Mathématique dans le 1° cycle

Réunion-débat des professeurs de mathématique de la D.E.F.A, avec la participation de Monsieur SILVESTRE, Inspecteur Pédagogique Régional - BADEN-BADEN, le 28 mars 1979

Monsieur SILVESTRE a heureusement conçu cette journée d'information comme un débat au cours duquel les participants n'ont pas hésité à lui poser de nombreuses questions après qu'il eut fait le point sur l'évolution de la pédagogie des mathématiques pendant ces dernières années.

Mercredi matin

Monsieur SILVESTRE rappelle qu'en sixième-ciquième les notions ensemblistes interviennent dans la formation de l'intelligence, à partir de nombreuses activités consistant à classer, ordonner etc... Ces notions restent fondamentales, mais il ne faut pas les enseigner pour elles-mêmes.
L'enfant a une pensée syncrétique. C'est à nous, enseignants, de préciser les notions vagues qu'il a. Les notions ensemblistes doivent ainsi apporter de la rigueur à la pensée de l'enfant.
Par exemple, il faut l'amener à cerner le concept d'élément (qui n'est pas simple) : un point est élément d'une droite ou d'un plan, un droite est élément d'un faisceau de droites. Une droite peut donc être un ensemble ou un élément.
Voici quelques principes généraux permettant d'aider le professeur dans son enseignement pour le cycle d'observation (sixième et cinquième) :

1° Développer une pédagogie active qui se concentre sur la construction de la compréhension et donc écarter toute méthode dogmatique.

Un exemple type de cette méthode est celui du modèle de calcul à reproduire ; les enfants étant doués d'une faculté assez extraordinaire de mimétisme réussissent très vite ce genre d'exercice sans faire un effort de compréhension ; le résultat est, qu'après plusieurs semaines tout est à refaire ! Une approche de la formule $a^n \cdot a^p = a^{n+p}$ peut être par exemple le suivant :

1) faire construire une table de puissances

2) proposer des calculs tels que $2^3 \times 2^5 = 8 \times 32 = 256$

$$2^3 + 2^5 = 8 + 32 = 40$$

3)aboutir à la constatation que les résultats des calculs du premier type figurent toujours dans la table (supposée éventuellement prolongée) et chercher à comprendre pourquoi.

4) Rendre compte du résultat par la formule $a^n \times a^p = a^{n+p}$
En cinquième on ne peut guère aller au delà ; en particulier la pseudo-démonstration :

$$a^n \times a^p = \underbrace{(a \times a \times a \ldots \times a)}_{n \text{ facteurs}} \times \underbrace{(a \times \ldots \times a)}_{p \text{ facteurs}} = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n+p \text{ facteurs}}$$

risque surtout d'embrouiller les idées.

Le schéma général d'une leçon peut être le suivant :

- se fixer un objectif (un seul suffit pour une leçon)
- à partir des connaissances, imaginer des activités (susceptibles d'être diversifiées selon les niveaux) qui tendent à familiariser l'élève avec la notion à enseigner.
- faire une synthèse et une mise au net dans le cahier de cours
- compléter par des exercices d'application (contrôle de l'acquisition).

2° Le principe de liberté Il ne faut surtout pas voir dans le schéma précédent des recommandations impératives mais seulement une idée de l'orientation d'donner à l'enseignement en sixième et cinquième ; d'ailleurs les "Instructions" rappellent opportunément la liberté dont dispose le professeur pour organiser son cours et choisir sa méthode pédagogique "Le programme énumère les notions ... Le professeur n'est nullement tenu dans sa progression de respecter l'ordre dans lequel se trouvent énoncées les différentes rubriques... A propos de chaque question, le professeur aura choisi librement le mode de présentation qui lui paraîtra le mieux adapté au niveau de la classe..."

