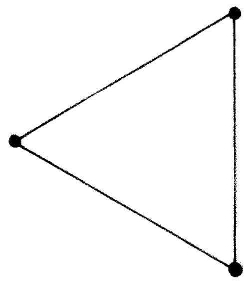
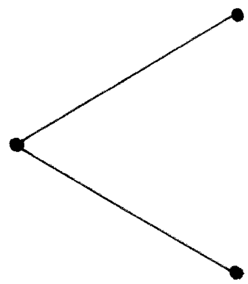
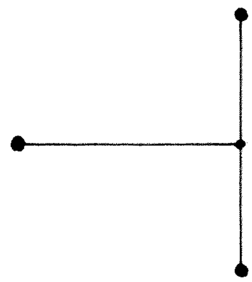
Un curieux résultat

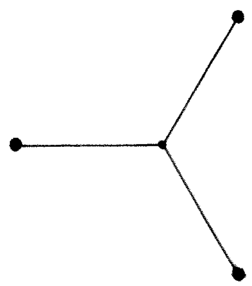
Imaginons trois villes disposées aux sommets d'un triangle équilatéral. Comment construire une autoroute de longueur aussi courte que possible et qui permette de se rendre de n'importe quelle ville à l'une des deux autres ?





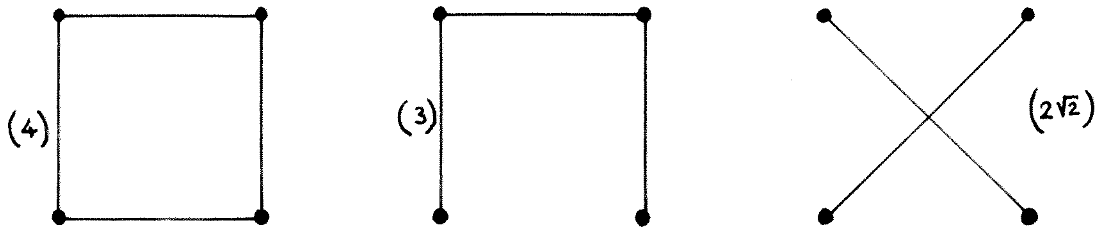


Une première idée consiste à construire l'autoroute en suivant les côtés du triangle, mais on voit immédiatement qu'en supprimant l'un des côtés on peut quand même passer d'une ville quelconque à une autre, et si l'on prend comme unité la longueur d'un côté, l'autoroute a une longueur de 3 unités dans le premier cas et de 2 unités dans le second. Mais pourquoi supprimer tel côté plutôt que tel autre ? On aimerait trouver un chemin respectant la symétrie ternaire du triangle. En remplaçant deux côtés par la hauteur issue du sommet commun, on trouve un résultat encore meilleur (d'une longueur totale de $1 + \sqrt{3}/2$), mais qui ne respecte toujours pas la symétrie du triangle équilatéral. Pour que cela soit, il nous faut construire trois autoroutes présentant un noeud au centre de gravité du triangle. La longueur de l'autoroute est alors $\sqrt{3}$ et il est facile quoique fastidieux de vérifier que c'est bien le chemin le plus court ; (l'autoroute présente nécessairement un seul noeud dont on calcule la somme des distances aux trois villes, puis on cherche la position du noeud pour rendre cette somme minimum).



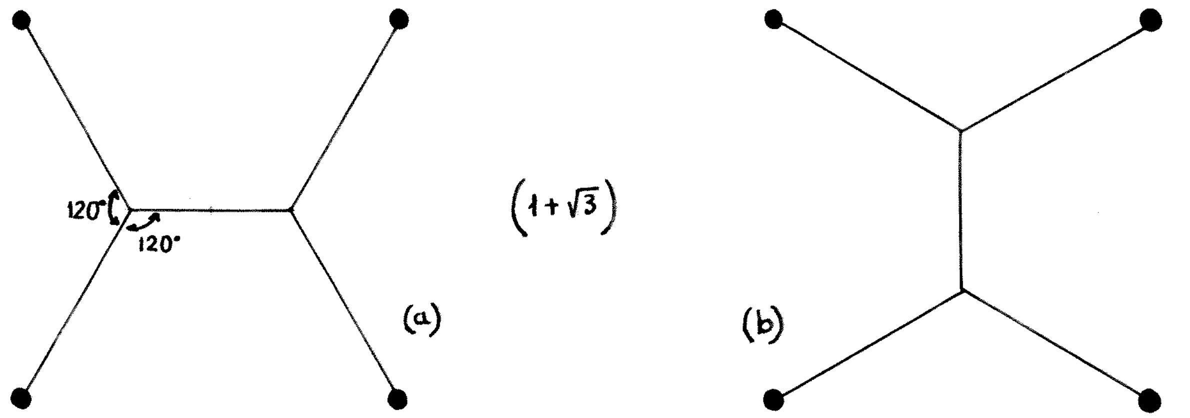
Si maintenant on s'intéresse à la distance moyenne parcourue par un automobiliste se rendant d'une ville à l'autre, c'est dans le premier cas qu'elle est la plus courte puisque égale à 1, longueur du côté. Dans les autres cas, on a respectivement les moyennes de $8/3$; $(\sqrt{3} + 2)/3$; $2\sqrt{3}/3$. Pour que cette moyenne ait un sens physique, il faut supposer que les trois villes participent <u>également</u> au trafic interurbain. Cela permet de saisir deux des aspects économiques qui participent à l'élaboration d'un tracé autoroutier.

