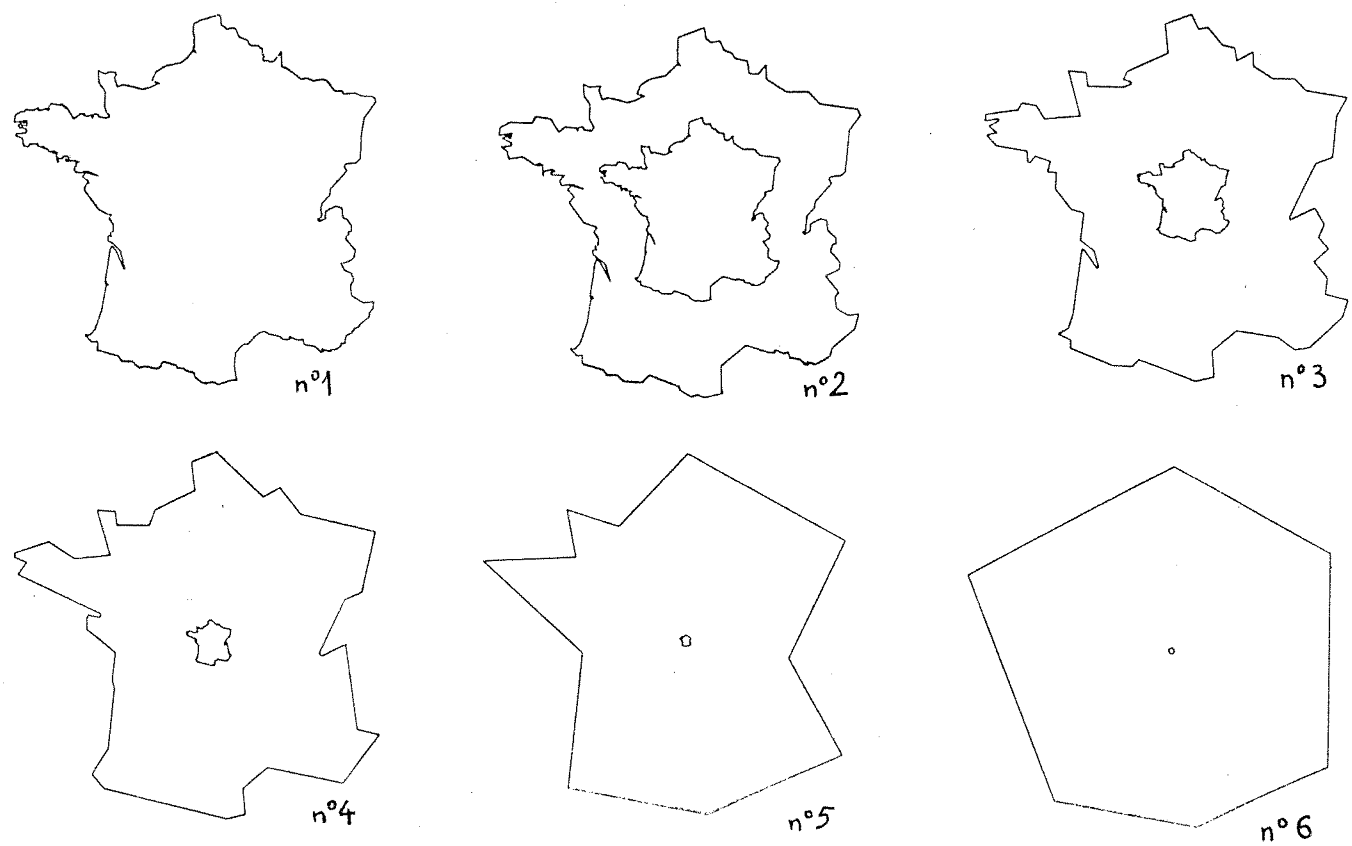
Un livre : Les objets fractals par Mandelbrot

En 1967, Mandelbrot publiait dans la revue "Science" un texte intitulé : "Combien mesure la côte de la Bretagne ?" Ce texte, ainsi que bien d'autres publications de l'auteur, est largement commenté dans le petit ouvrage publié chez Flammarion en 1975 : "Les objets fractals".

