# Le nombre π

par Maurice MIGNOTTE
(d'après les notes de G. MEHL)

## A) PARTIE HISTORIQUE

### 1. Introduction.

Par définition, le symbole $\pi$ désigne le rapport entre la longueur d'un cercle et celle de son diamètre.

Une valeur empirique approchée était connue depuis les temps les plus reculés (on l'obtenait en mesurant la circonférence avec une corde de longueur égale au diamètre du cercle), c'est ainsi que, dans la Bible, à propos d'un bassin circulaire dans le temple de Salomon, on donne la valeur 3 .

ARCHIMÈDE fut le premier à construire un algorithme permettant le calcul de $\pi$ avec une précision arbitraire. Il approchait la longueur du cercle par le périmètre de polygones réguliers inscrits et circonscrits ayant un nombre de côtés de plus en plus grand ; en prenant un polygone de 96 côtés, il obtint une valeur avec une erreur inférieure à deux millièmes.

Les premiers progrès véritables après ARCHIMÈDE n'eurent lieu qu'avec l'apparition du calcul infinitésimal. On obtint alors des développements en série de $\pi$ , comme celui de Leibnitz :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

En 1761, LAMBERT démontra l'irrationalité de $\pi$ .

LINDEMANN démontra, en 1882, la transcendance de $\pi$ , ce qui entraîne en particulier que la quadrature du cercle est impossible.

### 2. Calcul approché de $\pi$ .

Pour calculer $\pi$ , une formule simple, très connue des élèves de Taupe, est la formule de Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctg} \frac{1}{239} .$$

Signalons quelques étapes récentes dans la connaissance de $\pi$ avec un grand nombre de décimales.

1949 : REITWEISNER sur ENIAC, 2.000 décimales (70 h)

1958 : GENUYS sur IBM 704, 10.000 décimales (100 mn)

1961 : SCHANKS et WRENCH sur IBM 7090, 100.000 décimales (8 h)

Les deux premiers calculs utilisaient la formule de Machin. Le troisième utilisait l'expression :

$$\frac{\pi}{4} = 6 \text{ Arctg } \frac{1}{8} + 2 \text{ Arctg } \frac{1}{57} + \text{Arctg } \frac{1}{239}$$

due à STÖRMER.

Cette formule est beaucoup plus efficace que la précédente. D'abord, les dénominateurs sont plus grands que dans la formule de Machin, d'où une convergence plus rapide. De plus, le plus petit dénominateur qui apparaît dans la formule de Störmer est une puissance de 2, et, sur une machine binaire, le calcul des puissances de 8 se fera par simple décalage, d'où un gain de temps considérable.

Signalons une dernière formule, due à RAMANUJAN,

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4}\left(\frac{1123}{882} - \frac{22583}{(882)^3}\frac{1}{2} \times \frac{1.3}{4^2} + \frac{44043}{(882)^5}\frac{1.3}{2.4} \times \frac{1.3.5.7}{4^2.8^2} \ldots\right),$$

où les termes 1123 , 22583 , 44043 , ... sont en progression arithmétique.

## 3. Etude du développement décimal de $\pi$.

En connection avec la méthode de Monte-Carlo et le tirage d'échantillons en statistiques, il existe une demande croissante de suites de nombres au hasard. Il est alors naturel d'étudier si le développement décimal de certains nombres comme $x$ et $\pi$ fournit des listes de chiffres au hasard.

Les dix mille premières décimales de $\pi$ ont été analysées de ce point de vue par R. K. PATHRIA, et les tests appliqués ont montré que, dans l'ensemble, ce développement pouvait être considéré comme aléatoire.

Vu mon incompétence, pour des résultats précis, voir l'article de PATHRIA [7].

## 4. Calcul des réduites successives du développement de $\pi$ en fraction continue.

En 1969, utilisant les 25.000 premières décimales du développement de $\pi$ (calculé par SHANKS et WRENCH), K. Y. CHOONG, D. E. DAYKIN et C. R. RATHBORNE ont obtenu, sur IBM 1130, les 21.000 premières réduites de $\pi$.

La méthode de calcul des coefficients successifs est la suivante.

