Notion de tangente à une courbe

chez les élèves de seconde

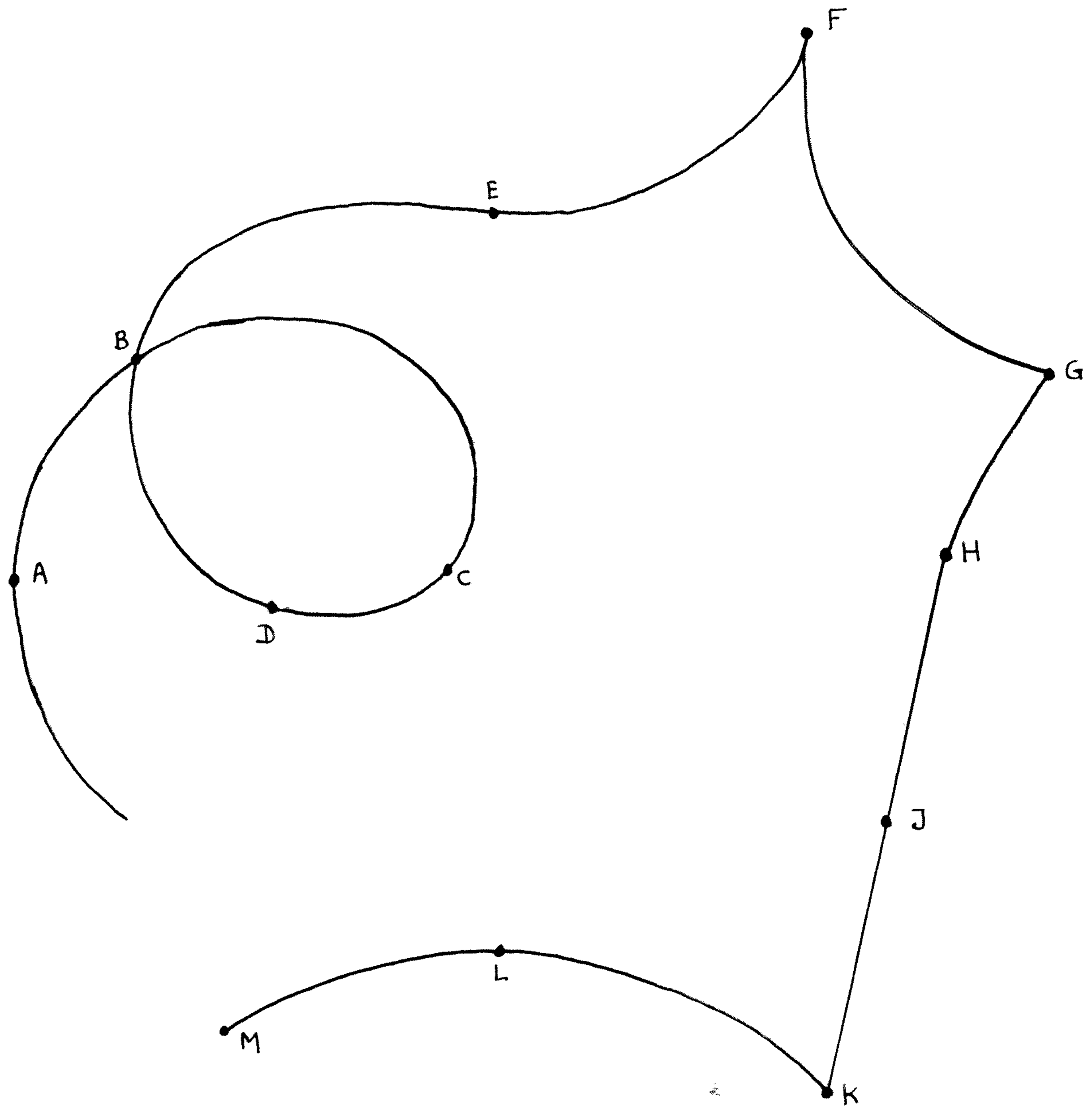
I - Introduction

Les nouveaux programmes de physique pour la classe de seconde amènent à parler du vecteur-vitesse dès le début de l'enseignement de la mécanique. Cette grandeur nécessite chez l'élève une notion, au moins vague , de la tangente, en un point, d'une ligne. Cette notion n'a été vue dans le passé scolaire des élèves de seconde que dans le cas du cercle, où la tangente est perpendiculaire au rayon et coupe le cercle en un point et un seul. Elle ne sera vue en mathématiques qu'en première (tangentes à la représentation graphique d'une fonction numérique) et en terminale (fonctions vectorielles). Or, l'une au moins des présentations possibles du vecteur-vitesse en seconde (ou du moins, une propriété du vecteur-vitesse que l'on ne saurait passer sous silence) s'appuie sur une certaine connaissance de la tangente. D'où l'idée de chercher à savoir ce qu'en savent déjà les élèves de seconde, d'une manière intuitive et visuelle. (Une tout autre question, très importante à mon avis, serait d'étudier la manière d'utiliser les connaissances acquises en seconde en physique, pour enseigner en première en mathématique, les dérivées et leur interprétation géométrique). Monsieur Monnin, professeur de mathématiques, participant au groupe Math-Physique, a lancé dans cet esprit le test ci-joint, invitant de nombreux collègues à le suivre. C'est ainsi que nous avons recueilli plus de 300 réponses d'élèves de seconde, nous donnant une idée assez précise du degrè auquel ils possèdent ou ne possèdent pas la notion de tangente. Pour faire un travail relativement scientifique, il aurait fallu s'accompagner d'un certain nombre de précautions et mieux dominer certaines variables, (en particulier : par rapport au cours de physique, à quel moment a été passé le test ...) ce qui n'a pas été le cas. Peu importe, l'enseignement à tirer de ces réponses nous paraît loin d'être négligeable et nous permet d'énoncer quelques hypothèses qui feront peut-être l'objet d'une vérification plus sérieuse.

II - Le test posé

Le texte : La figure ci-dessous présente une ligne sur laquelle certains points sont marqués. Pour chacun des points marqués, demandez-vous s'il existe une ou plusieurs droites qu'on peut appeler "tangentes à la ligne en ce point" ; si vous pensez que oui, tracez cette droite dans la figure à la règle ; si vous pensez qu'il n'y en a pas, dites pourquoi au verso.