Cette liberté a des corollaires :

a) Le professeur doit se faire une idée de l'importance relative des notions et organiser sa progression en conséquence.
Ainsi la proportionnalité est une notion importante mais, précisément pour cela, il ne faut pas tenter de l'épuiser d'un coup, sinon on peut provoquer des blocages dûs à la lassitude. On a intérêt, au contraire, à y revenir plusieurs fois. La connaissance en mathématiques se développe en quelque sorte à la manière des perles, par superposition de couches successives.

b) Le professeur de mathématique est un enseignant de plus en plus responsable et on l'invite à prendre de la liberté avec son livre, en particulier si une notion y figure et ne paraît pas indispensable ou importante, qu'on se reporte au programme. Le pire des cours est celui qui suit le livre. Celui-ci est entre autre un instrument de référence ; c'est pourquoi, par exemple, la plupart des manuels de cinquième commencent par un chapitre "Révisions". C'est méconnaître la psychologie de l'enfant que de commencer un cours par un tel chapitre : l'enfant souhaite découvrir du neuf et on lui inflige du déjà vu !
Les révisions doivent être circonstancielles, c'est-à-dire être envisagées au moment où elles s'avèrent indispensables.

c) Le programme énumère des notions qui doivent être étudiées impérativement, même si certaines d'entre elles ne peuvent l'être que superficiellement ; si le professeur estime que, pour atteindre un objectif du programme, il doit parler d'une notion qui n'y figure pas, il peut le faire.

3° L'apprentissage de la notion de variable Les observations des psychopédagogues révèlent que la classe de cinquième correspond en général à une transition entre le "stade" concrêt et le "stade" formel ; notre enseignement doit donc être conçu pour favoriser cette transition. Depuis l'école élémentaire l'enfant est habitué à raisonner sur des objets qui lui sont familiers mais il est incapable, en général, de comprendre une démonstration mettant en oeuvre des objets représentés par des lettres ; le professeur doit être conscient qu'il y a là une difficulté ; il doit progresser lentement, multiplier les occasions de faire intervenir le concept de variable ; de ce point de vue les formules dans lesquelles les lettres représentent des nombres, les "programmes" de calcul sont importants ; par exemple les formules d'aires et de volumes ; pour la division euclidienne, traduire les résultats numériques par :

$$\begin{array}{c|c} D & d \\ \cline{2-2} r & q \end{array} \quad \text{et } d \times q \leq D < d \times (q + 1) \text{ ou } D = d \times q + r$$

selon la préoccupation qu'on a eue : encadrer par deux multiples consécutifs ou s'intéresser au reste.

A propos des puissances entières, procéder par étapes :

1° $2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots$ sont représentés par la formule 2^n

2° $1^5, 2^5, 3^5, 4^5, \ldots$ sont représentés par la formule a^5

3° $2^3, 4^5, 7^9, \ldots$ sont représentés par la formule a^n

et si un élève est capable d'imaginer l'une des ces formules, il mérite un encouragement !

4° <u>Le travail diversifié</u> La suppression des filières et l'hétérogénéité des classes obligent le professeur à abandonner le mythe d'amener tous les élèves d'une classe au niveau le plus élevé ; un travail diversifié s'impose où tout le monde peut participer et travailler au mieux de ses possibilités de manière à réaliser un objectif minimum.

Prenons deux exemples :

- Pour la division, ce minimum est la pratique opératoire puis, selon un ordre d'exigences croissantes, savoir reconnaître son usage dans un problème familier, comprendre sa signification (encadrement ...), enfin, parvenir à la compréhension des formules.
- Le partage d'un ensemble semble être une notion accessible à tous (avec des difficultés de vocabulaire toutefois ; usuellement, classer est synonyme de ranger et partition est synonyme de répartition équi-

table, celle de relation associée à cette partition (on "relie" deux éléments de l'ensemble chaque fois qu'ils sont dans la même part) est encore compréhensible par une bonne majorité des élèves, mais il peut se faire que quelques-uns seulement parmi ceux-ci parviennent à répondre à la question :

> on donne une relation dans un ensemble ; peut-elle servir à classer les éléments de l'ensemble ? (encore faut-il qu'on prenne la précaution de décrire, sur un exemple étudié en commun, la procédure de classement !)

