Calcul pratique de $\log_{10} 2$

RAPPEL : De même que tout nombre réel peut s'écrire sous forme d'un développement décimal illimité, il peut aussi s'écrire, en base deux, sous forme d'un développement "bicimal" illimité qui ne contiendra donc que des 1 et des 0. Par exemple : 10,1011 vaut $2^1 + 0 \times 2^0 + 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}$ soit en notation décimale : 2,6875 .

Considérons alors le développement binaire illimité de $\log_{10} 2$:

$$\log_{10} 2 = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_i \ldots\ldots \qquad \text{où les } \alpha_i \text{ sont dans } \{0 , 1\}$$

$$= \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} + \ldots\ldots + \frac{\alpha_i}{2^i} + \ldots\ldots$$

et il est clair que ce nombre est compris entre 0 et 1 d'après l'étude de la fonction $\log_{10}$. En prenant l'exponentiel de base 10 des deux membres, on écrit :

$$10^{\log_{10} 2} = 2 = 10^{\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_i}{2^i} + \cdots}$$

Le dernier membre (ainsi que toute expression de la même forme) est encadré par 1 et 10. Elevons au carré les deux membres de la dernière égalité :

$$4 = 10^{\alpha_1} \times 10^{\frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_3}{2^2} + \cdots \frac{\alpha_i}{2^{i-1}} + \cdots} = 4 \times 1$$

Comme 10^{α_1} vaut 1 ou 10 et que le deuxième facteur est compris entre 1 et 10 il vient nécessairement :

1º) $10^{\alpha_1} = 1$, donc : $\alpha_1 = 0$

2º) $4 = 10^{\frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_3}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_i}{2^{i-1}} + \cdots}$

Elevons au carré les deux membres de la dernière égalité

$$16 = 10^{\alpha_2} \times 10^{\frac{\alpha_3}{2} + \cdots \frac{\alpha_i}{2^{i-2}} + \cdots} = 1,6 \times 10$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, il en résulte :

1º) $10^{\alpha_2} = 10$, donc : $\alpha_2 = 1$

2º) $1,6 = 10^{\frac{\alpha_3}{2} + \cdots + \frac{\alpha_i}{2^{i-2}} + \cdots}$

Elevons au carré ....

A chaque étape, une élévation au carré nous conduit à :

* si le résultat à gauche dépasse 10 le α_i correspondant est égal à 1.
* sinon, le α_i correspondant est égal à 0 .

Il suffit d'écrire un tableau de nombre à trois colonnes :

Dans la première colonne : un nombre s'obtient par élévation au carré du nombre précédent et division éventuelle par 10 pour le ramener entre 1 et 10 . Le premier nombre écrit est 2 .

Dans la deuxième colonne : celle des α_i on place un 1 s'il y a eu division par 10 dans la première colonne, un 0 sinon.

Dans la troisième colonne : un nombre s'obtient par division par deux du nombre précédent. Le premier nombre écrit est 1 . On raye ensuite ceux qui se trouve en face d'un α_i nul.

La valeur de $\log_{10} 2$ se lit en base deux dans la colonne des α_i de haut en bas, ou en base dix en faisant la somme des valeurs non barrées de la troisième colonne.

2	0,	~~1,~~
4	0	~~5~~
16	1	25
2,56	0	~~125~~
6,5536	0	~~625~~
42,9496729 6	1	3125
18,4467440 7 . .	1	15625
3,40282366 8 . .	0	~~78125~~
11,5792089 2 . .	1	390625
1,34078079 2 . .	0	~~1953125~~
1,79769313 2 . .	0	~~9765625~~
3,23170059 7 . .	0	~~48828125~~
10,4438887 5 . .	1	244140625
1,09074812 2 . .	0	~~1220703125~~
1,18973146 6 . .	0	~~6103515625~~
1,41546096 1 . .	0	~~30517578125~~
2,00352973 2 . .	0	~~152587890625~~
4,01413138 7 . .	0	~~762939453125~~
16,1132507 9 . .	1	3814697265625
2,59636851 0 . .	0	~~190734863281 2~~.
6,74112944 0 . .	0	~~953674316406~~. .
45,4428261 3 . .	1	476837158203 . .
20,6505044 7 . .	1	238418579101 . .
4,26443334 9 . .	0	~~119209289550~~. .
18,1853917 9 . .	1	59604644775 . .
3,30708474 6 . .	0	~~29802322387~~. .
10,9368095 2 . .	1	14901161193 . .

Ainsi $\log_{10} 2$ = 0 , 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 . .

en base deux. Et l'addition des nombres non barrés à droite donne :

$$\log_{10} 2 = 0,3010299950838\ldots$$

il aurait fallu trouver : $0,3010299956 64\ldots.$

9 décimales seulement sont exactes ; j'ai manqué de patience !

VIRICEL
d'après une idée de J.M. Becker

LE SOUTIEN ; TOUT LE SOUTIEN ; RIEN QUE LE SOUTIEN !

1º) Sur le plan psychologique et affectif : (...) Sans aller jusqu'au viol de la personnalité, le soutien va permettre d'établir de nouveaux rapports dans la classe cette fois. (...)

2º) Sur le plan de l'organisation : (...) Sera-ce temps perdu que leur apprendre (aux élèves) à avoir dans la giberne tout ce qu'il faut et rien que ce qu'il faut ? (...)

3º) Sur le plan pédagogique

Oserai-je rappeler que tous les élèves n'ont ni un rythme standard, ni un appétit identique. Le Soutien est un moyen d'en tenir compte. Dire qu'on perd 1 h. n'est pas sérieux (se mettre au travail 5 mn. en retard le matin, après la récréation, à 14 h. et après 16 h. représente 1 h.1/2 /semaine !!).

- Le cours face à toute une classe permet-il d'interroger ou faire parler tous les élèves ? (Le soutien le permet). (...)

- Le soutien (3 h. sur 24) ne remplace-t-il pas avantageusement les 10 % ?

- Pour effectuer en fin d'année une sortie (dont l'intérêt pédagogique n'est pas toujours évident, se préoccupe-t-on toujours des instants perdus ? (...)

4º) En conclusion, (...) il y a des moments où maître et élèves abordent ensemble une notion nouvelle, il en est où le maître ne se sent pas indispensable sur l'instant, c'est l'approfondissement, il en est enfin où maître et élèves seront un peu plus que maître et élèves : c'est le soutien. (...)

Extraits d'une note de service d'un principal d'un collège d'Alsace.