Le dessin : Voir ci-après le dessin le plus courant. (Il y a eu d'autres dessins, d'autres questions ...)



III - Etude des réponses

1) Quelques généralités

* il n'y a aucune différence significative entre un type de seconde et un autre (A , AB , C , T . . .)
* deux élèves sur trois (est-ce peu ? est-ce beaucoup ?) possède une notion qui n'est pas trop éloignée de celle de tangente à une courbe ; un élève sur trois

~~en~~ a une idée vague ou fausse ...

* à travers les réponses écrites au verso de la feuille, on peut constater une fois de plus le niveau d'expression très très faible et un manque total de précision dans le langage. Sans vouloir insister ici sur cet aspect des choses, voici quelques exemples :

    " il y a une infinité de tangentes, car à chaque point , nous pouvons tracer un cercle "

    " E n'a pas de tangente car il ne se trouve pas sur une droite en forme de cercle "

    " Je pense que pour les points E F G H J K M on ne peut pas tracer de droite qu'on appelle tangente car cette droite ne se trouve pas sur la même ligne et cette droite ne touche pas la ligne sur le même côté "

    " Il n'y a pas de tangentes à la droite aux points B C D E H J L car les tangentes à ces points coupent la droite."

    . . . .

2) Etude par type de difficultés

Un premier dépouillement des réponses nous a amené à regrouper les différents points de la ligne de la manière suivante :

type I : A , C , D , L : ils permettent de déceler s'il y a déjà une certaine notion du concept de tangente.

type II : M : extrémité de la courbe

type III : B : point double, deux "tangentes"

type IV : F , K , G :(et H suivant le dessin de départ) point anguleux ou de rebroussement.

type V : E (sauf sur l'un des dessins) point d'inflexion

type VI : J (et parfois H) point sur un segment de droite.

résultats (approchés) en pourcentage sur l'ensemble des réponses exploitées :

type	I	II	III	IV	V	VI
réussite en %	70	25	20	5	10	10

Ce qui permet de classer par ordre de difficulté les différents cas présentés.

résultats un peu plus fins (en %)

Le tableau ci-après permet de préciser un peu le type de difficulté rencontrée.

