Sujets du Rallye Mathématique d' Alsace

N.D.L.R. L'Ouvert publie ici les textes des sujets du rallye mathématique d'alsace depuis sa création en 1974. Le rallye a pour but de développer l'esprit de recherche des élèves. Cela ne peut se faire que si les professeurs possèdent également cet esprit de recherche, c'est-à-dire s'ils n'hésitent pas à "sécher", y compris devant leurs élèves, sur des questions souvent très spécialisées qui n'ont qu'un lointain rapport avec le programme. Une telle attitude, bien comprise, ne peut qu'augmenter le respect des élèves envers leur professeur.

Il n'est donc pas question de publier en outre des corrigés modèles ou des indications de solutions. Ce serait tuer dans l'oeuf toute velléité de recherche. Il vaut mieux collaborer avec des collègues ou avec les organisateurs du rallye, madame Ramis et monsieur Iss qui se tiennent à votre disposition, ou, pourquoi pas, avec ses élèves pour résoudre les exercices et ne pas se décourager si l'on obtient qu'un résultat partiel. Combien de grandes découvertes mathématiques sont dues à l'oeuvre de plusieurs savants, chacun reprenant les travaux de ses prédécesseurs !

RALLYE 1974

(En 1974, année de la création du Rallye, les sujets proposés étaient communs aux élèves de Première et de Terminale.)

1) Les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, peuvent-ils être trois termes d'une même progression arithmétique ?
(On rappelle que si a et h sont deux nombres réels, la progression arithmétique de raison h et de premier terme a est la suite dont les termes sont $u_n = a + nh$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

2) Si S est un sous ensemble non vide d'un espace affine euclidien de dimension 3 possédant la propriété :
"L'intersection de S avec tout plan affine E est vide ou est un cercle de rayon éventuellement nul",
peut-on affirmer que S est une sphère ?

3) Etant donné un nombre entier naturel N quelconque différent de zéro, on effectue les opérations suivantes :
- on écrit N dans le système décimal,
- on calcule la somme des carrés de ses chiffres,
- on écrit le nombre obtenu dans le système décimal et l'on recommence ces opérations à partir de ce dernier nombre, etc...

Exemple : N = 1 0 8 5 9 4 2

$1^2 + 0^2 + 8^2 + 5^2 + 9^2 + 4^2 + 2^2 = 191$

$1^2 + 9^2 + 1^2 = 83.$

Montrer qu'au bout d'un nombre fini de telles opérations on obtient :
- ou bien le nombre 1,
- ou bien le nombre 145 et à partir de ce nombre, le cycle :
145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89.

RALLYE 1975

Classe de Première

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\sqrt{x + 4 - 4\sqrt{x}} + \sqrt{x + 9 - 6\sqrt{x}} = 1.$$

2) Une usine textile stocke de la moquette par rouleaux. Les bandes de moquette sont enroulées sur des cylindres en bois de 20 cm de diamètre. L'épaisseur de la moquette est 1 cm. Donner (en cm) un encadrement de la longueur d'une bande de moquette pour que le rayon du rouleau correspondant soit 50 cm à 0,5 cm près : on indiquera l'erreur maximum que l'on peut se permettre en mesurant la longueur de la bande.

3) (Ce problème concerne un plan affine euclidien.)
On donne quatre points du plan, non cocycliques et tels que toute droite contienne au plus deux de ces quatre points.
Trouver les cercles équidistants de ces quatre points.
(La distance d'un cercle Γ à un point A est la plus courte des longueurs AM lorsque M parcourt Γ).

Classe de Terminale

1) Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}^*$ l'équation :

$$1 + \cos^2 ax = \cos 2\pi x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

admet-elle une infinité de solutions ?

2) Démontrer que, parmi sept entiers non nuls consécutifs, il en existe toujours au moins un qui est premier avec chacun des six autres.

3) (Ce problème concerne l'espace affine euclidien usuel de dimension trois.)
Soient A et B deux points d'une sphère dont D_1 et D_2 sont deux diamètres distincts.

Imaginer un cas de figure où il n'est pas possible de passer de A à B par <u>deux</u> rotations seulement, l'une d'axe D_1, l'autre d'axe D_2.

Montrer que l'on peut passer de A à B par une <u>suite finie</u> de rotations effectuées alternativement autour de D_1 et D_2.