Prenons par exemple l'approximation $\overline{\gamma} = 0,5\ 7\ 7\ 2\ 1\ 5\ 6\ 6\ 4\ 9$ de la constante d'Euler $\gamma$. Le début du développement en fraction continue est obtenu ainsi :

On travaille avec deux variables $A$ et $B$. On initialise $A$ à zéro et $B$ à $0,5\ 7\ 7\ 2\ 1\ 5\ 6\ 6\ 4\ 9$. On forme ensuite $A + B$. La partie fractionnaire de $A + B$ est affectée en $A$ ou en $B$ selon que $A + B$ est plus petit que 1 ou non. Le procédé continue avec les nouvelles valeurs de $A$ et $B$. Ici on obtient successivement :

| | | |
|---|---|---|
| 0, 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 | A | |
| 0, 5 7 7 2 1 5 6 6 4 9 | B | |
| 0, 5 7 7 2 1 5 6 6 4 9 | A | $a_1 = 1$ |
| 0, 1 5 4 4 3 1 3 2 9 8 | B | $a_2 = 1$ |
| 0, 7 3 1 6 4 6 9 9 4 7 | A | $a_3 = 2$ |
| 0, 8 8 6 0 7 8 3 2 4 5 | A | |
| 0, 0 4 0 5 0 9 6 5 4 3 | B | $a_4 = 1$ |
| 0, 9 2 6 5 8 7 9 7 8 8 | A | $a_5 = 2$ |
| 0, 9 6 7 0 9 7 6 3 3 1 | A | |
| 0, 0 0 7 6 0 7 2 8 7 4 | B | $a_6 = 1$ |
| 0, 9 7 4 7 0 4 9 2 0 5 | A | |
| 0, 9 8 2 3 1 2 2 0 7 9 | A | $a_7 = 4$ |
| 0, 9 8 9 9 1 9 4 9 5 3 | A | |
| 0, 9 9 7 5 2 6 7 8 2 7 | A | |
| 0, 0 0 5 1 3 4 0 7 0 1 | B | |

On compte le nombre de A et de B successifs, et on obtient

$$1 , 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 4 , \ldots$$

qui est le début du développement en fraction continue de $\gamma$ .

Remarque. - Si on a choisi $\gamma$ au lieu de $\pi$ comme exemple, c'est par commodité, le développement de $\pi$ en fraction continue débute par :

$$3 , 7 , 15 , 1 , 292 , 1 , \ldots$$

Il va de soi qu'il faut un critère pour déterminer la limite $n$ telle que les développements en fraction continue d'un nombre $x$ et de sa valeur approchée $\overline{x}$ coïncident jusqu'à l'ordre $n$ , à ce sujet voir l'article cité.

Avant d'étudier en détail le début du développement de $\pi$ en fraction continue, rappelons quelques résultats de la théorie métrique des fractions continues (voir le livre de KHINČIN [2]).

(i) Pour presque tout réel $x$ (au sens de la mesure de Lebesgue), la fréquence d'apparition de $n$ , en tant que quotient partiel du développement en fraction continue de $x$ , est égale à :

$$\log((n + 1)^2/n(n + 2))/\log 2$$

(ii) Pour presque tout $x$ réel, on a

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\log q_h}{h} = \frac{\pi^2}{12 \log 2} : 1,1865 \ldots ,$$

où $q_h$ désigne le dénominateur de la h-ième réduite de $x$ .

Voici la table de comparaison entre les comportements de $\pi$ (21.230 premières réduites) et $\gamma$ (3.470 premières réduites), et la fonction théorique moyenne (i)

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence d'occurence de l'entier n pour $\pi$ | 0,4188 | 0,1694 | 0,0890 | 0,0577 | 0,0437 | 0,0278 | 0,0236 | 0,0189 | 0,0140 | 0,0120 |
| Fréquence ... pour $\gamma$ | 0,4225 | 0,1696 | 0,0905 | 0,0550 | 0,0435 | 0,0320 | 0,0210 | 0,0202 | 0,0118 | 0,0124 |
| Fréquence "théorique" (i) | 0,4150 | 0,1699 | 0,0931 | 0,0589 | 0,0406 | 0,0297 | 0,0227 | 0,0179 | 0,0144 | 0,0119 |

Voici aussi la liste des quotients partiels $> 2.000$ qui apparaissent dans les 21.230 premières réduites de $\pi$ .

| Indice i | 431 | 15.543 | 20.276 | 3.811 | 8.719 | 19.223 | 20.358 | 12.426 | 3.777 | 6.209 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quotient partiel $a_i$ | 20.776 | 19.055 | 18.127 | 8.277 | 7.444 | 4.767 | 4.415 | 4.264 | 2.159 | 2.050 |

On peut noter que le plus grand des $a_i$ , $a_{431} = 20.776$ , apparaît "très tôt". En contre partie, le nombre de valeurs des $a_i$ , $1 \leq i \leq 21.230$ , plus grands que 2.000 , à savoir dix valeurs, est relativement faible en comparaison avec la formule (i) qui conduirait à :

$$\frac{21.230 \log(2.002/2.001)}{\log 2} = 15,3 \ldots$$

Sachant que $q_{20.831}$ est compris entre $2^{35.578}$ et $2^{35.580}$ , on a

$$\frac{\log q_h}{h} = 1,1838 \ldots \quad \text{pour} \quad h = 20.831 ,$$

valeur proche de (ii).