5 Quelques conseils épars

1) Importance de la géométrie dans le cycle d'observation (entraînement au dessin et à la manipulation des instruments, familiarisation avec les figures usuelles et le vocabulaire indispensable, entraînement à l'observation, initiation au raisonnement...) aussi est-il vivement conseillé d'étaler son étude sur toute l'année (le conseil est d'ailleurs valable pour toutes les classes de collège !).

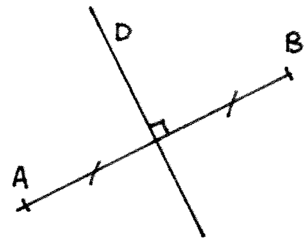
2) Le vocabulaire : les mots utilisés en mathématiques sont ceux du langage courant mais ils ont en mathématiques un sens très précis qui ne correspond pas toujours exactement à leur sens usuel ; c'est une source de difficulté et d'incompréhension. Plus généralement, il est souhaitable d'éviter tout vocabulaire qui ne paraît pas indispensable en sixième-cinquième (associativité, élément neutre, élément absorbant, réflexivité, transitivité, direction...)

   Une question de vocabulaire :
   - dans le plan, deux droites sont orthogonales ou perpendiculaires
   - dans l'espace, deux droites sont orthogonales
     une droite et un plan sont orthogonaux ou perpendiculaires
     deux plans sont perpendiculaires

3) Les définitions : elles ne sont pas indispensables dans le cycle d'observation où on peut s'en tenir à une simple description (exemples : intersection ou réunion de deux ensembles, droite et plans perpendiculaires...) Plutôt que d'entraîner les élèves à retenir une phrase qu'ils ne comprennent pas (et qu'ils oublieront d'ailleurs très rapidement !) il est préférable de

les exercer à reconnaître la situation en question ; une figure peut, pour cela, les aider grandement.

La droite D est la médiatrice du segment AB



4) Le devoir à la maison. L'un des objectifs de l'enseignement des mathématiques est d'entraîner les élèves à l'expression écrite ; cet entraînement commence dès la classe de sixième ; le devoir à la maison (au contraire de l'interrogation écrite) en constitue un moyen privilégié ; il est donc vivement souhaitable qu'un tel travail soit donné régulièrement. Dans le cycle d'observation le devoir doit être un exercice de rédaction (sans faute d'orthographe et avec une syntaxe correcte), bien présenté et très court :
quelques phrases en sixième, par exemple la mise en forme d'une question traitée en classe en cinquième ; dans tous les cas il doit pouvoir tenir sur une feuille simple.

Au cours du débat qui s'instaure, à certains qui ont la nostalgie du "niveau" et qui se plaignent de l'hétérogénéité des classes, d'autres opposent la nécessité de découvrir une pédagogie différenciée, possible à travers un enseignement conçu en termes d'activités.
Monsieur SILVESTRE révèle d'autre part que les futurs manuels de 4ème dérouleront le cours en prenant vraisenblablement comme fil conducteur une axiomatique dérivant de l'axiome de la médiatrice.
A une question qui lui est posée sur le danger que ne soit ainsi réintroduit l'enseignement d'une axiomatique, Monsieur SILVESTRE répond que ce n'est pas du tout l'esprit des nouveaux programmes.

Mercredi après midi

Monsieur SILVESTRE commente brièvement les nouveaux programmes de quatrième et de troisième en insistant sur les divergences profondes qui les différencient des anciens, puis il cède la parole à Monsieur AUGE, qui,

de par ses fonctions au Bureau National de l'A.P.M.E.P, a eu connaissance de ces programmes dès leur élaboration et a tenté d'en appliquer l'esprit au programme actuel de quatrième.
Monsieur AUGE indique d'abord qu'il a centré les activités qu'il va présenter sur trois idées sous-jacentes des nouveaux programmes :

