Multiplions-nous !

La notion de groupe ne figure plus aux programmes 1978 pour les classes de 4° et 3°. C'est un fait, et mon but n'est pas de porter un jugement. S'il est vrai qu'on a souvent demandé aux élèves un niveau d'abstraction de la structure dont ils n'étaient pas capables, on risque maintenant de tomber dans l'excès contraire. A la fin du premier cycle, les élèves n'auront jamais opéré avec d'autres êtres mathématiques que les nombres et auront (à bon droit) l'idée que les propriétés des opérations sont tout à fait générales. Or chacun sait que tous les ensembles n'ont pas une structure de corps totalement ordonné.

Il est vrai que rien n'empêche de considérer les opérations ensemblistes ou la composition des applications dans la même optique. Mais on se heurtera très vite au problème de l'abstraction. C'est pourquoi je suggère une activité qui a provoqué l'enthousiasme de ma classe de 4° et qui a eu des retombées bénéfiques sur d'autres points du programme. Il s'agit d'une étude de l'anneau $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, dont l'originalité est de réduire le plus possible l'abstraction.

Le principe est très simple: donner à la classe une structure d'anneau isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Evidemment, les résultats pratiques sont plus ou moins intéressants suivant les valeurs de n. Ma classe de 4° ayant 23 élèves, nous avons ajouté un élève imaginaire: $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ a des propriétés plus étonnantes que $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$ qui est un corps. Cette adjonction n'a troublé personne.

Tout le travail a été effectué en fait sur les classes d'équivalences, mais aussitôt transposé par isomorphisme à la classe elle-même. Evidemment, on n'a jamais prononcé le mot de classe d'équivalence, et l'ensemble a été noté: $\mathbb{Z}_{24} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23\}$.

Les opérations d'addition et de multiplication ont été définies ainsi: pour multiplier deux éléments de Z_{24}, on fait leur produit en tant que nombres entiers, puis on retranche autant de fois 24 qu'il est nécessaire pour obtenir un résultat compris entre 0 et 23. Il m'est apparu que cette phrase était plus accessible que "rechercher le reste de la division par 24". Idem pour l'addition. Remarque: les tables gagnent à être faites à la maison: elles sont très longues (576 cases chacune), et les élèves les remplissent sans méthode, même lorsqu'ils ont constaté des moyens d'abréger le calcul. Elles sont données en annexe.

Il suffit ensuite d'attribuer un numéro à chaque élève pour obtenir l'isomorphisme. Pour fixer les idées, je donne l'exemple de mes élèves:

0: Raymond;	1: Martine;	2: Dominique;
3: Encarnacion;	4: Evelyne;	5: Nathalie;
6: Marie-Line;	7: Corine;	8: Sylvie;
9: Patricia;	10: Gilles;	11: Christine;
12: Catherine;	13: Sophie;	14: Christian;
15: Astride;	16: Paule;	17: Sandrine;
18: Dietmar;	19: Antonia;	20: Brigitte;
21: Frédéric;	22: Christophe;	23: Marielle.

Sitôt prêtes les tables, les élèves ont commencé à s'additionner et à se "multiplier". Ainsi, on remarque que Gilles + Christophe = Sylvie, que Astride + Patricia = Raymond, que Antonia x Dietmar = Marie-Line, etc... Toutefois, il est certain que les élèves se lassent assez vite si on ne leur propose pas du nouveau; faire ce travail pour en rester là serait un peu stérile. C'est pourquoi je vous propose quelques pistes que j'ai expérimentées avec mes élèves; la plupart se généralisent bien à un nombre quelconque d'élèves; pour la clarté de l'exposé, je resterai dans le cadre de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

1. Propriétés de l'addition.

$(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien, d'élément neutre $\overline{0}$; l'opposé de $\overline{n}$ est $\overline{24-n}$. Après isomorphisme, (C, +) est donc aussi un groupe abélien, dont l'élément neutre est Raymond (qu'un éléve a proposé d'écrire Raymond, sans aucune allusion). Chacun s'est amusé à chercher son opposé, ce qui a parfois déclenché d'homériques fous-rires, surtout quand un garçon découvre être l'opposé d'une fille qu'il drague ouvertement dans la cour du collège...
La structure additive étant "sans surprises", il ne me paraît pas indispensable d'insister beaucoup plus.

