeurs dans deux progressions différentes, plus précisément dans deux trinômes du second degré. Or, contrairement à ce qu'il pense, on rencontre fréquemment en analyse des suites d'entiers qui prennent leurs valeurs dans plusieurs polynomes : ce sont les polynomes arithmétiques, qui ont tous une fraction rationnelle génératrice et vérifient une relation de récurrence linéaire. Il est piquant de constater que de telles suites se présentent en particulier dans une question dont justement Euler s'est occupé : la partition d'un entier en parts de valeurs données. En voici un exemple concret : de combien de manières peut-on partager un ensemble de n objets identiques en lots de 12, 13 et 17 pièces ? Cela revient à trouver le nombre j_n de solutions non négatives de l'équation diophantienne

(5) $\quad 12X + 13Y + 17Z = n.$

Ces partitions sont régies par un théorème très général, dont la première partie est due à Euler :

<u>Théorème 12</u>

<u>Le nombre j_n de solutions non négatives de l'équation diophantienne à coefficients entiers positifs</u> $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i X_i = n$ <u>est engendré par la fraction</u>

$$\frac{1}{(1-t^{\alpha_1})(1-t^{\alpha_2})\dots(1-t^{\alpha_r})} = \sum_{n\geqslant 0} j_n t^n$$

<u>La fonction j(n) est un polynome arithmétique qui a pour degré $r-1$, pour grade $m-1$, m étant le nombre maximum de α_i ayant un diviseur commun autre que 1, et pour pseudopériode le plus petit commun multiple des α_i (1).</u>

Ainsi pour l'exemple (5) j_n est un polynome arithmétique de caractéristiques (2,0,2652). Plus précisément on sait (1) que j_n vérifie une relation de la forme

$$2(12\times 13\times 17)j_n = n^2 + (12+13+17)n + u_n$$

où u_n est un nombre de période $12\times 13\times 17 = 2652$. Le nombre j_n prend donc ses valeurs non pas dans 2 mais dans 2652 trinômes du second degré.

Vous pensez sans doute que les 2652 composantes de u_n sont longues à calculer et l'expression de j_n longue à écrire. Il n'en est rien. Le calcul de u_n prend exactement 5 secondes, car il se fait par ordinateur (avec le programme de résolution d'un système d'équations linéaires, dont dispose tout centre de calcul) et j_n s'écrit

$$j_n = \left\| \frac{n^2 + 42n + 100(A_n - B_n)}{5304} \right\|$$

où

$$A_n = \left[5,21,25,17,-2,17,25,21,5,30,42,42,30\right]$$

$$B_n = \left[-2,17,6,17,-2,0,24,17,33,17,24,0\right]$$

ont respectivement 13 et 12 composantes ; les doubles barres désignent l'entier le plus proche.

E. EHRHART,
Strasbourg.

(1) E. Ehrhart - Polynomes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire, Birkhäuser, Bâle, 1977

(2) A.M. Legendre - Théorie des nombres, 1830

(3) L. Euler - Opera Omnia, série 1, Vol. 2, p. 241-253