1° abandon d'une présentation axiomatique, donc linéaire des contenus
- néanmoins, recherche de courtes séquences déductives,

2° importance de la résolution des problèmes

3° travail intersectoriel

Voci, résumées, quelques-unes de ces activités :

Puissances de 10, nombres décimaux, approche des réels

- manipulation sur les puissances à partir des changements d'unités
-utilisation de la calculatrice T 158 pour révéler de nouvelles écritures des puissances de 10 et des nombres décimaux :

Si l'on frappe les touches	1 EE 3	on lit	1 03	c'est-à-dire	10^3
" " " " "	1 EE 2	" "	1 -02	"	10^{-2}
" " " " "	54 EE 3	" "	54 03	"	54.10^3
" " " " "	54 EE 3	" "	5,4 04	"	$5,4.10^4$

Un élève détient la calculatrice, propose un calcul à la classe. Chacun se met au travail pour détenir à son tour la machine. Elle revient à un élève qui a trouvé le bon résultat. Il faut, bien sûr, veiller à ce que chacun puisse disposer de la calculatrice.

- utilisation des décimaux pour résoudre des problèmes simples concernant des périmètres, des surfaces, des pesées, des prix :

Objectifs : 1) Introduction progressive des concepts d'équation et d'inéquation.

2) Introduction du concept d'inverse d'un nombre décimal, puis de celui d'inverse d'un nombre.

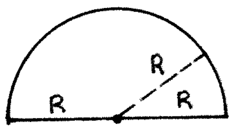
exemple : vous avez 18,70 f dans votre porte-monnaie. Un tour de manège coûte 2,5 F, mais vous devez garder 2,30 F pour retourner chez vous.

Combien de tours de manège pouvez-vous faire ?

$$x \cdot 2{,}5 + 2{,}3 \leq 18{,}70$$

certains élèves arrivent à résoudre de tels problèmes à l'aide de savoir-faire hérités de leurs études antérieures.

Il faut arriver à des problèmes où ces savoir-faire s'avèrent inopérants : exemple : un bassin a la forme d'un demi-cercle. Son périmètre est de 47 m. Quel est le rayon de ce cercle ? $\pi = 3{,}14$



$$2R + 3{,}14 \cdot R = 47$$

Dans le premier exemple, l'inverse de 2,5 est un nombre décimal ; sa manipulation est relativement aisée.

Dans le second cas la notion d'encadrement apparaît comme une nécessité, et des symboles tels 1/5,14 demandent plusieurs séances avant d'être acceptés.

Géométrie

L'objectif est le concept "vecteur" à partir de la notion de translation.

1° manipulation d'instruments :

règle, double-décimètre, équerre, compas, rapporteur.

Problème : imaginer des techniques permettant de mener par un point la parallèle à une droite

2° imaginer un procédé qui permettrait de faire correspondre à chaque point du plan un point du plan.

Ces deux thèmes ont demandé chacun trois heures. En particulier, la phrase de 2 a posé un problème de compréhension. Elle a dû être commentée, puis présentée dans un style plus familier avant de devenir opérationnelle.

Dans les deux cas les élèves étaient en situation de recherche. Toutes les techniques qu'ils imaginaient étaient prises en considération, soit pour être critiquées lorsqu'elles s'avéraient fausses, soit pour être évaluées qualitativement dans le cas contraire.

Inutile de préciser que, dans ces circonstances, le professeur doit parcourir d'énormes distances dans la classe !

Translation de flèche $\overrightarrow{AB}$

A et B sont dessinés distincts ; les cas "pathologiques" seront examinés plus tard. Le professeur présente une technique de translation, à la règle et à l'équerre, puis il demande d'en imaginer d'autres, avec n'importe quel instrument de dessin, y compris le double-décimètre et le compas.

- problèmes -

1° Peut-on faire des translations en utilisant qu'un seul instrument ?

2° Comment construire l'image d'un point de la droite AB par la translation de flèche $\overrightarrow{AB}$?