2. Propriétés de la multiplication.

On repère très vite l'élément neutre (Martine), l'élément absorbant (Raymond), la commutativité. Inutile d'insister sur l'associativité ni sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition,qu'on suppose vraies sans démonstration.

L'intérêt est ici dans la présence de nombreux diviseurs de 0. A vrai dire, ce fait n'a pas paru surprendre outre mesure les élèves; ils en ont pourtant remarqué les effets néfastes: Gilles x Marie-Line = Gilles x Dietmar = Catherine: la régularité n'est pas au rendez-vous.

Il y a 8 nombres inversibles: dans ce cas particulier, ils sont leurs propres inverses (car si p est premier avec 6, p^2 est congru à 1 modulo 24). Les élèves inversibles sont donc Martine, Nathalie, Corine, Christine, Sophie, Sandrine, Antonia et Marielle (c'est un hasard s'il n'y a que des filles).
Il est facile de constater qu'ils forment un sous-ensemble stable pour la multiplication, dont la table d'opération est la suivante:

	1	5	7	11	13	17	19	23
1	1	5	7	11	13	17	19	23
5	5	1	11	7	17	13	23	19
7	7	11	1	5	19	23	13	17
11	11	7	5	1	23	19	17	13
13	13	17	19	23	1	5	7	11
17	17	13	23	19	5	1	11	7
19	19	23	13	17	7	11	1	5
23	23	19	17	13	11	7	5	1

Il s'agit du groupe de Klein à 8 éléments, dont on aura d'autres exemples avec l'ensemble $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, muni de l'addition (la table d'addition de cet ensemble est facile à réaliser) ou avec l'ensemble des parties d'un ensemble de trois éléments muni de la différence symétrique.

S'il ne pose pas de problème aux élèves de chercher leurs opposés dans la table d'addition, il leur est plus difficile de repérer les nombres inversibles en cherchant les 1 dans la table de multiplication. Par contre, la présence des 0 au milieu de la table est rapidement repérée.

3. Relation d'ordre.

Je n'ai pas abordé cet aspect en classe. On pourrait considérer plusieurs types de relations; le classement n'a aucune chance d'être compatible avec les opérations (et comme je n'en fais pas, c'était de toutes façons exclu); une inégalité naturelle est le classement à partir des numéros; mais il n'est pas non plus totalement compatible: par exemple, Catherine (12) est inférieure à Frédéric (21), mais Catherine + Corine (12 + 7) est supérieur à Frédéric + Corine (21 + 7). De plus, établir une telle relation nécessiterait un choix de vocabulaire soigné (il pourrait être déplaisant de dire que tel élève est "supérieur" ou "avant" tel autre).

4. Valeur absolue.

Piste inexplorée aussi. Même si on ne parle pas de relation d'ordre, on peut dire que deux élèves ont même valeur absolue s'ils sont opposés. La valeur absolue aurait par contre davantage d'intérêt dans un corps.

5. Puissances.

Il est très facile de calculer les puissances successives des élèves. Elles déclenchent également pas mal de fous-rires, par exemple quand un garçon constate que son carré est une fille. On remarque vite que certains éléments jouent un rôle important et que la plupart des puissances sont rapidement cycliques. En particulier, les huit inversibles ont comme carré l'élément neutre (Martine); donc, si a est inversible, on a:

$$a^{2n} = \text{Martine}; \quad a^{2n+1} = a .$$

De plus, si a est divible par 6, son carré est donc divisible par 36: il est donc égal à Raymond ou à Catherine; la puissance 4 sera automatiquement égale à Raymond. On obtient le tableau suivant:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
0	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
2	1	2	4	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	...
3	1	3	9	3	9	3	9	3	9	3	9	3	9	3	9	3	...
4	1	4	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	...
5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	...
6	1	6	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	...
8	1	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	...
9	1	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	...
10	1	10	4	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	...
11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	...
12	1	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	...
14	1	14	4	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	...
15	1	15	9	15	9	15	9	15	9	15	9	15	9	15	9	15	...
16	1	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	...
17	1	17	1	17	1	17	1	17	1	17	1	17	1	17	1	17	...
18	1	18	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	...
20	1	20	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	...
21	1	21	9	21	9	21	9	21	9	21	9	21	9	21	9	21	...
22	1	22	4	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	...
23	1	23	1	23	1	23	1	23	1	23	1	23	1	23	1	23	...

