Calcul matriciel appliqué

Le texte qui suit a été rédigé à partir d'un expcsé fait au groupe IREM math-physique du Haut-Rhin.

<u>1er exemple</u> :

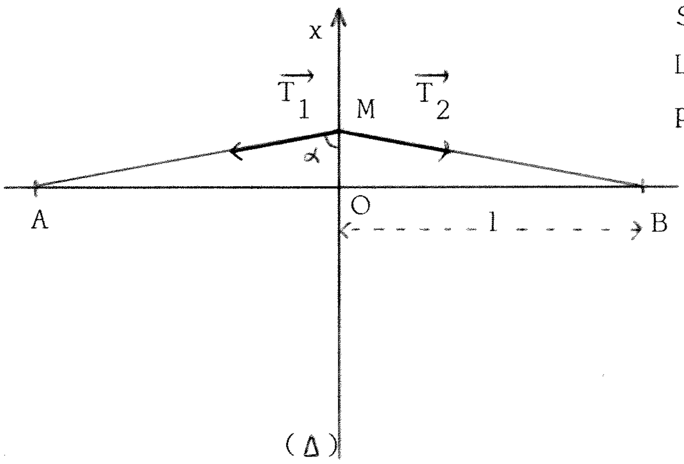
Une particule M de masse m est accrochée à 2 points fixes A et B distants de 2l, par un fil élastique de longueur initiale 2lo et de module d'élasticité μ .

<u>Etude du mouvement de cette particule</u> (en oscillations libres à partir d'un point Ω de (Δ), distinct de O)

<u>On suppose que</u>

1. l $>$ lo

2. et que le mouvement de la particule M se situe dans un plan horizontal et sur la médiatrice (Δ) de AB.



Soit (O, $\vec{u}$) un repère de(Δ) .

La position du point M à l'instant t est donnée par :

$$\overrightarrow{OM} = x(t) \;.\; \vec{u}$$

3. MA = l = MB

La particule est soumise à 2 actions extérieures dues à la tension du fil MA et MB :

$$\vec{T_1} + \vec{T_2} = -2 \;\|\vec{T_1}\| \;.\; \cos\alpha \;.\; \vec{u}$$

$$= -2 \;\|\vec{T_1}\| \;.\; \frac{x}{l} \;.\; \vec{u}$$

or : $\|\vec{T_1}\| = \mu \;.\; \dfrac{l - lo}{lo}$

donc : $\vec{T_1} + \vec{T_2} = -2\mu \dfrac{l - lo}{l\,lo} \;.\; x \;.\; \vec{\mu}$

$\vec{F} = m\,\vec{\gamma}$ donne l'équation du mouvement dans le repère $(O,\vec{u})$:

$$-2\mu \frac{l - lo}{l\,lo}\, x = m \;.\; x''$$

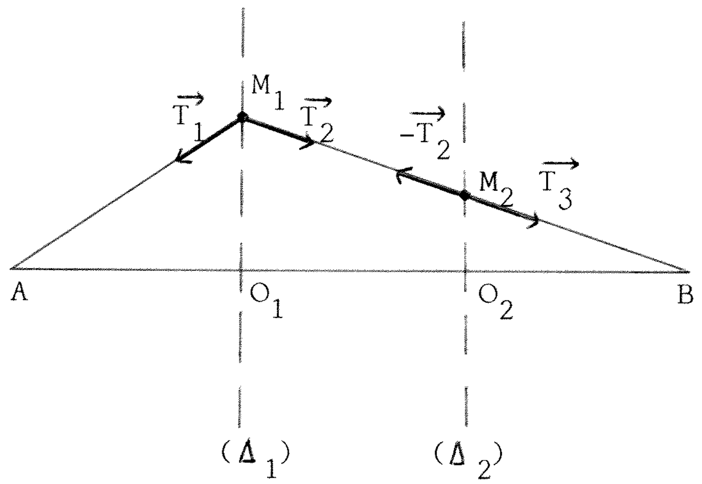
ce qui est de la forme : $x'' = -a^2 x$ avec $a = \sqrt{2\mu \dfrac{l - lo}{ml\ lo}}$

et les solutions sont de la forme :

$$x(t) = K \cdot \cos(a\,t + \varphi).$$

2ème exemple :

On considère deux particules M_1 et M_2, de même masse m, attachées par un fil élastique de longueur initiale 3 lo, à deux points fixes A et B tels que AB = 3 l.