Le double-décimètre ou le compas s'imposent dans un premier temps. Imaginer une méthode qui, dans ce cas, n'utilise que la règle et l'équerre.

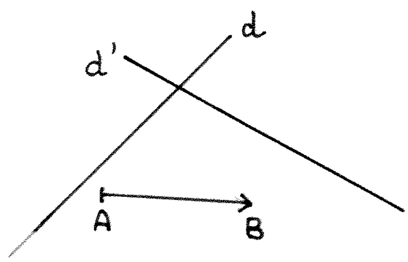
Ensuite furent dégagées, à partir de nombreux dessins, les deux propriétés :

1 - Toute droite parallèle à AB reste invariante par la translation de flèche $\overrightarrow{AB}$.

2 - Toute droite d non parallèle à AB est transformée par la translation de flèche $\overrightarrow{AB}$ en une autre droite d' parallèle à d.

- problème -

On donne deux droites sécantes d et d' et une flèche $\overrightarrow{AB}$. Trouver un point I sur d et un point J sur d' de telle manière que la translation de flèche $\overrightarrow{AB}$ transforme I en J.



L'objectif de ce problème était d'amener les élèves à parcourir une séquence déductive. Là encore il a fallu beaucoup de temps (trois heures en classe et de la recherche à la maison) pour s'acheminer vers la solution. Chacun croyait avoir trouvé. Le professeur devait réfuter les solutions proposées. Il suffisait, le plus souvent, de se placer dans un autre cas de figure.

Vecteur

Les multiples dessins réalisés, revus plusieurs fois d'une leçon à l'autre grâce au rétroprojecteur, les flèches de même couleur caractérisant la même translation, ont créé chez les élèves le sentiment que les flèches se classaient par couleurs, mais que la couleur n'était pas le critère

essentiel pour les classer. Le vecteur était tout proche, mais on ne pouvait pas le dessiner "car alors toute la feuille aurait été rouge".
La flèche $\overrightarrow{AB}$ servirait donc à la représenter.

L'INEGALITE TRIANGULAIRE (à partir de la quatrième) - Mr SILVESTRE

"L'analyse de situations et la résolution de problèmes jouent un rôle majeur. En particulier l'enseignement de la géométrie est indissociable de la recherche de constructions géométriques" (Instructions classes de quatrième et de troisième). Dans cette recherche l'inégalité triangulaire joue un rôle important ; de ce point de vue, il est utile que le professeur connaisse bien les deux propriétés suivantes :

1. Soit deux points A et B distincts d'une droite x'x ; pour tout point M du plan on a les équivalences :

$M \in [AB] \qquad AB = AM + BM$

$M \in Ax' \qquad AB = -AM + BM$

$M \in Bx \qquad AB = AM - BM$

$M \notin x'x \qquad |AM - BM| < AB < AM + BM$

2. Soit trois réels a, b, c donnés strictement positifs, les propositions suivantes sont équivalentes :

   1) il existe un triangle (éventuellement aplati) de côtés a, b, c
   2) le plus grand des trois réels a, b, c est au plus égal à la somme des deux autres,
   3) chacun des trois réels a, b, c est au plus égal à la somme des deux autres,
   4) l'un des trois réels a, b, c est compris entre la somme et la valeur absolue de la différence des deux autres.

Preuve : On a évidemment (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) ; démontrons (4) $\Rightarrow$ (1)

Soit par exemple $|b - c| \leq a \leq b + c$, c'est-à-dire
$b^2 + c^2 - 2bc \leq a^2 \leq b^2 + c^2 + 2bc$, d'où l'existence du réel k compris entre -1 et 1 tel que $a^2 = b^2 + c^2 + 2kbc$.

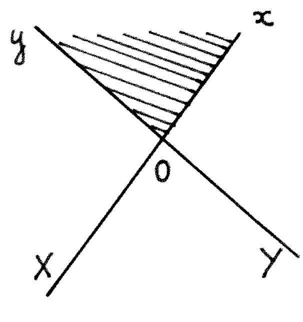
Prenons dans un repère orthonormé les trois points A,B,C tels que $A(0,0)$, $B(c,0)$, $C(-kb, \sqrt{1 - k^2}\,b)$; les côtés du triangle ABC ont pour mesures a,b,c.