On remarque sur ce tableau un certain nombre de relations (auxquelles les élèves ne pensent pas seuls), comme par exemple:

$$a^{2n} = (-a)^{2n} \quad ; \quad (-a)^{2n+1} = -(a^{2n+1}) .$$

On remarque également que les seuls carrés sont 0, 1, 4, 9, 16, comme on pouvait s'y attendre, et 12. Il y a trois éléments nilpotents (6 = Marie-Line, 12 = Catherine et 18 = Dietmar), et quatre éléments idempotents (0 = Raymond, 1 = Martine, 9 = Patricia et 16 = Paule). Enfin, les éléments 2 (Dominique), 4 (Evelyne), 6 (Marie-Line), 10 (Gilles), 12 (Catherine), 14 (Christian), 18 (Dietmar), 20 (Brigitte) et 22 (Christophe) ne peuvent être candidats à une puissance supérieure à 3. Les élèves "impairs" sont donc en général "plus puissants" que les élèves "pairs".

6. Racines carrées.

Même en quatrième, il est très facile d'envisager le problème inverse du précédent; tout raisonnement est inutile, il suffit de regarder la table de multiplication. On a déjà constaté que les seuls nombres qui possèdent une racine carrée sont 0, 1, 4, 9, 12 et 16. Toutefois, il y a de notables différences par rapport à ce qui se passe dans $\mathbb{R}$:

- 0 a deux racines carrées: 0 et 12.
- 1 a huit racines carrées, opposées deux à deux, et qui sont les huit éléments inversibles.
- 4 a quatre racines carrées, opposées deux à deux: 2 et 22, 10 et 14.
- 9 a quatre racines carrées, opposées deux à deux: 3 et 21, 9 et 15.
- 12 a deux racines carrées opposées, 6 et 18.
- 16 a quatre racines carrées opposées deux à deux: 4 et 20, 8 et 16.

7. Sous-structures.

On atteint ici un niveau d'abstraction qui risque de poser quelques problèmes. Il est certain qu'on ne peut parler de "sous-groupe" ou de "partie engendrée" par un élément, encore moins de sous-anneau ou d'idéal. Toutefois, une petite incursion dans ce domaine m'a montré que l'aspect numérique restait abordable, et que l'aspect jeu motivait les petites recherches nécessaires.

Voici les sous-groupes additifs de la classe engendrés par les éléments:

$\langle$Raymond$\rangle$ = {Raymond} ;

Martine, Nathalie, Corine, Christian, Sophie, Sandrine, Antonia et Marielle, qui sont inversibles, engendrent toute la classe (une telle phrase est susceptible de faire de l'effet sur une classe!)

$\langle$Dominique$\rangle$ = {Raymond, Dominique, Evelyne, Marie-Line, Sylvie, Gilles, Catherine, Christian, Paule, Dietmar, Brigitte, Christophe} (sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$).

$\langle$Encarnacion$\rangle$ = {Raymond, Encarnacion, Marie-Line, Patricia, Catherine, Astride, Dietmar, Frédéric} (sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$).

$\langle$Evelyne$\rangle$ = {Raymond, Evelyne, Sylvie, Catherine, Paula, Brigitte} (sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$).

$\langle$Marie-Line$\rangle$ = {Raymond, Marie-Line, Catherine, Dietmar} (sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$)

$\langle$Sylvie$\rangle$ = {Raymond, Sylvie, Paule} (sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$).

$\langle$Catherine$\rangle$ = {Raymond, Catherine}. (sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

Les sous-groupes engendrés par Gilles, Christian, Astride, Paule, Dietmar, Brigitte, Frédéric et Christophe, sont déjà écrits; le lecteur les reconnaîtra aisément parmi les sous-groupes ci-dessus.