En quoi la longueur de la côte de la Bretagne (ou la longueur des frontières tant terrestres que maritimes d'un pays quelconque) a-t-elle à voir avec les mathématiques ? Le graphique ci-dessous (extrait de la revue du Palais de la Découverte nº 33) qui représente des cartes de la France continentale permet de comprendre les motivations de l'auteur. Quand l'échelle double, la longueur des frontières fran-



D'une carte à l'autre, l'échelle est diminuée de moitié, mais on a représenté un agrandissement de chaque carte à l'échelle initiale de façon à faire apparaître la perte des détails.

çaises augmente. Ainsi sur le dessin nº 6 la longueur est de 153 mm, sur le nº 5 elle est de 167 mm, sur le nº 4 de 193 mmm .... Imaginons que nous continuions à agrandir l'échelle de la carte. A chaque agrandissement nous pouvons prendre en compte des détails, des anfractuosités qui n'apparaissent pas sur la carte précédente et qui vont se traduire par une augmentation de la longueur totale.

Au lieu d'utiliser le processus d'une carte à différentes échelles, nous pouvons, et cela revient au même, modifier notre instrument de mesure : avec une "règle" de 1 km de long dont nous posons les extrémités en des points du rivage (ou de la frontière) nous obtiendrons une longueur moindre qu'avec une règle de 1 hm, ou de 1 dam .... Nous pouvons continuer jusqu'au centimètre, ce qui nous oblige à contourner chaque caillou, puis jusqu'au dixième de millimètre ce qui nous fait mesurer les détails sur un grain de sable ... Il n'y a aucune raison de nous arrêter et la longueur mesurée croit indéfiniment. (Mandelbrot explique dans son livre comment faire abstraction des marées). Finalement il semble que personne ne soit capable de donner la mesure de la longueur des côtes de Bretagne.

En 1953, Richardson a eu l'idée de reporter sur un graphique en coordonnées bilogarithmiques la longueur $L(\eta)$ de différentes frontières ou portions de rivage en fonction de η longueur de l'instrument de mesure utilisé. Il remarqua que les points obtenus s'alignaient sensiblement suivant des droites distinctes selon l'objet considéré et dont les pentes sont négatives. On peut donc écrire :

$$L(\eta) = A.\, \eta^{1-D}$$

avec $D \geqslant 1$ et de l'ordre de $1,3$. $D = 1$ correspond à la droite, au cercle,... bref, à des objets mathématiques usuels dont la longueur est bien connue et constante. (d'où l'intérêt de la notation $1-D$). Il est tentant d'interpréter D comme une dimension; la droite et le cercle ont bien la dimension 1. Mais qu'est-ce qu'une dimension <u>fractale</u> pour reprendre le mot forgé par Mandelbrot sur"fraction" ?

Pour mieux comprendre ce phénomène, nous allons nous intéresser à des cas beaucoup plus théoriques, mais aussi beaucoup plus simples.

<u>1) Vers la dimension d'homothétie</u>

Tout le monde est persuadé qu'un segment a la dimension 1, le rectangle la dimension 2, le cube 3 ...

* Considérons le segment $[0 , 1]$. Il peut être pavé par exactement $N = n$ parties de la forme $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$. Chaque partie de longueur $1/n$ est homothétique au segment initial dans le rapport $r(N) = 1/n$.
* Considérons le rectangle $[0 , X] \times [0 , Y]$. Il peut être pavé par exactement $N = n^2$ parties de la forme $\left[\frac{k-1}{n}X, \frac{k}{n}X\right] \times \left[\frac{k-1}{n}Y, \frac{k}{n}Y\right]$. Chaque partie d'aire XY/n^2 est homothétique au rectangle initial dans le rapport $r(N) = 1/n$.
* On généralise sans peine au cas du parallèlépipède qui est pavé par $N = n^3$ parties homothétiques au tout dans le rapport $r(N) = 1/n$.

