Flammakuecha

QUELQUES RESULTATS DU SEMINAIRE ORGANISE PAR LE G.R.A.S.
SUR LES PROBLEMES DES STRUCTURES TOPOLOGIQUES DES TARTES FLAMBEES

Au mois de juin 1978, le Groupe de Recherches Appliquées de Strasbourg, avait organisé dans le cadre de l'IREM un séminaire sur la topologie des tartes flambées. Une quinzaine de spécialistes étaient attendus, mais hélas, il n'y eut que trois participants, qui n'hésitèrent pourtant pas à payer de leur personne et à étudier onze spécimens. C'est le fruit de leur recherche que je vous livre aujourd'hui.
N.B. Les démonstrations sont laissées au lecteur à titre d'exercice.

1. Topologie de la tarte flambée.

Définition 1.1. On appelle tarte flambée (TF) toute partie T de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie:

(i) T est incluse dans le plan d'équation $z = a$ (a est un réel donné);

(ii) T est convexe, fermée, de diamètre inférieur à 2.

Lemme 1.1. Toute TF est compacte et maigre, donc d'intérieur vide.

Remarque: les TF sont contenues dans des plans: elles ne sont pas forcément d'intérieur vide pour la topologie induite.

Définition 1.2. On dit qu'une TF est dégénérée si elle est maigre pour la topologie d'espace de Baire induite par $\mathbb{R}^3$ sur le plan $\{z = a\}$.

Exemples: $\emptyset$ et tout segment d'un plan horizontal sont des TF dégénérées.

Note: dans la suite, nous ne nous intéresserons pas aux TF dégénérées.

Lemme 1.2. L'intersection de deux TF est une TF. Il n'en est pas de même en général de la réunion.

Définition 1.3. Le nombre réel a est appelé prix de la TF. Si a est positif, on appelle valeur de la TF le produit de son aire par la racine carrée de son prix: $v(T) = A(t)\sqrt{a}$.
Si a est négatif, on dit que la TF est imaginaire; on convient que sa valeur est le nombre complexe: $v(T) = A(T)i\sqrt{-a}$.
Si $a = 0$, on dit que la TF est gratuite; sa valeur est alors nulle, quelle que soit son aire.

Définition 1.4. On dit qu'une TF est maximale pour un prix donné si son aire est maximale.

Lemme 1.3. Les TF maximales sont les disques de rayon 1. La valeur maximale d'une tarte flambée non imaginaire de prix a positif est donc $\pi\sqrt{a}$.

Définition 1.5. On pose $X(T) = \mathrm{Sup}\{x \in \mathbb{R} \mid (x,y,z) \in T\}$ et $Y(T) = \mathrm{Sup}\{y \in \mathbb{R} \mid (x,y,z) \in T\}$. Les vecteurs $s_1^T\ (X(T),\ Y(T),\ a)$; $s_2^T\ (X(T),\ -Y(T),\ a)$; $s_3^T\ (-X(T),\ -Y(T),\ a)$; $s_4^T\ (-X(T),\ Y(T),\ a)$ sont appelés <u>sommets</u> de la tarte flambée T.

Lemme 1.4. Si une TF contient ses quatre sommets, c'est un rectangle.

Lemme 1.5. Trois quelconques des sommets d'une TF sont linéairement indépendants. (+) Leur déterminant est égal à $-4aX(T)Y(T)$, quel que soit le choix. De plus, on a: $s_1^T + s_3^T = s_2^T + s_4^T$ ./ (+) sauf si $a = 0$ ou $X(T) = 0$ ou $Y(T) = 0$.

Remarque: l'enveloppe convexe des quatre sommets n'est pas forcément une TF; c'est vrai si et seulement si $X(T)^2 + Y(T)^2 \leqslant 1$.

Définition 1.6. On appelle <u>lardon</u> tout point d'une TF dont les coordonnées sont rationnelles; on appelle <u>oignon</u> tout arc continu d'une TF.

Remarque: toute TF est connexe par oignon.

Théorème 1.1. Si une tarte flambée est de prix irrationnel, elle est sans lardon. (on dit alors que c'est une TF irrationnelle). Sinon, l'ensemble des lardons est dense dans la TF.

Corollaire: une TF rationnelle est séparable.

Remarque: A l'exception de $\{0\}$, les TF ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Définition 1.7. On appelle <u>tarte flambée gratinée</u> (TFG) toute tarte flambée dans laquelle la multiplication (définie par $(x,y,z).(x',y',z') = (xx',yy',zz')$) est interne. On appelle <u>variété gratinée</u> l'ensemble des TFG.

Théorème 1.2. (de Brombeck): La variété gratinée est non vide. Pour qu'une TF appartienne à la variété gratinée, il faut que son prix soit 0 ou 1.