La structure de groupe attachée à ces sous-ensembles est évidente. Je n'ai pas jugé bon de pousser le détail à ce sujet trop loin en classe.

Il est facile de se convaincre que l'on a obtenu ainsi tous les ensembles stables par l'addition.

On sait que tous ces sous-ensembles seront aussi des sous-anneaux et même des idéaux. On peut par contre rechercher lesquels ont une structure de corps.

Il n'est pas inintéressant de s'intéresser de plus près aux structures multiplicatives de ces ensembles, en particulier à cause des nombreux diviseurs de zéro qu'ils contiennent. Ils fournissent en effet l'un ou l'autre cas pathologique.

Notons pour commencer qu'un idéal contenant Catherine (dont le carré est égal à Raymond, c'est-à-dire nul), n'a aucune chance d'avoir une structure de corps. L'idéal engendré par Sylvie est donc le seul candidat acceptable. Voici sa table de multiplication:

< Sylvie> = {Raymond, Sylvie, Paule}.

< 8 > = {0, 8, 16}

	0	8	16
0	0	0	0
8	0	16	8
16	0	8	16

On remarque que 16 est élément neutre, que 8 est son propre symétrique: l'idéal engendré par Sylvie est bien un corps isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Voilà un exemple d'une sous-structure dont l'élément neutre n'est pas celui de la structure initiale.

L'idéal engendré par Catherine donne un exemple d'ensemble dans lequel tous les produits sont nuls. Celui engendré par Marie-Line et celui engendré par Evelyne sont des exemples d'ensembles sans élément neutre, mais possédant en revanche deux éléments absorbants:

<Marie-Line> = {Raymond, Marie-Line, Catherine, Dietmar}.

< 6 > = {0, 6, 12, 18}

	0	6	12	18
0	0	0	0	0
6	0	12	0	12
12	0	0	0	0
18	0	0	0	0

	0	4	8	12	16	20
0	0	0	0	0	0	0
4	0	16	8	0	16	8
8	0	8	16	0	8	16
12	0	0	0	0	0	0
16	0	16	8	0	16	8
20	0	8	16	0	8	16

< 4 > = {0, 4, 8, 12, 16, 20}.

<Evelyne> = {Raymond, Evelyne, Sylvie, Catherine, Paule, Brigitte.}

L'idéal engendré par Dominique possède la même propriété.

On peut aussi s'intéresser aux sous-ensembles multiplicatifs engendrés par chaque élément. Mis à part les éléments 0 et 1, on obtient:

(Dominique) = { Dominique, Evelyne, Sylvie, Paule}.

(Encarnacion) = {Encarnacion, Patricia}.

(Marie-Line) = {Raymond, Marie-Line, Catherine}.

(Sylvie) = {Sylvie, Paule}.

(Gilles) = {Evelyne, Gilles, Paule}.

(Catherine) = {Raymond, Catherine}.

(Christian) = {Evelyne, Sylvie, Christian, Paule.}

(Astride) = {Patricia, Astride}.

(Dietmar) = { Raymond, Catherine, Dietmar}.

(Brigitte) = { Sylvie, Paule, Brigitte}.

(Frédéric) = { Patricia, Frédéric}.

(Christophe) = {Evelyne, Paule, Christophe.}

Les quatre éléments idempotents (Raymond, Martine, Patricia et Paule) n'engendrent pas d'autre élément; les huit éléments inversibles engendrent un sous ensemble qui contient, en plus d'eux, l'unité (Martine).

De ces sous-ensembles, seul (Catherine) est stable par addition.

8. Divisibilité.

On peut chercher les ensembles de "multiples" d'un élève donné. On aura reconnu la recherche précédente des sous-ensembles stables par addition. Ici encore, la recherche effectuée sur les nombres est motivée par les résultats transposés à la classe. Il ne fait ni chaud ni froid de savoir que 4 est un multiple de 2 ou que 7 divise 6 (quoique ce dernier résultat n'ait rien d'évident a priori). Il est par contre fort amusant de dire que Evelyne est un multiple de Dominique et que Corine divise Marie-Line.