Soit $(O_1, \vec{u})$ un repère de (Δ_1)

Soit $(O_2, \vec{u})$ un repère de (Δ_2).

Approximation :

On suppose que : $M_1A = M_1M_2 = M_2B = l$.

Le mouvement de M_1 est sur (Δ_1) $\qquad \overrightarrow{O_1M_1} = x_1(t)\,\vec{u}$

Le mouvement de M_2 est sur (Δ_2) $\qquad \overrightarrow{O_2M_2} = x_2(t)\,\vec{u}$

Donc, les tensions sont constantes et de même norme :

$$\mu \frac{l - lo}{lo} = T$$

Pour le point M_1 : la projection sur l'axe (Δ_1) de $\vec{T_1} + \vec{T_2}$ est :

$$\left(-T\frac{x_1}{l} - T\frac{(x_1 - x_2)}{l} \right) \vec{u} = -\frac{T}{l}(2x_1 - x_2) \cdot \vec{u}$$

Pour le point M_2 : la projection sur (Δ_2) de $-\vec{T_2} + \vec{T_3}$ est :

$$\left(-T\frac{x_2}{l} + T\frac{(x_1 - x_2)}{l} \right) \vec{u} = \frac{-T}{l}(-x_1 + 2x_2) \cdot \vec{u}$$

d'où les équations des mouvements :

$$\begin{cases} \text{pour } M_1 : \quad m\,x''_1 = \dfrac{-T}{l}(2x_1 - x_2) \iff x''_1 = -b^2(2x_1 - x_2) \\ \text{pour } M_2 : \quad m\,x''_2 = \dfrac{-T}{l}(-x_1 + 2x_2) \iff x''_2 = -b^2(-x_1 + 2x_2) \end{cases}$$ avec $b = \sqrt{\dfrac{T}{ml}}$

Ecriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} = -b^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Posons : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\quad X'' = \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix}$ $\quad$ et $\quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

d'où :

$$\boxed{X'' = -b^2 M X} \qquad (E)$$

(Recherche de vecteurs propres en vue de diagonaliser la matrice M)

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ la base dans laquelle est écrite la matrice M.
$\vec{I} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{J} = \vec{i} + \vec{j}$ sont deux vecteurs propres, formant une base $(\vec{I}, \vec{J})$ dans laquelle la matrice diagonale obtenue à partir de M est :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M'$$

Soit P la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $(\vec{I}, \vec{J})$, l'équation (E) devient :

$$X'' = -b^2 P M' P^{-1} X$$

$\Longleftrightarrow P^{-1} X'' = -b^2 M' P^{-1} X$. En posant $\mathcal{X} = P^{-1} X$ et $\mathcal{X}'' = P^{-1} X''$

L'équation (E) s'écrit :

$$\mathcal{X}'' = -b^2 M' \mathcal{X}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y''_1 \\ y''_2 \end{pmatrix} = -b^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y''_1 = -3b^2 y_1 \\ y''_2 = -b^2 y_2 \end{cases}$$

d'où :
$$\begin{cases} y_1(t) = K_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) & \text{avec } \omega_1 = b\sqrt{3} \\ y_2(t) = K_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) & \text{avec } \omega_2 = b \end{cases}$$

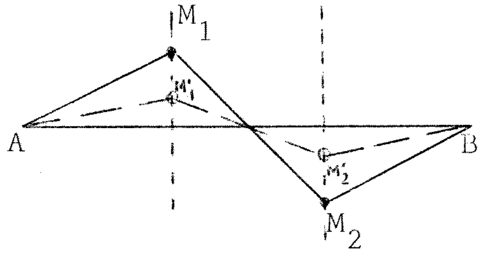
D'autre part : $\quad X = P \cdot \mathcal{X}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ x_2(t) = -y_1(t) + y_2(t) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = K_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + K_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = -K_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + K_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Remarques : Cas particuliers :

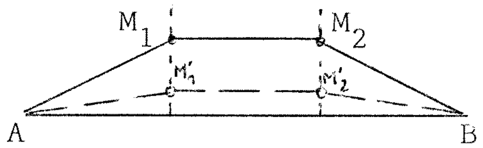
. si $K_2 = 0$ $\qquad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = K_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ donc $x_1 = -x_2$

Les points M_1 et M_2 vibrent en opposition de phase sinusoïdalement



. si $K_1 = 0$ $\qquad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = K_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les points M_1 et M_2 vibrent en phase sinusoïdalement.