	I	II	III	IV	V	VI
pas de réponse	16	38	40	39	67	72
réponse fausse	9	34	24	47	16	15
réponse en partie juste	7	2	16	9	8	2
réponse juste	68	26	21	6	9	12

* point d'inflexion et point sur une portion de droite : ils laissent perplexe, sans idée ; l'élève a du mal à concevoir une tangente en de tels points.
* point double : la voie est ouverte pour y saisir "les tangentes".
* point à l'extrémité ou point anguleux... : c'est là qu'il y a le plus de réponses fausses ; ce sont certainement les points les plus révélateurs de la notion que possèdent les élèves ; ce seront les plus durs "à faire comprendre".

3) Etude de la stratégie susceptible d'avoir été utilisée par l'élève

Plus intéressante peut-être est la recherche de stratégies utilisées par les élèves pour répondre. Dans ce domaine, l'interprétation subjective des auteurs du dépouillement est nettement présente, mais s'appuie sur de nombreuses remarques d'élèves s'expliquant sur leur manière de procéder.

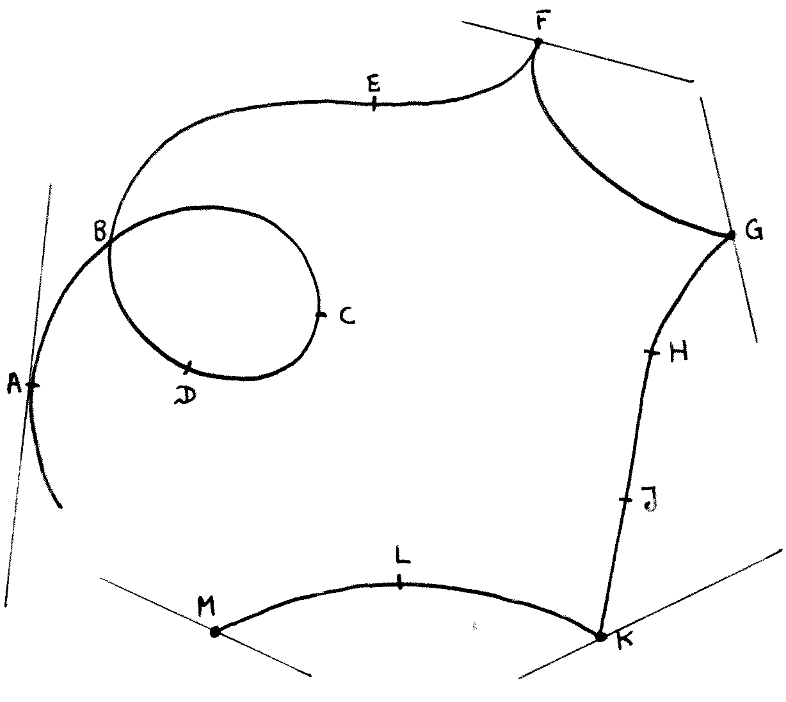
1º) Stratégie extérieure

Pour ces élèves, la tangente est une droite située de telle manière

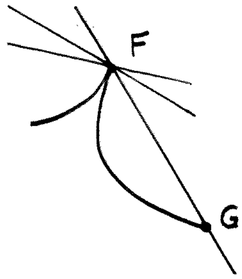
. Qu'elle touche la courbe

. et que la courbe se trouve tout entière d'un même côté de la droite.

remarque : dans certains cas, cela donne bien la tangente !



Beaucoup d'élèves tracent d'ailleurs plusieurs tangentes :

