

Sur un thème : les moyennes

Les moyennes autres que la moyenne arithmétique sont peu ou pas du tout connues de la majorité des élèves de l'enseignement secondaire. Elles ont pourtant leur utilité et donnent lieu, en outre, à des activités variées à des niveaux différents : ces quelques lignes inspirées par des articles de la revue américaine "Mathematics Teacher" –que l'on peut consulter à la bibliothèque de l'IREM– et un article qui doit paraître dans le bulletin de juin de l'APMEP voudraient en témoigner. Quant à l'intérêt de ces activités, on s'en assurera ... en les proposant aux élèves !

Activité n° 1

On donne un rectangle ; on appelle a et b les longueurs de ses côtés. Dans ce qui suit, x désigne la longueur du côté d'un carré. On demande :

- 1) De déterminer x de façon que le carré ait le même périmètre que le rectangle
- 2) De déterminer x de façon que le carré ait la même aire que le rectangle
- 3) De déterminer x de façon que le rapport de l'aire au périmètre soit le même pour le carré et pour le rectangle
- 4) De déterminer x de façon que le carré ait sa diagonale de même longueur que celle du rectangle.

Commentaire :

On fait ainsi apparaître dans l'ordre les moyennes arithmétique ($\frac{a+b}{2}$), géométrique (\sqrt{ab}), harmonique ($\frac{2ab}{a+b}$), quadratique ($\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$) des deux nombres a et b .

On peut alors proposer une "généralisation" à trois dimensions.

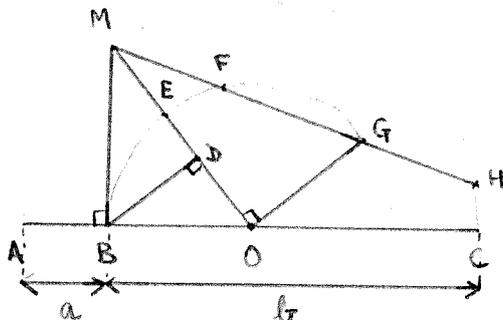
Activité n° 2

On donne un parallépipède rectangle ; on appelle a , b et c les longueurs de ses côtés. Dans ce qui suit, x désigne la longueur du côté d'un cube. Répondre à des questions "analogues" à celles de l'exercice précédent, en faisant intervenir périmètres, aires latérales, volumes, et leurs différents rapports. Noter les résultats qui présentent des analogies avec ceux de l'exercice précédent.

Commentaire :

Ce sont les périmètres, les volumes, les rapports des volumes aux aires latérales, les diagonales principales qui font apparaître dans le même ordre les différentes moyennes citées plus haut.

Activité n° 3



Enoncé (sibyllin) : On peut lire sur cette figure les moyennes arithmétique , géométrique, harmonique, quadratique des deux nombres a et b comme longueurs de segments issus de M. Quels sont ces segments ?

Commentaires :

- 1) D'autres énoncés sont possibles ...
- 2) Il s'agit dans l'ordre de MO, MB, MD, MG : le théorème de Pythagore suffit à le démontrer.
- 3) Ce résultat permet de "classer" ces quatre moyennes :
$$a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b$$
- 4) La démonstration algébrique de ces inégalités est un bon exercice d'application des règles de calcul algébrique (surtout lorsqu'on ne donne pas le résultat).

Activités suivantes

Lire le numéro de juin 1978 du "Bulletin de l'APMEP"...