(Autrement dit : montrer qu'il existe des points $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$ tels que pour tout i, on passe de A_i à A_{i+1} par une rotation convenable d'axe D_1 ou D_2.)

RALLYE 1976

Classe de Première

1) Problème de "la règle trop courte" :
Un dessinateur dispose, pour seuls instruments, d'un double-décimètre de trés bonne qualité et d'un crayon. Sur sa feuille de dessin sont marqués deux points A et B dont la distance peut être évaluée grossièrement entre 50 et 70 cm.
Comment peut-il se débrouiller avec ce matériel pour tracer le segment de droite $[A,B]$ et le mesurer avec la précision que lui permet son double décimètre ?

2) Soit a, b, c trois nombres réels non nuls. Trouver tous les triplets (x,y,z) de réels vérifiant le système des trois équations suivantes :

$$y^2 + z^2 = axyz \qquad z^2 + x^2 = bxyz \qquad x^2 + y^2 = cxyz.$$

3) (Ce problème concerne le plan affine usuel.)
Relativement à un repère cartésien du plan, on donne cinq points à coordonnées entières, tous distincts. Montrer qu'il existe au moins deux de ces points formant un segment (non réduit à un point) dont le milieu soit aussi un point à coordonnées entières.

Classe de Terminale

① Démontrer la congruence :

$$2^{147} - 1 \equiv 0 \mod (343) \quad \text{(autrement dit : 343 divise } 2^{147} - 1\text{)}.$$

② Démontrer la relation suivante entre réels :

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2}(5\sqrt{5} + 11)} - \sqrt[5]{\frac{1}{2}(5\sqrt{5} - 11)} = 1.$$

③ (Ce problème concerne l'espace affine euclidien usuel de dimension 3.)

DONNEES :

$\boxed{A}$ Sur un carré (A,B,C,D) on fait la construction suivante :
Soit O le centre du carré et I', J', K', L' les milieux respectifs de $[A,B]$, $[B,C]$, $[C,D]$, $[D,A]$. Puis on considère le carré (I,J,K,L), déduit de (I',J',K',L') par l'homothétie de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$.

$\boxed{B}$ On donne maintenant un cube, dont les arêtes ont la longueur a ($a > 0$). Sur chacune des six faces, on procède à la construction indiquée en $\boxed{A}$; les six carrés analogues à (I,J,K,L) forment donc un ensemble de 24 points. On désigne par $\mathcal{P}$ le polyèdre convexe ayant pour sommets ces 24 points. ($\mathcal{P}$ est appelé : le polyèdre de Lord Kelvin associé au cube).

$\boxed{C}$ Sur le cube donné en $\boxed{B}$ on considère une face (A,B,C,D) ; soit $\mathcal{T}$ le tétraèdre régulier inscrit dans le cube et dont A et C sont deux sommets.

QUESTION

Faire une figure claire, sur laquelle $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ soient représentés de manière à rendre aisé le calcul (en fonction de a) du volume de chacun des solides $\mathcal{P} \cup \mathcal{T}$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{T}$.
Calculer ces volumes.

N.B. : On rappelle que le volume V d'une pyramide de hauteur h limitée par un polygone de surface S, est $V = \frac{1}{3}Sh$.

RALLYE 1977

Classe de Première

① Dans un terrain minier des plaines du Nord, ont été creusées deux galeries rectilignes obliques et non situées dans un même plan. On désire les joindre par une galerie rectiligne horizontale souterraine la plus courte possible. Le problème admet-il une solution ? Si oui, où et dans quelle direction doit-on commencer à creuser ?

② (Cette question concerne le plan affine euclidien usuel.)
Un disciple de Pythagore vint un jour, tout heureux, lui annoncer une découverte : "Je viens, lui dit-il, d'inventer une construction à la règle et au compas de l'heptagone régulier convexe (polygone régulier convexe à sept côtés).
Voici mon procédé : Je trace un cercle Γ, et un triangle équilatéral ABC inscrit dans Γ, puis à partir de A comme centre, je mène un arc de cercle de rayon égal à la moitié de la longueur AB : cet arc vient couper Γ en D. Je dis que $[A,D]$ est le côté d'un heptagone régulier convexe inscrit dans Γ".
Que pensez-vous de la valeur scientifique de la découverte de l'élève de Pythagore ?
Justifiez votre réponse par une démonstration.