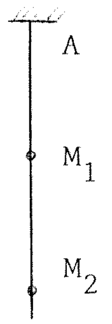


Le cas général est une superposition de ces deux cas particuliers appelés les modes normaux.

3ème exemple :

Deux particules M_1 et M_2 de masse m sont attachées sur un fil qui pend librement telles que :

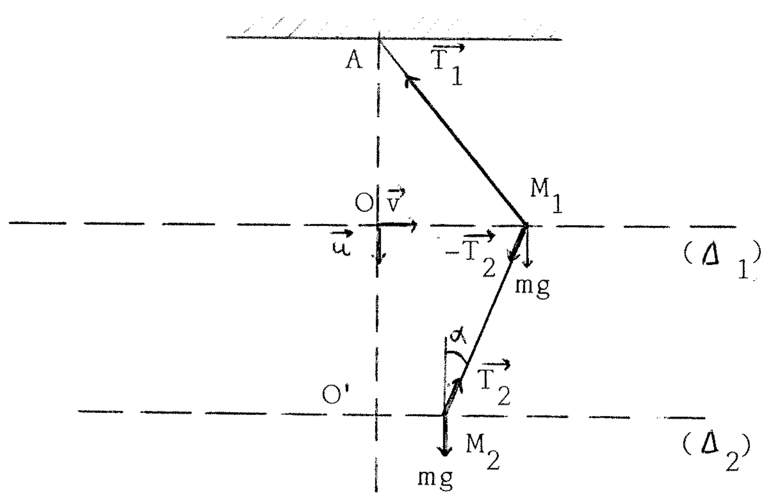
$AM_1 = M_1M_2 = l$



Approximation : On suppose que les mouvements de M_1 et M_2 ont lieu dans un plan vertical. Le point M_1 se déplace sur une droite horizontale (Δ_1) rapportée au repère $(O, \vec{v})$ et M_2 sur (Δ_2) horizontale rapportée au repère $(O', \vec{v})$.

$\overrightarrow{OM_1} = x_1(t) \cdot \vec{v}$

$\overrightarrow{O'M_2} = x_2(t) \cdot \vec{v}$



On suppose que α est petit, donc $\| \vec{T_2} \| \simeq mg$

Le point M_1 se déplace horizontalement, donc : $\| \vec{T_1} \| \simeq 2mg$

Pour M_2 : $\qquad \| \vec{T_2} \| \left(\dfrac{x_1 - x_2}{l} \right) = \dfrac{mg}{l} (x_1 - x_2)$

Pour M_1 : $\qquad - \| \vec{T_2} \| \left(\dfrac{x_1 - x_2}{l} \right) - \| \vec{T_1} \| \dfrac{x_1}{l} = \dfrac{mg}{l} (-3x_1 + x_2)$

D'où les équations des mouvements :

$$\begin{cases} m\, x''_2 = -\dfrac{mg}{l}(-x_1 + x_2) \\ m\, x''_1 = -\dfrac{mg}{l}(3x_1 - x_2) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} = -b^2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ avec } b = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\iff \boxed{X'' = -b^2 \mathcal{M}\, X}$$

(De même que précédemment, on diagonalise la matrice ; les valeurs propres sont : $2 - \sqrt{2}$ et $2 + \sqrt{2}$).