Nous avons vu que les élèves inversibles engendrent toute la classe: tout élève est donc leur multiple; un élève inversible divise donc tout élève, ce qui implique qu'il faudra revoir une éventuelle définition d'"élèves premiers": tout élève a au moins huit diviseurs.

Dire que a divise b, c'est dire que $<a>$ contient $<b>$. Mis à part les éléments inversibles et eux-mêmes, voici les diviseurs de chaque élève:

- Raymond est divisible par tout élève;
- Martine, de même que les élèves inversibles, n'est divisible par personne d'autre. Remarquer que le résultat est aussi vrai dans $\mathbb{Z}$, où les éléments inversibles 1 et -1 ne sont divisibles que par eux mêmes, et ne doivent pas être considérés comme premiers pour sauvegarder l'unicité de la factorisation en nombres premiers.
- Dominique, Gilles, Christian, Christophe (2, 10, 14, 22), ainsi que Encarnacion, Astride et Frédéric (3, 15, 21), ne sont divisibles que par eux-mêmes et par les élèves inversibles: on pourra les considérer comme des "élèves premiers".
- Evelyne (4) est divisible par Dominique, Gilles, Christian et Christophe.
- Sylvie (8) est divisible par les précédents et par Evelyne et Brigitte.
- Paule (16) est divisible par les précédents et par Sylvie.
- Brigitte (20) a les mêmes diviseurs qu'Evelyne.
- Marie-Line (6) est divisible par Dominique, Gilles, Christian, Christophe, Encarnacion, Astride et Frédéric, ainsi que par Patricia et Dietmar.
- Patricia (9) et Dietmar (18) ont les mêmes diviseurs qu'Encarnacion.
- Enfin, Catherine (12) est divisible par tout élève, sauf par Raymond, Sylvie et Paule.

Comme on l'a dit, on pourra appeler élève premier tout élève qui n'est divisible que par lui-même et par les nombres inversibles, à condition qu'il ne soit pas inversible. On peut alors se poser le problème de la décomposition en produit de facteurs premiers, qui ne sera de toutes façons unique qu'au produit par le carré d'un élève inversible près; mais on s'assure rapidement qu'il n'y a aucun espoir d'unicité même à ce prix. Par exemple:

Evelyne = Dominique^2 = Gilles^2 = Christian^2 = Christophe^2.

On se convainc rapidement que les 8 élèves non premiers et non inversibles ont au moins une décomposition en produit de facteurs premiers:

Evelyne = Dominique^2 ; Marie-Line = Dominique x Encarnacion ;

Sylvie = Dominique^3 ; Patricia = Encarnacion^2 ; Paule = Dominique^4 ;

Catherine = Dominique^2 x Encarnacion ; Dietmar = Dominique x Encarnacion^2 ;

Brigitte = Dominique x Gilles.

On pourra éventuellement chercher pour chaque élève toutes ses factorisations premières (exception faite des modifications apportées par les élèves inversibles).

Cette absence d'unicité de la factorisation première rend illusoire des recherches de PGCD ou de PPCM; aussi ne m'y suis-je pas aventuré avec les élèves. L'absence de relation d'ordre naturelle compatible avec la structure d'anneau est ici relayée par la relation d'inclusion des sous-ensembles engendrés par les éléments. A titre d'exemple, Sylvie (8) et Catherine (12) admettent comme PGCD Evelyne et Brigitte, si l'on excepte les élèves inversibles. La confusion ici risque d'être préjudiciable à la recherche.

9. Polynômes.

Il est bien sûr possible de construire à partir de l'anneau (C,+,x) un anneau de polynomes (ou de fonctions polynomes); les calculs seront effectués dans $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}[x]$ et leurs résultats transportés dans C[x]. L'expérience m'a prouvé que le temps passé à additionner ou à multiplier de tels polynomes n'a pas été du temps perdu: l'apprentissage des opérations sur les polynomes de $\mathbb{R}[x]$ a été grandement facilité; encore une fois, la référence à la classe a été très motivante pour une recherche dont les principes étaient les mêmes que ceux que les élèves ont à connaître mais amènent d'autres résultats. On objectera que les polynomes ne sont plus au programme du premier cycle; cela ne me paraît pas être une raison suffisante de les négliger.