③ Pour tout réel positif x, on désigne par $[x]$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier naturel inférieur ou égal à x.
On donne deux entiers naturels non nuls p et q, avec $q \geq 2$, qui soient premiers entre eux. (Cela signifie que le seul nombre entier qui divise à la fois p et q est 1.)
Démontrer que les deux nombres entiers A et B définis ci-dessous sont égaux :

$$A = \frac{1}{2}(p-1)(q-1)$$

$$B = \left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \ldots + \left[\frac{kp}{q}\right] + \ldots + \left[\frac{(q-1)p}{q}\right] = \sum_{k=1}^{q-1} \left[\frac{kp}{q}\right]$$

Classe de Terminale

(1) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de FIBONACCI : c'est, par définition, la suite d'entiers naturels que l'on obtient par récurrence à l'aide des relations :

$$U_0 = U_1 = 1 \text{ ; et, pour tout } n \geq 2,\ U_n = U_{n-1} + U_{n-2}.$$

Démontrer que tout entier naturel non nul N peut être représenté d'une manière et d'une seule dans la forme :

$$N = U_{n_2} + \ldots + U_{n_k},$$

avec $k \geq 1$ et $n_{j-1} \geq n_j + 2$ pour $j = 2, j = 3, \ldots, j = k$.

(2) On donne un entier naturel n supérieur ou égal à 2 ; déterminer le plus grand diviseur commun aux $n - 1$ nombres

$$C_n^1,\ C_n^2,\ \ldots,\ C_n^{n-1}, \text{ (c'est-à-dire : aux } C_n^k,\ 1 \leq k \leq n-1).$$

(Le nombre C_n^k est le coefficient binomial, dont on rappelle la valeur :

$$C_n^k = \frac{n!}{p!(n-p)!}\quad .)$$

(3) Cette question concerne le plan affine euclidien usuel P.
Dans P, on donne deux cercles distincts Γ_1 et Γ_2 ; construire à l'aide de la règle et du compas seuls les points M de P ayant
la propriété suivante :
Il existe une tangente Δ_1 à Γ_1 passant par M, touchant Γ_1 en le point T_1, et une tangente Δ_2 à Γ_2 passant par M, touchant Γ_2 en T_2, telles que Δ_1 et Δ_2 soient orthogonales et que les longueurs des segments $[M, T_1]$ et $[M, T_2]$ soient égales. (1)

(1) Par définition, on dit qu'une tangente Δ à un cercle Γ touche Γ au point T pour exprimer que T est le point de contact de Γ et de Δ .

RALLYE 1978

Classe de Première

(1) On considère l'ensemble des entiers 1,2,3,...,n. Combien admet-il de parties de k éléments (k entier donné) ne contenant aucune paire d'entiers consécutifs ?

(2) On donne n chiffres $a_1, a_2, \ldots a_n$ arbitraires. Montrer qu'il existe un entier naturel tel que l'écriture décimale de sa racine carrée a pour premiers chiffres après la virgule $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pris dans cet ordre.

(3) Un bloc de bois a la forme d'un parallélépipède rectangle ; sur trois de ses faces ayant un sommet commun, on marque un point. On se propose de scier le bloc de bois suivant le plan passant par ces trois points.
Trouver une construction géométrique du contour de la section sur le parallélépipède (on ne demande pas de discuter les différentes formes de la section obtenue suivant la position des trois points).

Classe de Terminale

(1) Dans l'espace affine euclidien de dimension trois, on donne deux cercle C_1 et C_2 de même rayon et d'axes non coplanaires.
Déterminer toutes les rotations qui transforment C_1 en C_2.

(2) Soit p un nombre entier premier supérieur ou égal à 5 ; on écrit le rationnel

$$S_p = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}$$

sous la forme irréductible

$$S_p = \frac{A_p}{B_p}$$

($A_p \in \mathbb{N}^*$, $B_p \in \mathbb{N}^*$, A_p et B_p premiers entre eux).
Démontrer que A_p est divisible par p^2.

(3) Dans une fonderie, une cuve ayant le forme d'un cube ouvert à sa face supérieure, est mobile autour d'un axe horizontal passant par les centres de deux faces opposées. On fait couler le métal en fusion, qui remplit la cuve, en inclinant celle-ci ; on admettra que lors de l'écoulement, la surface du liquide reste plane est affleure le bord de la cuve. Sachant que l'écoulement se fait à débit constant, déterminer la relation liant le temps et l'angle d'inclinaison de la cuve. Représenter graphiquement cette relation.