Il paraît juste de signaler que WALLIS avait déjà obtenu le développement :

$\pi=[3;7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,1,84,2,1,1,15,3,13,1,4,2,6,6,1, \ldots]$

## 5. Le travail de MAHLER.

En 1952, MAHLER obtenait le remarquable résultat suivant :

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{42}} , \text{ si } q \geq 2 , \quad p , q \text{ entiers.}$$

En utilisant le calcul des 21.000 premières réduites de $\pi$ , ainsi que les estimations de $\frac{\psi(n)}{n}$ ($\psi$ fonction de Čebyšev, $\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p$ , $p$ premiers) de

ROSSER et SCHOENFELD, on peut montrer que :

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{20,6}} \quad \text{si} \quad q \geq 2 \text{ ,}$$

La démonstration de ce résultat (voir l'exposé aux Journées arithmétiques de Grenoble, 1973 [6]) est obtenue en suivant la méthode de MAHLER, mais en raffinant certaines majorations.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] CHOONG (K. Y.), DAYKIN (D. E.), RATHBORNE (C. R.). - Rational approximations to $\pi$, Math. Comp., t. 25, 1971, p. 387-392.

[2] KHINTCHIN (A. Ya.) [KHINČIN (A. Ja.)]. - Continued fractions. - Chicago, Univ. of Chicago Press., 1964 (Phoenix Science Series).

[3] LAMBERT (J.). - Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques, Mémoires Acad. Sc. Berlin, 1761, (publ. 1768), p. 265-322 ; Opera Mathematica, Vol. 2, p. 112-159. - Zürich, O. Füssli, 1948.

[4] LINDEMANN (F.). - Sur le rapport de la circonférence du diamètre et sur les logarithmes népériens des nombres commensurables ou des irrationnelles algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 95, 1882, p. 72-74.

[5] MAHLER (K.). - On the approximation of $\pi$, Proc. Nederl. Akad. Wet., Series A, t. 56 (= Indag. Math., t. 15), 1953, p. 29-42.

[6] MIGNOTTE (M.). - Approximations rationnelles de $\pi$ et quelques autres nombres, Journées arithmétiques de France [1973 Grenoble].

[7] PATHRIA (R. K.). - A statistical study of Randomness among the first 10,000 digits of $\pi$, Math. Comp., t. 16, 1962, p. 188-197.

[8] RAMANUJAN (S.). - Modular equations and approximations to $\pi$, Quart. J. pure and applied Math. t. 45, 1914, p. 350-372 ; Collected papers of Srinivasa Ramanujan, p. 23-39. - Cambridge, at the University Press, 1927.

[9] ROSSER (J. B.) and SCHOENFELD (L.). - Approximate formules for some functions of prime numbers, Illinois J. Math., t. 6, 1962, p. 64-94.

[10] SHANKS (D.) and WRENCH (W. J. Jr). - Calculation of $\pi$ to 100.000 decimals, Math. Comp., t. 16, 1962, p. 76-99.

## B) DEMONSTRATION DE L'IRRATIONALITE DE $\pi$

Nous démontrons le théorème suivant

**Théorème** : si $r > 0$ est un nombre rationnel alors $\cos r$ est irrationnel.

Conséquence : si $\pi$ était rationnel alors $\cos \pi$ devrait être irrationnel, ce qui est faux ($\cos \pi = -1$)
donc, $\pi$ est irrationnel.

Ce théorème, apparemment plus difficile ne peut être évité (on l'utilise toujours plus ou moins). La plus facile des démonstration de l'irrationnalité de $\pi$ a été donnée par NIVEN vers 1950.

Soit $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$ posons $r = \frac{a}{b}$ $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$.

La démonstration du théorème va se faire en plusieurs étapes.

1) Construction d'une fonction auxilliaire :

$$f(x) = \frac{x^{p-1} (a - bx)^{2p} (2a - bx)^{p-1}}{(p-1)\,!}$$

p étant un nombre premier ($p \geqslant 3$) son choix sera précisé ultérieurement selon "les bésoins" de la démonstration.

Considérons alors $I = \int_0^r f(x) \sin x \, dx$ .