Mais revenons à notre problème initial, en augmentant le nombre de ville. Prenons en 4 disposées aux sommets d'un carré. Instruit par l'expérience précédente,

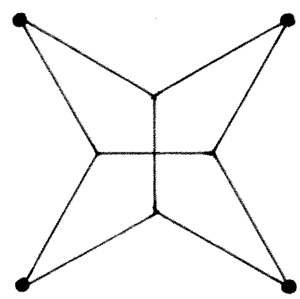


nous recherchons une solution qui conserve la symétrie d'ordre 4 de la figure. L'ensemble des deux diagonales paraît convenir à merveille en donnant une longueur de $2\sqrt{2}$ à l'autoroute, longueur inférieure aux quelques autres cas simples que l'on peut rapidement dessiner. Malheureusement cette solution n'est pas la bonne puisqu'il existe un chemin plus court obtenu en utilisant deux noeuds tels que les chemin partant de ces noeuds fassent un angle de 120 º entre eux. C'est une excellente application du théorème de Pythagore que de vérifier que la longueur de l'autoroute est alors $1 + \sqrt{3}$
L'ennuyeux c'est que cette solution ne possède pas la symétrie d'ordre 4 de l'énoncé du problème. Seulement il n'y a pas de chemin plus court ; la démonstration , fort compliquée, ne sera pas demandée au lecteur !

Voilà un bien curieux résultat : Un problème parfaitement symétrique par rapport aux quatre données et dont la solution ne l'est pas. Où est passée la symétrie manquante ? Tout simplement dans la deuxième solution que le lecteur aura peut-être déjà vu puisqu'elle est ci-dessous :

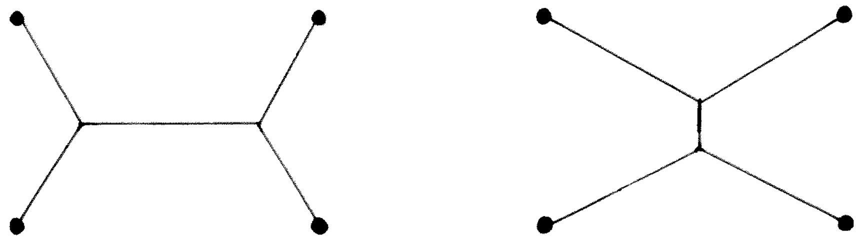


et l'ensemble des deux solutions présente bien la symétrie requise. Mais aucun technocrate, aussi technocrate soit-il, ne s'amusera à faire construire la superposition de ces deux autoroutes comme ci-contre, sous prétexte de respecter la symétrie.



Et la nature qui résoud très joliment dans les bulles de savon ce genre de problèmes, se contente d'une seule solution, brisant ainsi la symétrie originale. Comment choisit-elle ? Tout simplement en prenant la position d'équilibre la plus proche de la position initiale ; (de la même façon que la plupart des molécules organiques constituant les êtres vivants sont orientées dans un certain sens alors qu'on devrait les trouver également réparties entre les deux sens d'orientation).

Modifions maintenant légèrement la position des 4 villes de façon a avoir un rectangle. L'angle aux noeuds reste de 120º mais la ligne qui joint les deux noeuds voit sa longueur varié (se raccourcit dans l'une des solutions et s'allonge dans l'autre).



Mais si chaque solution correspond à un minimum d'une certaine fonction, les deux minimums ne sont pas égaux et il ne faut retenir que le minimum absolu. L'application de la règle des 120º permet ainsi de trouver tous les minimums (constructions par les arcs capables - mais dans quelles classes pouvons-nous l'enseigner ?) puis après mesure des différentes longueurs de choisir le minimum absolu. Mais il est des cas où cette règle ne s'applique pas. Sauriez-vous les trouver dans le cas de trois villes ?

(si le triangle formé par les 3 villes possède un angle supérieur à 120º).

Jean Lefort

L ' OUVERT : responsable de la publication : Jean Lefort
24, rue Schweitzer
Wintzenheim 68000 Colmar

impression : Irem de Strasbourg
10, rue du général Zimmer
67084 Strasbourg Cedex

Toute communication relative au bulletin est à envoyer à l'une des deux adresses ci-dessus.