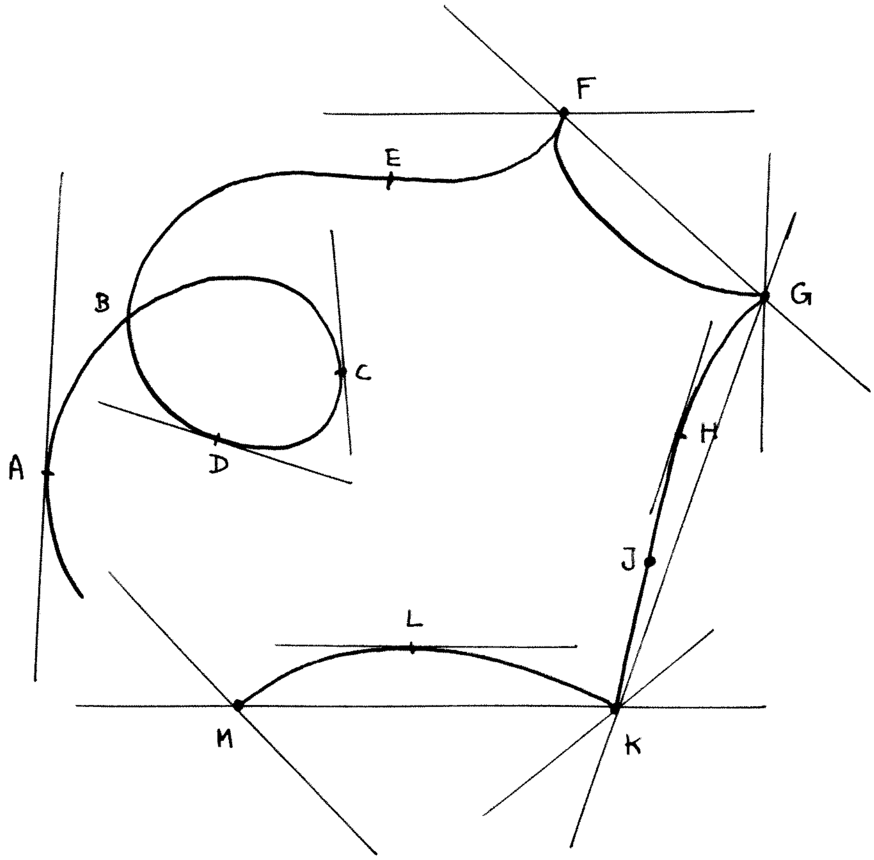


2º) <u>Stratégie localement extérieure</u>

La tangente est ici une droite située de telle manière

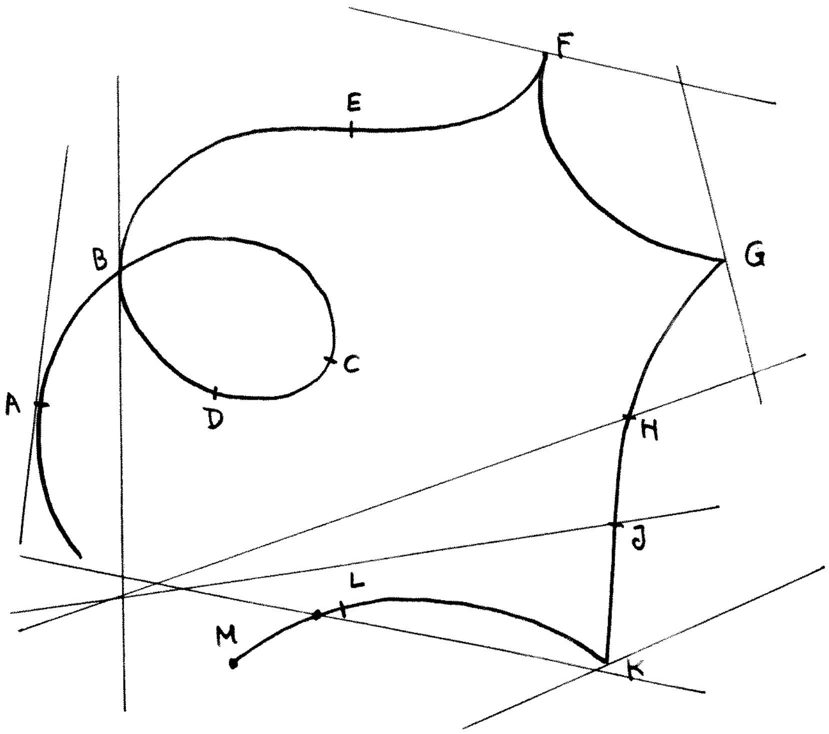
. Qu'elle touche la courbe

. et que la courbe se trouve "toute entière", au voisinage du point considéré, du même côté de la droite.