2) Majoration de $|I|$

On voit facilement (en mettant b en facteur) qu'on peut écrire

$$f(x) = \frac{(r - x)^{2p} (r^2 - (r - x)^2)^{p-1} \quad b^{3p-1}}{(p - 1)\,!} .$$

Pour $0 \leqslant x \leqslant r$ on aura $0 \leqslant r - x \leqslant r$

$r^2 - (r - x)^2 \leqslant r^2$

donc

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{r^{4p-2} \, b^{3p-1}}{(p - 1)\,!}$$

et comme $|\sin x| \leqslant 1$ on aura :

$$|I| \leqslant \frac{r^{4p-1} \, b^{3p-1}}{(p - 1)\,!}$$

3) Minoration de $|I|$

Cette minoration est plus délicate et va se faire en plusieurs étapes.

a) Une "formule pour I"

Considérons $F(x) = f(x) - f^{(2)}x + f^{(4)}x - f^{(6)}x + \ldots\ldots - f^{(4p-2)}(x)$,
$f^{(k)}$ désignant la dérivée $k^{\text{ième}}$ de f.

Alors,

$$\frac{d}{dx}\,(F'(x)\sin x - F(x)\cos x) = F^{(2)}x\sin x + F(x)\sin x$$
$$= f(x)\sin x$$
$$(\text{car } F'' + F = f)$$

donc,

$$I = \int_0^r f(x)\sin x\,dx = F'(r)\sin r - F(r)\cos r + F(0)$$

or f est un polynome en $(x - r)$ qui est pair,
f' est un polynome en $(x - r)$ qui est impair, donc $f'(r) = 0$
f'' est un polynome en $(x - r)$ qui est pair,
$f^{(3)}$ est un polynome en $(x - r)$ qui est impair, donc $f^{(3)}(r) = 0$

et ainsi :

$$F'(r) = 0\,.$$

On a donc

$$I = -F(r)\cos r + F(0)\,.$$

Etudions les quantités $F(r)$ et $F(0)$.

b) Etude de F(0)

$f(x)$ est de la forme $\dfrac{x^{p-1}\,g(x)}{(p-1)\,!}$ où $g(x)$ est un polynome à coefficients entiers.

$F(0)$ est une somme de dérivées de f en 0.

. $f^{(j)}(0) = 0$ si $j < p-1$ (car on peut mettre x en facteur)

. $f^{(p-1)}(0) = a^{2p}(2a)^{p-1}$ (formule de Leibnitz par exemple)

. si $j \geqslant p$ $f^{(j)}(0)$ est un entier divisible par p.

On va imposer comme condition $p > a$
alors $f^{(p-1)}(0)$ est un entier qui n'est pas divisible par p donc comme $F(0)$ est une somme de multiples de p et d'un seul qui n'est pas divisible par p on peut conclure

$F(0)$ est un entier, non divisible par p.
(Donc automatiquement $F(0) \neq 0$.)

c) Etude de F(r)

Posons $h(x) = f(r-x) = \dfrac{x^{2p}(a^2 - b^2x^2)^{p-1}\ b^{p+1}}{(p-1)\,!}$ ,

alors $f^{(j)}(r) = \pm\ h^{(j)}(0)$ ,

donc

F(r) est une combinaison de dérivées en 0 de h.

En utilisant la même méthode, on obtient :

. $f^{(j)}(r) = 0$ si $j < 2p$

. $f^{(j)}(r)$ est un entier divisible par p si $j \geq 2p$

donc,

F(r) est un entier divisible par p.

4) Conclusion

Supposons que $\cos r = \frac{s}{t}$ , s et t entiers .

Posons $J = tI = -t\,F(r)\cos r + t\,F(0)$ ,

$J = -\,s\,F(r) + t\,F(0)$ ,

J est un entier.

F(r) est un entier divisible par p donc $-\,s\,F(r)$ est un entier divisible par p.

Supposons $p > t$ ,

alors $t\,F(0)$ est un entier non divisible par p.

Donc,

J est un entier non divisible par p et J sera donc un entier non nul.

D'autre part

$$|J| \leq \frac{t\,r^{-1}\,b^{-1}\,(r^4b^3)^p}{(p-1)\,!} = \frac{k\,c^p}{(p-1)\,!}$$ en posant $k = tr^{-1}b^{-1}$ ,

$c = r^4b^3$ .

On sait que $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{c^p}{p\,!} = 0$ ,

donc $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{k\,c^p}{(p-1)\,!} = 0$ .

On choisira $p \geq p_0$ pour que $|J| < 1$.

Si on suppose cos r rationnel on arrive alors à trouver un entier J non nul tel que $|J| < 1$ , ce qui est absurde.