J'ai distingué polynomes (suites d'éléments de C nulles à partir d'un certain rang) et fonctions polynomes (fonctions associées à ces suites), tout d'abord parce que j'ai constaté que l'apprentissage du mécanisme des opérations est facilité sur les polynomes et étendu ensuite sans difficultés aux fonctions, ensuite parce que si la confusion est sans danger dans $\mathbb{R}[x]$, il n'en est pas de même dans C[x]: un polynome peut ne pas avoir même degré que la fonction polynome associée, du fait de la non-intégrité de l'anneau C.

On a ainsi choisi quelques polynomes, dont on a calculé les valeurs, c'est-à-dire les images par la fonction polynome associée pour quelques éléments de C. Par exemple:

f = (Dietmar, Catherine, Brigitte, Sandrine, Raymond, ...)

f(x) = Dietmar + Catherine . x + Brigitte . x^2 + Sandrine . x^3

f(Raymond) = Dietmar ;

f(Dominique) = Dietmar + Catherine.Dominique + Brigitte.Dominique^2
+ Sandrine.Dominique^3 = Dietmar + Catherine.Dominique
+ Brigitte.Evelyne + Sandrine.Sylvie = Dietmar + Raymond + Sylvie
+ Paule = Dietmar.

On constate ici que Raymond et Dominique ont la même image qui est Dietmar.

f(Corine) = Dietmar + Catherine.Corine + Brigitte.Corine^2 + Sandrine.Corine^3
= Dietmar + Catherine.Corine + Brigitte.Martine + Sandrine.Corine
= Dietmar + Catherine + Brigitte + Marielle = Martine.

Il est assez facile de constater que ce polynome de degré 3 n'a pas de racine (car $20x^2 + 17x^3$ n'est jamais congru à 6 modulo 24). On peut donc aussi essayer de trouver des polynomes ayant un nombre de racines supérieur au degré, voire des polynomes non nuls tels que la fonction associée soit identiquement nulle ou des polynomes distincts tels que les fonctions associées soient égales. Ici, la recherche ne peut pas être faite par les élèves et n'est que prétexte à calcul; mais ce calcul se fait dans le cadre motivant de l'application à la classe.

Ainsi, il est tout à fait clair que le polynome (0,12,12,0...) de degré 2 est associé à la fonction polynome $12x^2 + 12x$, qui est identiquement nulle. Ce fait apparaît très vite aux bon élèves, qui n'ont besoin que de quelques essais pour le démontrer (si x est pair, x^2 est pair, 12a est nul; si x est impair, x^2 l'est aussi, 12a =12, et 12+12=0). Mais on peut proposer d'autres exemples moins évidents et qui pourront être à l'origine de calculs numériques.

On pourra ainsi s'assurer que le polynome de dégré 4:

(Raymond, Dominique, Christine, Gilles, Martine, Raymond...)

est associé à la fonction polynome:

Martine.x^4 + Gilles.x^3 + Christine.x^2 + Dominique.x + Raymond

qui est identiquement nulle. Evidemment, les calculs sont faits sur la fonction polynome correspondante de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, en utilisant les tables d'opération, ou en faisant le calcul dans $\mathbb{Z}$, en constatant après coup que le résultat est divisible par 24. On peut trouver d'autres exemples, en remplaçant des coefficients par leurs opposés. Ainsi, le polynome:

Martine.x^4 - Christian.x^3 - Sophie.x^2 + Dominique.x + Raymond

est égal au précédent. On pourra obtenir d'autres polynomes de degré 4 associés à la fonction nulle:
le polynome $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ est de ce type si les conditions suivantes sont réalisées:

$e = 0$; b et d pairs ; $c + \frac{d}{2}$ pair ; $2a + b$ et $2a + d$ multiples de 4 ; $a + c$ et $b + d$ congrus à 12 modulo 24.

Bien sûr, toutes les classes ne saisiront pas la différence qu'il peut y avoir entre polynome et fonction polynome. Même s'il n'est pas possible d'insister dans ce domaine, il ne me semble pas inutile qu'ils aient rencontré des cas où tout ne se passe pas aussi joliment que dans $\mathbb{R}$.