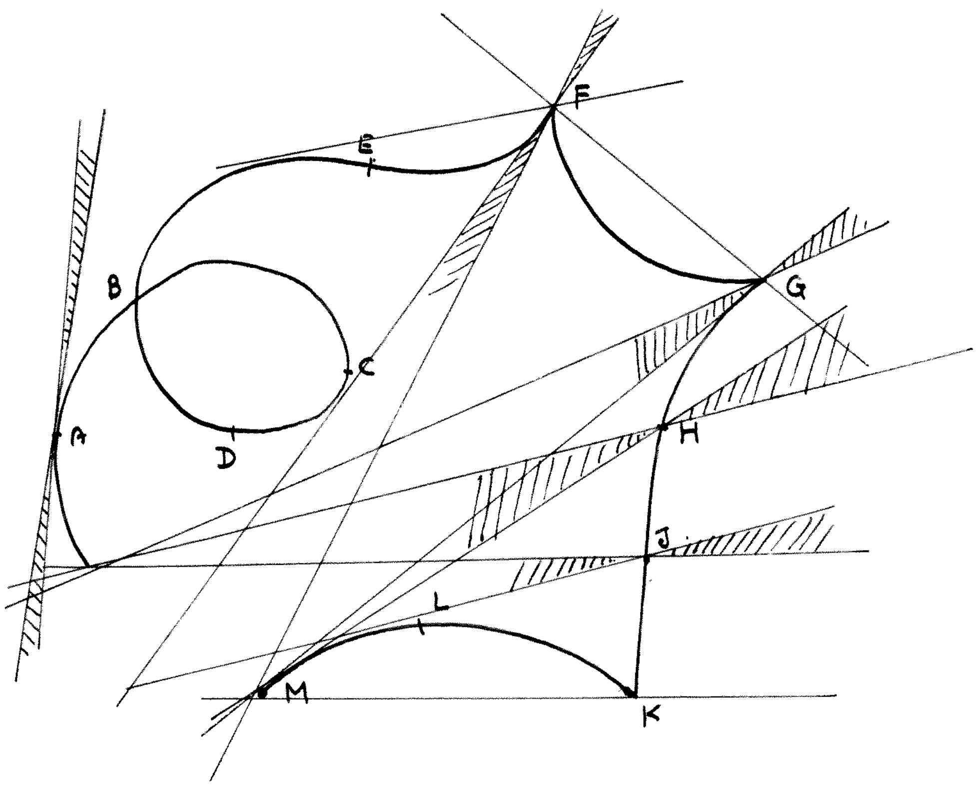


3º) <u>Stratégie du point unique</u>

La tangente est ici une droite qui rencontre la ligne en un seul point. Il est remarquable de constater à quel point certains élèves ont appliqué "cette règle" avec rigueur. Certains élèves ont même, pour chacun des points proposés, cherché toutes les droites qui ne rencontre la ligne qu'en ce point, et les résultats obtenus sont très surprenant à première vue. Que penser de telles réponses ? ... voilà au moins des élèves qui savent appliquer avec précision une règle !



stratégie du point unique



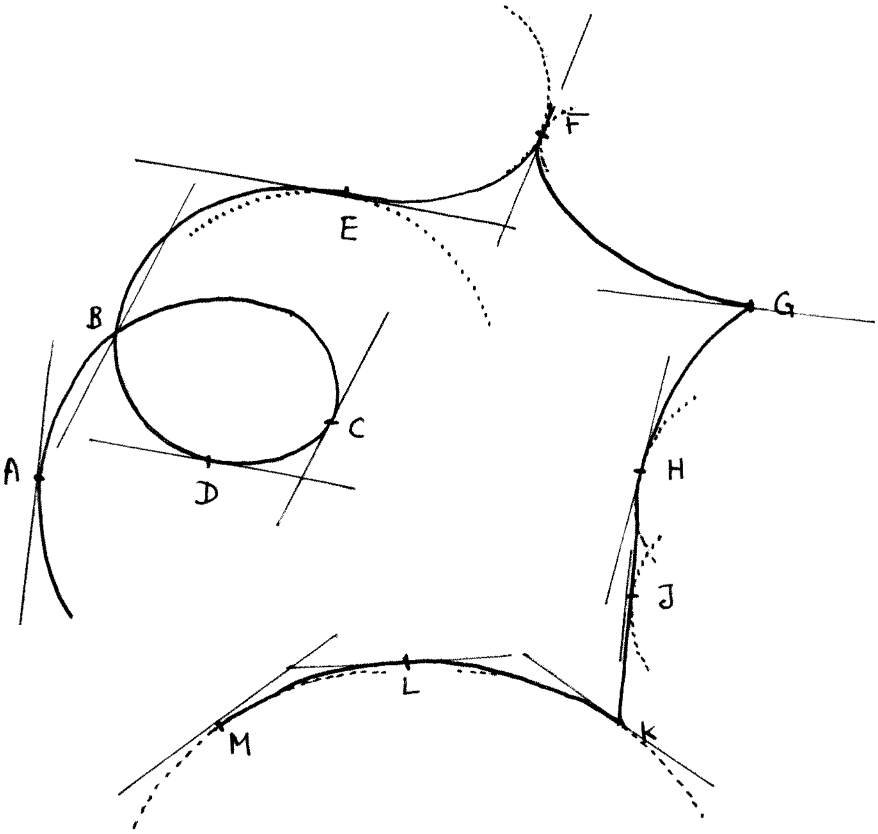
stratégie complexe, presque complète, du point unique