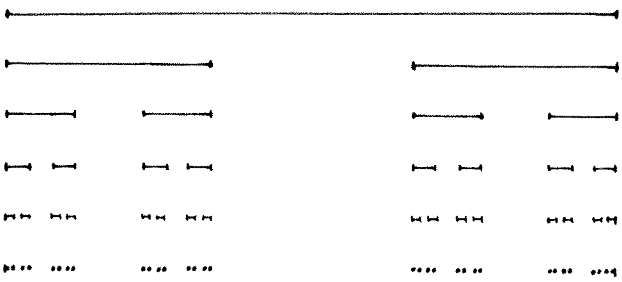
* Dans ces trois cas, on voit que la dimension peut être donnée par la formule :

$$D = -\frac{\text{Log } N}{\text{Log } r(N)} = \text{Log } N \ / \ \text{Log} \frac{1}{r}$$

Nous allons appliquer cette définition à différents ensembles qui se verront attribuer une valeur non entière comme dimension D.

2) Application à l'ensemble de Cantor

L'ensemble triadique de Cantor s'obtient de la façon suivante : On part du segment $[0 , 1]$ dont on ôte le tiers central $]1/3 , 2/3[$. On recommence le même procédé sur les deux segments restants et on itère indéfiniment le processus. On obtient alors un ensemble C d'intérieur vide dont tous les points sont des points d'accumulation (aucun point n'est isolé).



On peut facilement remarquer que $C \cap [0 , 1/3]$ est homothétique de C dans le rapport $1/3$ mais qu'il faut deux telles parties pour paver C . En conclusion on posera :

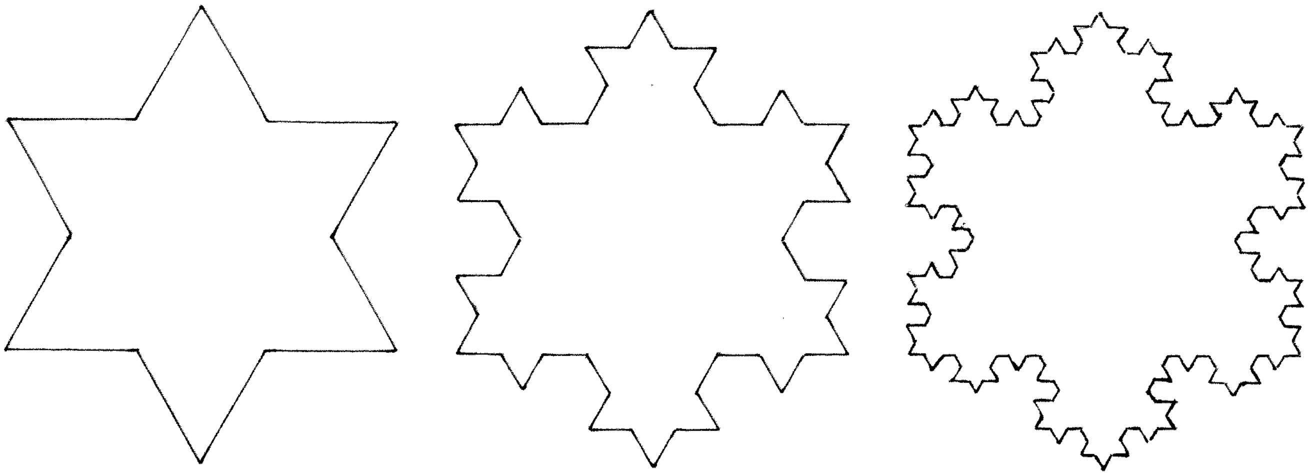
$$D(C) = \text{Log } 2 \ / \ \text{Log } 3 = 0,6309\ldots$$

3) L'éponge de Sierpinski

Il existe différentes formes de cette "éponge". Celle de la couverture est obtenue de la façon suivante : Partant d'un cube d'arête unité, on le divise en $3^3 = 27$ petits cubes identiques. On enlève le petit cube central ainsi que les six autres adjacents par une face. On recommence l'opération sur les 20 petits cubes restants et ainsi de suite. Chaque partie enlevée est un ensemble ouvert (c-à-d ne contenant pas le bord). A la limite on obtient un ensemble infiniment feuilleté, connexe (d'un seul tenant) qui a une grande parenté avec l'éponge naturelle ou avec le gruyère : Quelques gros trous, beaucoup de trous plus petits, encore plus de mini-trous ...
La principale différence provenant de la régularité de l'éponge de Sierpinski, ce qui lui donne sans ambiguïté la dimension fractale de $\text{Log} 20/\text{Log } 3 = 2,7268\ldots$ Il faut en effet, à partir du cube initial, 20 petits cubes déduits du grand cube par une homothétie de rapport $1/3$ pour le recouvrir complètement.