Exemple: les disques de centre 0 et de rayon inférieur à 1 sont des TFG.

Théorème 1.3. (de Girault): Si une TFG est gratuite et symétrique par rapport à 0, c'est un tonneau de $\mathbb{R}^3$. Il en est de même de la réunion d'une TFG gratuite et de son symétrique par rapport à 0, qui en général n'est pas une TF.

NB. Le séminaire s'est volontairement limité au champ réel et n'a pas considéré les TFG gratuites comme des parties du plan complexe. L'étude de l'intégration au sens de Cauchy dans les TFG gratuites fera l'objet d'une prochaine réunion de travail.

2. Topologie de l'espace des tartes flambées.

Définition 2.1. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des TF. On dit que deux TF sont <u>isoconsommables</u> si et seulement si elles ont même diamètre.

Lemme 2.1. L'isoconsommabilité est une relation d'équivalence dans $\mathcal{F}$.

Définition 2.2. On appelle tarte flambée spéciale (TFS) tout classe d'équivalence de l'isoconsommabilité. L'ensemble quotient s'appelle buerestuebel (noté $\mathcal{B}$).

Définition 2.3. On appelle diamètre d'une TFS le diamètre commun à tous ses éléments, noté $\delta(T)$.

Représentation des TFS: A tout diamètre δ , on associe le nombre $a = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}\delta$.

L'application ainsi définie est une bijection de $[0,2]$ sur $\overline{\mathbb{R}}^{+}$.

On représentera la TFS de diamètre δ par la TF T de prix $a = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}\delta$, et qui est l'enveloppe convexe fermée des quatre sommets s_1^T, s_2^T, s_3^T, s_4^T définis par:

$$X(T) = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\pi}\,\mathrm{Arctg}\ a} \qquad \text{et} \qquad Y(T) = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\pi}\,\mathrm{Arctg}\ a}$$

Cette TF est dite représentation canonique de la TFS de diamètre δ.

Son aire est $\frac{2(3+\sqrt{5})}{\pi}$ Arctg a; sa valeur est donc (a est positif):

$\frac{2(3+\sqrt{5})}{\pi}(\mathrm{Arctg}\ a)\sqrt{a}$.

Lemme 2.2. Les représentations canoniques des TFS sont des rectangles d'or; la TFS de diamètre 0 est gratuite et dégénérée; la TFS de diamètre 2 est de prix infini; son aire est égale à $3+\sqrt{5}$.

Convention: par abus de langage, la représentation canonique d'une TFS sera elle-même appelée"TFS de diamètre δ". Etant donné un diamètre ou un prix, il existe une unique TFS ayant ce diamètre et ce prix.

Définition 2.4. On munit le buerestuebel d'une métrique en posant:

$$d(T,T') = |\delta(T) - \delta(T')| \ .$$

Lemme 2.3. d est une distance sur $\mathcal{B}$. Muni de cette distance, $\mathcal{B}$ est borné.

Théorème 2.1. Muni de la topologie définie par cette distance, le buerestuebel est compact (donc complet) et connexe. L'application h de $\mathcal{B}$ dans $[0,2]$ qui à une TFS associe son diamètre est un homéomorphisme.

Définition 2.5. Un groupe topologique $(G,*)$ est appelé espace de Pfuhlgriesheim (ou espace pfuhlgriesheimien) si et seulement si:

(i) il est métrisable;

(ii) il existe un point I tel que I n'appartient pas à G et tel que:

- I soit absorbant pour l'opération $*$ qui prolonge celle de G sur $G \cup \{I\}$;
- $G \cup \{I\}$ est compact et connexe.

L'élément I est appelé absorbeur de l'espace G.

Définition 2.6. On définit sur l'opération $*$ par:

$T * U$ est la TFS V telle que $\delta(V) = \delta(T) + \delta(U) - \delta(T)\delta(U)$.

Lemme 2.4. Le prix de $T * U$ est égal à:

$$\frac{a + a' - (1 - aa')\,\mathrm{tg}(\frac{4}{\pi}\mathrm{Arctg}a.\mathrm{Arctg}a')}{1 - aa' + (a + a')\,\mathrm{tg}(\frac{4}{\pi}\mathrm{Arctg}a.\mathrm{Arctg}a')}$$

Lemme 2.5. La TFS I de diamètre 1 vérifie: quelle que soit T, $T * I = I$. Muni de cette opération, $\mathcal{B} - \{I\}$ est un groupe abélien. De plus, $*$ est continue.

Théorème 2.2. (de Bonnet): le buerestuebel, muni de sa métrique et de la structure de groupe définie ci-dessus, est un espace de Pfuhlgriesheim.

Ouf!

Bonnet & C^ie^