4º) <u>Stratégie du tout est donné</u>

Une tangente est une droite qui passe par deux points marqués de la figure. Bien que rare, ce type de réponse se rencontre d'une classe à l'autre ... On imagine le résultat obtenu par l'élève appliqué ou farceur qui dessine toutes les droites joignant deux des points marqués ...

5º) <u>Stratégie du cercle</u>

Au point considéré, on peut tracer une tangente à la ligne ou pas, suivant que, au voisinage de ce point, la ligne a une forme suffisamment semblable à un cercle ou pas. A l'appui de ce principe, certains élèves, pour tracer la tangente, ont préalablement tracé un cercle auxiliaire (et parfois même le rayon correspondant).

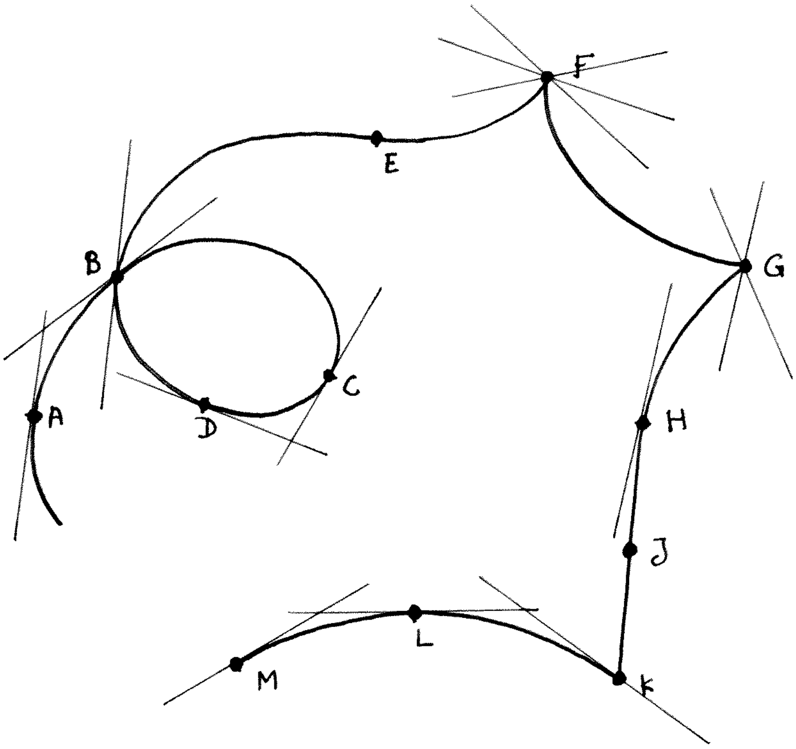


Remarque d'un élève n'ayant donné aucune droite :

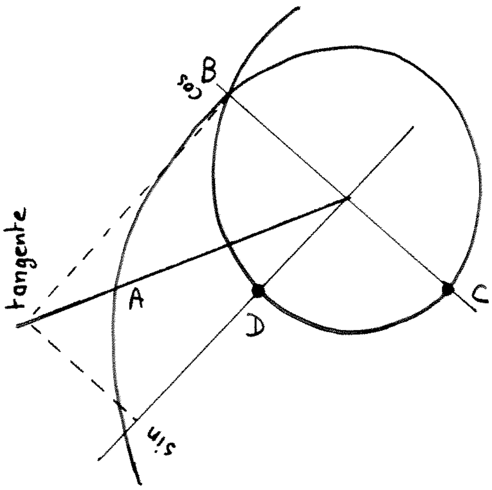
"Si le dessin a été tracé à main levé il est impossible d'avoir un cercle parfait donc impossible d'avoir une tangente".