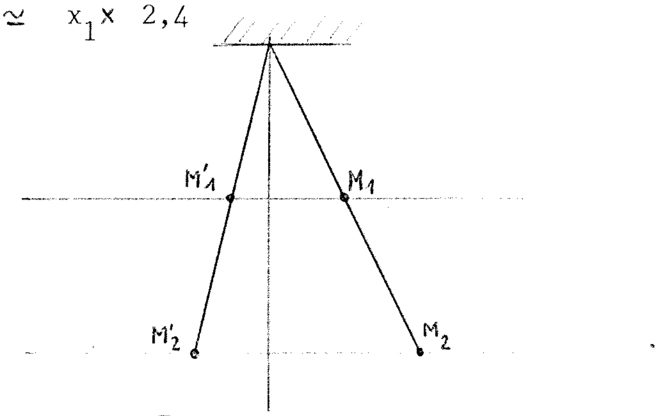
$$\iff \begin{cases} x_1(t) = K_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + K_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = (1 + \sqrt{2})\, K_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + (1 - \sqrt{2})\, K_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

avec $\omega_1 = b\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

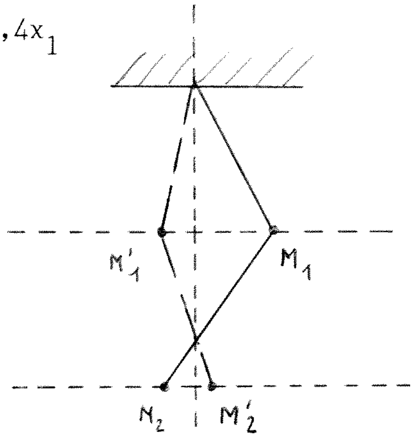
et $\omega_2 = b\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

<u>Solutions particulières</u>

. si $K_2 = 0$ $\qquad x_2 \simeq x_1 \times 2,4$



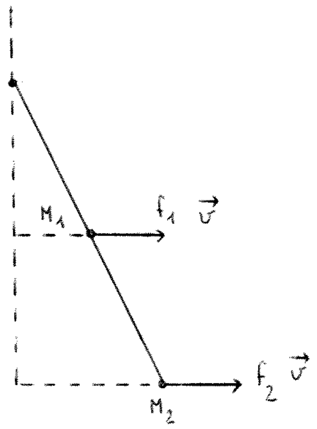
. $\underline{\text{Si } K_1 = 0}$ $\qquad x_2 \simeq -0{,}4 x_1$



La solution générale est une superposition de ces deux cas particuliers.

<u>4ème exemple</u> :

Même situation qu'à l'exemple 3, avec un système en équilibre en appliquant des forces f_1 et f_2 aux points M_1 et M_2.



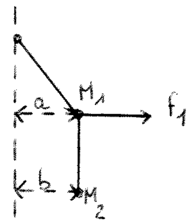
$$\begin{cases} f_1 = m\,b^2(3x_1 - x_2) \\ f_2 = m\,b^2(-x_1 + x_2) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = m\,b^2 \mathcal{N} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2m\,b^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matrice de flexibilité} \\ \text{du système}}} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

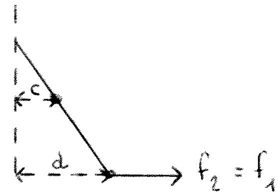
<u>Remarque</u> :

Les coefficients de la matrice $\frac{1}{2m\,b^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ peuvent être déterminés par l'expérience en mesurant les longueurs indiquées :

. $\underline{\text{si } f_2 = 0 \text{ et } f_1 = 1}$



. si $f_1 = 0$ et $f_2 = 1$



Sur des notes prises durant l'exposé de E. MEYER par

Paul BALTZER

et Antoinette POINOT

Quelques remarques de l'auteur de l'exposé

Rendons d'abord à César ce qui est à César et l'idée de cet exposé à FLETCHER ("L'Algèbre linéaire par ses applications"- chez Cédic : merveilleux ouvrage).

Les approximations faites sont très grossières et demanderaient à être justifiées. Mais si vous avez un doute sur la valeur des résultats, et même si vous n'en avez pas, faites donc l'expérience en accrochant des boules à une ficelle : le résultat est tout simplement merveilleux. Quelle joie (pourquoi pas ?) en réalisant les deux modes normaux et surtout, en voyant dans le mouvement général, une combinaison linéaire des deux mouvements particuliers : belle visualisation d'espace vectoriel.

Dans l'exposé fait au groupe math-physique, la recherche des valeurs propres, des vecteurs propres et de leur utilisation a été faite par le passage à la géométrie et à l'itération, un peu comme A. Deledicq l'avait fait au cours de son passage aux journées régionales A.P.M. Ce thème a également servi en T.E. pour illustrer les équations différentielles et réviser quelques résultats d'algèbre linéaire.

Etienne MEYER