On peut aussi s'intéresser aux racines d'un polynome. C'est souvent un travail long, si on choisit le polynom e au hasard, mais les élèves le font pour le but ultime de la conversion des résultats chiffrés en résultats-élèves. On peut aussi choisir des cas plus simples, comme par exemple (Raymond, Raymond, Sylvie, Encarnacion, Raymond...) qui dans $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ s'écrit (0, 0, 6, 3, 0...) et sous forme de fonction:

dans C: Encarnacion.x^3 + Sylvie.x^2

dans $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$: $3x^3 + 6x^2$

Ce polynome de degré 3 admet 12 racines, tous les multiples de 2.

Pour une telle recherche, il est évidemment plus agréable de choisir un polynome ayant de nombreuses racines:chaque nouvelle découverte est un facteur de motivation pour la suite de la recherche; il peut aussi être intéressant de choisir un exemple où une méthode générale donne le résultat: certains bons élèves cherchent une telle méthode après quelques essais; on peut aussi choisir dans cette optique une fonction paire ou impaire.

10. Identités remarquables.

On sait qu'on a ici: $(a + b)^{24} = a^{24} + b^{24}$. Toutefois, une telle relation est trop difficile à démontrer en 4°. Il ne manque pas non plus d'exemples où $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Mais le terrain m'a paru mouvant, car trop d'élèves restent persuadés de la généralité d'une telle relation pour qu'on aille leur en montrer des exemples. J'ai donc renoncé à une incursion dans ce domaine, me contentant de faire effectuer des produits et des sommes de polynomes. Rien n'empêche de donner des exemples où les produits sont nuls, l'anneau C[x] n'étant pas plus intègre que C. On pourra inventer de nombreux exemples dont le produit est "directement" nul (par exemple:

$(6x^2 + 12x + 6)(4x^2 + 16x + 8) = 0$, car tous les produits de coefficients sont nuls). Plus intéressant, on vérifiera par exemple que:

$(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = x^4 + 10x^3 + 11x^2 + 2x$ (polynome associé à la fonction nulle, voir ci-dessus). En général, on a:

$C_n^p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p(p-1)\ldots 2.1}$; en particulier: $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$; le produit de 4 nombres consécutifs est divisible par 24. Donc, le produit des polynomes $(x + a)(x + a + 1)(x + a + 2)(x + a + 3)$ est donc un polynome de degré 4 associé à la fonction polynome nulle.

11. Equations.

Si on maîtrise bien les polynomes, on peut résoudre de nombreuses équations de degré supérieur ou égal à 1. Nous l'avons fait sans le dire dans bien des cas. On constatera qu'une équation de degré n n'a pas forcément n solutions. Par exemple, l'équation de degré 4 :

$$(x + 5)(x + 6)(x + 7)(x + 8) = (x + 15)(x + 16)(x + 17)(x + 18)$$

est indéterminée et vérifiée quel que soit x dans $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$. Au contraire, l'équation du premier degré $6x + 17 = 0$ n'a aucune solution.

Ici encore, tous les calculs sont faits dans $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, mais l'énoncé du problème et des résultats dans C éveille largement l'intérêt des élèves.

Les exemples ne manqueront pas suivant le résultat cherché, même si on se borne au premier degré.

12. ...

On peut sûrement trouver bien d'autres activités en partant de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, en établissant un isomorphisme avec une classe... Mon but n'était pas de refaire ici la théorie des anneaux ni de dresser une liste complète. Je serais heureux que des collègues complètent la liste de ces activités. Je me suis volontairement borné aux études faites en classe. Comme je l'ai déjà dit, les élèves les ont fort bien accueillies, sans doute à cause de leur aspect inhabituel; il m'a semblé que certains se sentaient plus impliqués à partir du moment où ils travaillaient "sur eux-mêmes". Il se trouvera peut-être un psychologue pour me dire que c'était une opération néfaste, mais tant pis: ils ont effectué sans rechigner des calculs que je n'aurais peut-être pas osé leur imposer dans le cadre traditionnel, et l'entraînement qu'ils ont ainsi effectué a eu des effets bénéfiques par la suite. Tant pis si on juge que ce type d'activité est un peu artificiel. Les élèves, eux, en ont redemandé.