L'intersection du cube par une diagonale ou une diagonale de face est un ensemble triadique de Cantor. Une face peut d'ailleurs être interprétée comme un modèle grossier des cratères de la Lune.

On trouvera dans le livre de Mandelbrot bien d'autres ensembles frac-



tals réguliers :

* Courbes de Von Koch généralisées (avec différentes valeurs de D). On trouve ci-dessus la reproduction de son célèbre flocon. ($D = \log 4 / \log 3 = 1,2618$).
* Courbes de Peano qui remplissent tout le plan et pour lesquels D vaut 2.
* Des schémas du poumon avec une dimension $D = \dfrac{1}{2\cos(\pi/4 - \varepsilon/2)}$ et ε très petit.

4) Le rôle du hasard

Dans la réalité on ne peut pas se satisfaire d'une homothétie régulière. Mandelbrot explique comment on peut définir la dimension fractale dans ce cas. L'idée consiste à analyser statistiquement l'auto-homothétie des courbes ou surfaces obtenues. Une simulation du hasard sur ordinateur permet effectivement d'obtenir des courbes qui ressemblent à s'y méprendre à un contour de côte ou à des surfaces imitant parfaitement un relief imaginaire. Ces essais sur ordinateur conduisent à dire que la dimension d'un rivage est d'environ 1,3 , celle d'un paysage montagneux environ 2,3 , sans que les chiffres soient impératifs, certaines zones n'ayant pas la même dimension que d'autres.

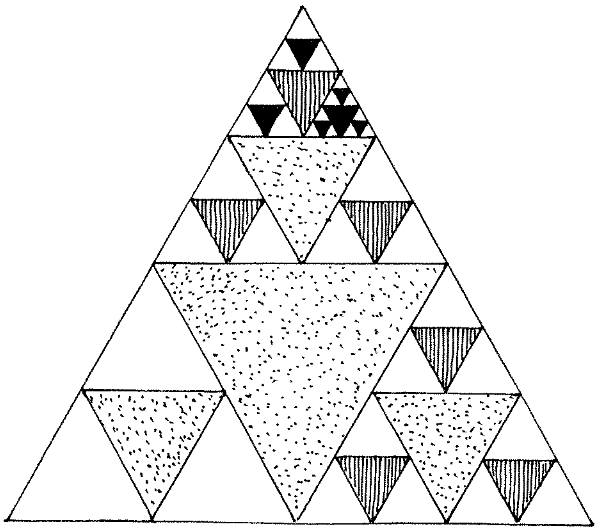
Cette intervention du hasard, l'auteur la développe à travers de nombreux exemples tirés du quotidien :

-- Les erreurs dans les transmissions téléphoniques.

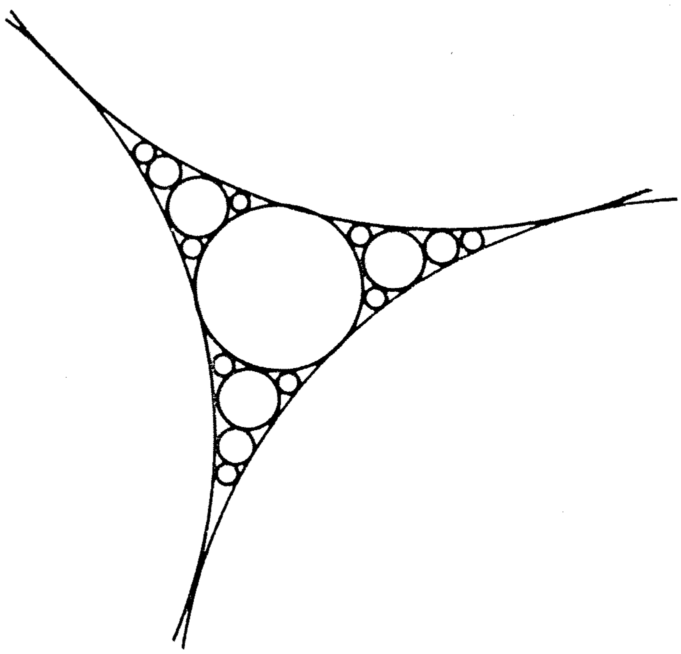
-- La distribution des cratères de la Lune, où l'auteur améliore le modèle que représente une face de l'éponge de Sierpinski en supposant que les cratères s'effacent avec le temps et surtout que tout cratère peut en chevaucher d'autres.