6º) <u>Vers une certaine notion correcte</u>

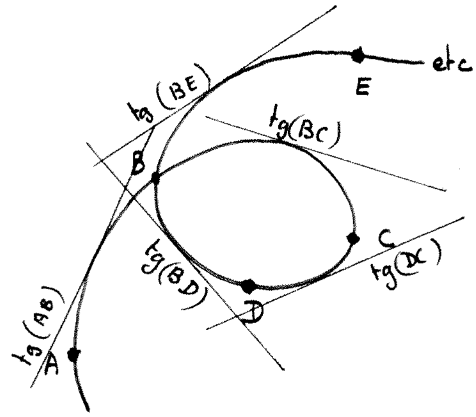
Les droites tracées montrent que, chez ces élèves, une certaine notion est présente, mais avec des erreurs (en F par exemple) ou des interdits (E et J par exemple).



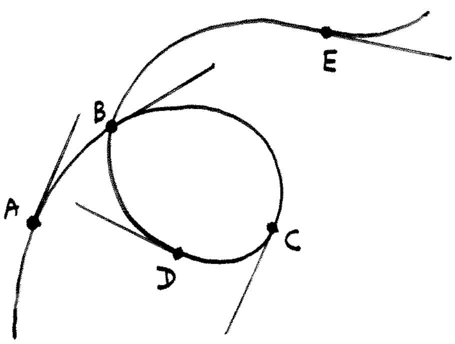
7º) Quelques particularités :



7.1) sans commentaire

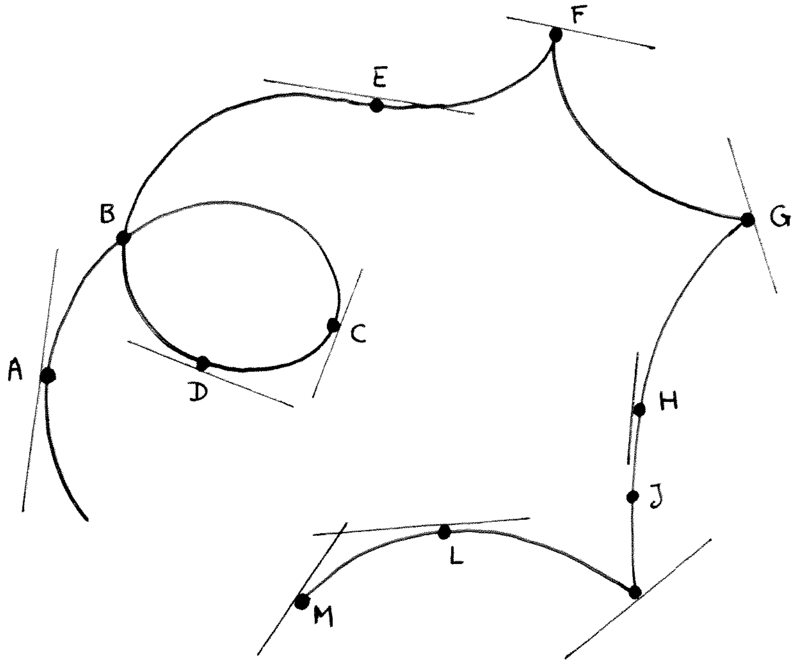


7.2) un extrait de la réponse d'un élève qui sait bien dessiner des tangentes.



7.3) demi-tangentes (souvenir de la notion de vecteur-vitesse ?)

7.5) Devinez cette dernière stratégie ... Elle nous en apprend beaucoup sur les évidences qui n'en sont pas pour tout le monde ...



IV - Une conclusion possible : Vers une pédagogie de l'apprentissage de la notion de tangente.

Là, comme ailleurs et plus qu'ailleurs, il est impossible de penser qu'une définition permette de faire acquérir la notion. Et quelle définition prendre ? Et pour être rigoureux il faudrait d'abord définir courbe, point d'une courbe,... et on en connaît les difficultés. Cependant ceci ne doit pas être un obstacle à une première approche, aussi précise que possible, de la notion de tangente, d'autant plus que celle-ci intervient dans l'enseignement de la physique : il s'agit donc d'une nécessité à laquelle doivent répondre également les professeurs de mathématiques, même si les actuels programmes ne les y incitent guère. Et il est possible d'imaginer, à partir de ce travail, une série de questions affinant progressivement la notion, à partir de ce que savent déjà les élèves, et en passant par leurs "bonnes" idées "fausses" et leurs hésitations. Si l'un d'entre nous s'y lançait, ces essais seraient favorablement accueillis....

Monnin et Meyer

Groupe Irem Math-Physique de Mulhouse

1978 - 79