LES ANGLES ET LEUR MESURE (classe de troisième, nouveau programme)

Il parait utile de revenir à une définition plus simple de l'angle dans les classes de collège. N'ayant pas à envisager la somme de deux angles, mais seulement celle de leurs mesures, on peut par exemple adopter la définition suivante :

soit deux demi-droites 0x et 0y de même origine 0 et de support des droites X et Y.

Si X et Y sont distinctes, on appelle angle des deux demi-droites 0x et 0y et on note $\widehat{x0y}$, l'intersection du demi-plan fermé d de frontière X contenant 0y et du demi-plan fermé de frontière Y contenant 0x.



Si $0x = 0y$ on pose $\widehat{x0x} = 0x$

Si 0x et 0y sont opposés, elles définissent deux angles plats ; ce sont les deux demi-plans fermés de frontière $0x \cup 0y$.

Autre notation :

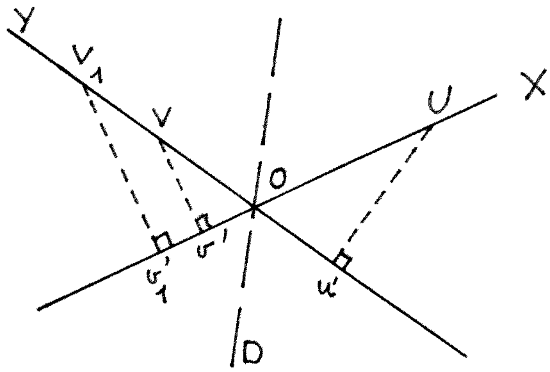
Si A et E sont deux points autres que 0 pris respectivement sur les demi-droites 0x et 0y, $\widehat{x0y}$ est encore noté $\widehat{A0B}$.

Mesure d'un angle en radians :

On suppose connue la mesure d'un arc de cercle ; la mesure en radians de $\widehat{x0y}$ est la longueur de l'arc $\widehat{x0y} \cap C$ où C est le cercle de centre 0 et de rayon 1.

DEFINITION DU PRODUIT SCALAIRE EN CLASSE DE SECONDE EN CONFORMITE AVEC LE PROGRAMME DE TROISIEME

Lemme : soit deux points U et V appartenant respectivement à deux axes X et Y ayant un point commun 0 soit u' (resp. v') la projection orthogonale de U (resp. V) sur Y (resp. X)



On a l'égalité :

$(\overline{0U})_X \cdot (\overline{0v'})_X = (\overline{0V})_Y \cdot (\overline{0u'})_Y$ (1)

Preuve :

si $(\overline{0U})_X = (\overline{0V})_Y$ on utilise la symétrie orthogonale s_D par rapport à l'axe de symétrie D des axes X et Y, sinon on se ramène à ce cas en envisageant $V_1 = s_D(U)$ et en appliquant la propriété de Thalès.

Remarques :

Les deux membres de l'égalité (1) conservent la même valeur

1° Si on remplace les axes X et Y par l'opposé de X ou l'opposé de Y.

2° Si on transforme la figure par une translation t (et même plus généralement par une isométrie), par exemple :

$(\overline{t(0)t(U)})_{t(X)} \cdot (\overline{t(0)t(v')})_{t(X)} = (\overline{0U})_X \cdot (\overline{0v'})_X$

On peut alors définir le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\overline{0U})_X \cdot (\overline{0v'})_X 0$

où $\overrightarrow{0U}$ et $\overrightarrow{0V}$ sont les deux représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'origine arbitraire 0, où X est un axe qui contient 0 et U et où v' est la projection orthogonale de V sur X.

On a alors immédiatement $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; les autres propriétés du produit scalaire s'établissent facilement.

L. AUGÉ