Depuis toujours, j'essaye d'introduire une étude sur les groupes cycliques en 4°, avec par exemple $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Les élèves réagissent toujours en blasés qui ne s'étonnent de rien (en math, tout est possible!). C'est la première fois que je les vois s'intéresser ainsi à un problème sortant de l'ordinaire. Pour que l'information soit complète, j'ajouterai que la classe de 4° est très moyenne (voire même faible, à cinq ou six exceptions près), mais que personne ne s'est trouvé à la traîne. Enfin, un début d'étude a été également fait en 3°, où il avait été également très bien accueilli, mais n'a pu être développé faute de temps.

On pourra objecter qu'il est inutile que des élèves de 4° aient déjà rencontré des "cas pathologiques" et qu'ils ont assez de mal à assimiler les résultats obtenus dans $\mathbb{R}$. Je ne partage pas cette opinion; une vue un peu plus globale des choses ne me paraît pas contradictoire avec un apprentissage correct, et il est bon de mettre un frein à une faculté de généralisation galopante qui aura tôt fait de régler tous les problèmes avec l'unique machine qu'ils connaissent. Il me paraît bon au contraire qu'ils soient conscients très tôt qu'il n'y a pas de méthode générale. Même les structures n'auront pas tout unifié en mathématiques, et c'est bien heureux!

Alain BONNET

Table d'addition

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
13	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
14	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
15	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
16	16	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
17	17	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
18	18	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
19	19	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
20	20	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
21	21	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
22	22	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
23	23	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

Table de multiplication

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
3	0	3	6	9	12	15	18	21	0	3	6	9	12	15	18	21	0	3	6	9	12	15	18	21
4	0	4	8	12	16	20	0	4	8	12	16	20	0	4	8	12	16	20	0	4	8	12	16	20
5	0	5	10	15	20	1	6	11	16	21	2	7	12	17	22	3	8	13	18	23	4	9	14	19
6	0	6	12	18	0	6	12	18	0	6	12	18	0	6	12	18	0	6	12	18	0	6	12	18
7	0	7	14	21	4	11	18	1	8	15	22	5	12	19	2	9	16	23	6	13	20	3	10	17
8	0	8	16	0	8	16	0	8	16	0	8	16	0	8	16	0	8	16	0	8	16	0	8	16
9	0	9	18	3	12	21	6	15	0	9	18	3	12	21	6	15	0	9	18	3	12	21	6	15
10	0	10	20	6	16	2	12	22	8	18	4	14	0	10	20	6	16	2	12	22	8	18	4	14
11	0	11	22	9	20	7	18	5	16	3	14	1	12	23	10	21	8	19	6	17	4	15	26	13
12	0	12	0	12	0	12	0	12	0	12	0	12	0	12	0	12	0	12	0	12	0	12	0	12
13	0	13	2	15	4	17	6	19	8	21	10	23	12	1	14	3	16	5	18	7	20	9	22	11
14	0	14	4	18	8	22	12	2	16	6	20	10	0	14	4	18	8	22	12	2	16	6	20	10
15	0	15	6	21	12	3	18	9	0	15	6	21	12	3	18	9	0	15	6	21	12	3	18	9
16	0	16	8	0	16	8	0	16	8	0	16	8	0	16	8	0	16	8	0	16	8	0	16	8
17	0	17	10	3	20	13	6	23	16	9	2	19	12	5	22	15	8	1	18	11	4	21	14	7
18	0	18	12	6	0	18	12	6	0	18	12	6	0	18	12	6	0	18	12	6	0	18	12	6
19	0	19	14	9	4	23	18	13	8	3	22	17	12	7	2	21	16	11	6	1	20	15	10	5
20	0	20	16	12	8	4	0	20	16	12	8	4	0	20	16	12	8	4	0	20	16	12	8	4
21	0	21	18	15	12	9	6	3	0	21	18	15	12	9	6	3	0	21	18	15	12	9	6	3
22	0	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
23	0	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1