L'HOMME & LA MACHINE

THEME DE REFLEXION POUR LES TERMINALES A

L'un des sujets de Terminale du Rallye mathématique d'Alsace 1977 concernait le suite de Fibonacci, le fils de Bonacci connu aussi sous le nom de Leonardo de Pise (1175 ? - ?). Tandis que j'assurais à Mulhouse, en compagnie de Glaeser le bon déroulement de l'épreuve, celui-ci m'apprenait un fait au prime abord étrange :

La dite suite définie par la relation de récurrence :

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

converge vers 0 si $u_o = 1$ et $u_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (le conjugué du nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$).

Mais si l'on tente de conjecturer sa limite à l'aide d'une calculatrice de poche, on a la surprise de constater qu'elle est infinie.

L'intendant du lycée de Fribourg (qu'il soit ici hautement remercié) nous ayant fourni, malgré les faibles crédits alloués chaque année aux mathématiques une calculatrice programmable, la TI 58, toutes les conditions étaient réunies, qui permettaient d'étudier le dilemme de Glaeser.

Pour ce qui concerne la convergence, on peut établir que u_n est une suite géométrique de raison $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

En effet : $u_o = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0$ $u_1 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$.

Supposons que l'on ait $u_{n-1} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ et $u_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$u_{n+1} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\right)$. Or ce dernier facteur égal à $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ n'est autre que $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$. Il en résulte :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

u_n est donc bien une suite géométrique de pr'mier terme 1 et de raison $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
La valeur absolue de ce nombre étant inférieure à 1, on déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

```
LRN
2nd  Lbl
A
STO  00
RS
2nd  Lbl
B
STO  01
RS
RCL  00
+
RCL  01
STO  00
=
2nd  Pause
STO  01
GTO  10
LRN
```

Si maintenant, on utilise la calculatrice TI 58 avec le programme ci-contre où l'on introduit après le dernier LRN, 1 en A et $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ en B, après avoir frappé la touche RS on voit apparaître d'abord des nombres alternativement positifs et négatifs dont la valeur absolue diminue, puis des nombres positifs devenant de plus en plus grands :

$u_o = 1$

$u_1 = -0,6I80033988I$

$u_2 = +0,38I9660II3$

$u_3 = -0,2360679775$

. . . .

$u_{29} = -0,0000005077$

$u_{30} = 0,00000II23I$

$u_{31} = 0,0000006I54$

$u_{32} = 0,00000I7385$

. . . .

$u_{60} = 1,08958949I$

. . . .

$u_{200} = 1,9748428 \cdot 10^{29}$

MORALITÉ : La plus belle calculatrice du monde ne peut donner que ce qu'elle a : Des nombres décimaux.

Lucien Augé
(lycée de Fribourg)