-- La distribution de la matière stellaire qui est nécessairement non uniforme sinon le ciel aurait la même luminosité de jour comme de "nuit" (paradoxe d'Olbers). De nombreuses réflexions théoriques conduisent à penser que la dimension fractale de l'Univers est sans doute 1 (!) et de toute façon inférieure à 1,77. Des simulations

dans le cas D = 1 conduisent à des résultats tout à fait acceptables (D = 1 et les étoiles ne sont pas sur une même courbe !)
-- La structure du savon qui fait intervenir le bourrage de cône dans le même esprit que le bourrage des triangles ou des cercles ci-dessous :



Bourrage d'un triangle pointe en haut par des triangles pointe en bas. On vérifie que la dimension vaut $\frac{\text{Log } 3}{\text{Log } 2}$ (dimension d'homothétie)



Bourrage appolonien de cercles ; la dimension de Hausdorff (inconnue) vaut environ 1,307

-- La géométrie de la turbulence (écoulement fluide).
-- Les arrangements de composants d'ordinateur
-- La loi de fréquence des mots (encore ne faut-il pas généraliser aux mots rares auxquels il est difficile, voire impossible, d'attribuer une fréquence ; un mot tel que "fourchette" doit déjà être considéré comme rare).

5) Généralisation de la notion de dimension

Le livre se termine par deux chapitres indépendants qui regroupent :
a) L'un des esquisses de biographies de personnes ayant d'une façon ou d'une autre imaginé la dimension fractale. A ces biographies il faudrait ajouter celle de J. Perrin longuement cité dans l'introduction.
b) L'autre des notes techniques montrant qu'il n'y a pas une dimension fractale mais plusieurs qui ne conduisent pas aux mêmes valeurs de D sauf dans les cas classiques connus d'Euclide.

Généralisation de la dimension d'homothétie au cas où interviennent plusieurs rapport r_i. D est alors défini par $\Sigma r_i^D = 1$.

La dimension de Hausdorff ou dimension de contenu (qui s'applique parfaitement au cas du bourrage appolonien de cercles).

La dimension de Minkowski . . . .

Les définitions de ces différents termes sont données de façon très claire en quelques lignes. Comme dans tout son livre, Mandelbrot évite les développements mathématiques complexes et vulgarise à merveille des notions inhabituelles qui donnent encore lieu à des recherches en mathématiques avancées.

P.S. Le livre : "Les objets fractals , forme, hasard et dimension" de Mandelbrot peut être consulté et emprunté à la bibliothèque de l'I.R.E.M.

Jean Lefort

UNE HIERARCHIE "OPPRESSIVE" ? Or l'enseignant est seul. "On est lâché dans la nature sans savoir à qui parler". Dans l'établissement c'est parfois le vide.(...) Par ailleurs, il y a toute la hiérarchie, qui, à tort ou à raison, est ressentie comme une structure oppressive par nature. Le proviseur, les inspecteurs ne pourraient donc être des interlocuteurs et des aides ("ils jugent et ils notent").

Ceux qui ont eu la chance d'assister à des mini-stages ou journées pédagogiques n'en n'ont pas tiré tout le profit escompté. Ces rencontres "verticales" n'offrent guère, selon eux, que l'occasion pour la hiérarchie de faire des discours.

L' EXPERIENCE DE CHACUN AU SERVICE DE TOUS. Au contraire l'échange "horizontal" d'expériences réelles, entre collègues, le professeur de mathématiques l'a trouvé dans les Instituts de recherche pour l'enseignement des mathématiques (IREM). A son avis cette expérience représente le modèle le plus réussi d'une formation continue. Chacun parle à ses égaux de son expérience et la confronte à celle de ses collègues. Ainsi l'expérience individuelle est mise au service de tous.

La formation des enseignants

table ronde au lycée Emile Zola de Wattrelos

le courrier de l'éducation : nº 79 / avril 79