# Analyse Non - Standard

d'après un exposé fait au séminaire LOI (Février 78)

G. REEB
A. TROESCH
E. URLACHER

## PREMIERE PARTIE : POLEMIQUE.

INTRODUCTION : Un schéma (1) simple mais fondamental permet de comprendre le mécanisme de l'analyse non standard, il se résume en quelques lignes. On considère un langage $\mathcal{L}$ [pour nos besoins il est loisible de choisir pour $\mathcal{L}$ la langue parlée par tel traité d'analyse cher au lecteur, par exemple $\mathcal{L}$ sera le "Valiron" ou les textes dignes d'être incorporés au "Valiron"] et deux mathématiciens M et $M^*$ qui (ne) parlent (que) $\mathcal{L}$ . Il s'agit d'accepter le principe (ou schéma) suivant :

---

(1) Il y a, pour sûr, une grande marge entre l'acceptation du schéma proposé et la démonstration de la consistance de ce schéma avec la mathématique classique. Cette démonstration ne nous concerne pas ici. Encore est-il bon d'observer que la vue suivante : "le schéma peut être substitué à l'axiome du choix dans l'édification de la mathématique classique" est, à peine, utopiste.
Il est opportun de signaler ici l'excellent article, à l'intention de l'utilisateur, de NELSON dans B A M S (Novembre 1977) .

($\Sigma$) Le mathématicien $M^*$ est plus riche en objets que $M$ . [en particulier la liste [1] des nombres réels de $M^*$ est plus longue que la liste des nombres réels de $M$ ] .

Dès lors que le schéma $\Sigma$ est accepté, la comparaison des certitudes de $M$ et $M^*$ [certitudes exprimées dans les mêmes termes par $M$ ou $M^*$ et dans le langage $\mathcal{L}$ ] permettent d'intéressantes constatations [exprimées quant à elles dans la langue de celui qui fait la comparaison] . Ainsi il y aura dans l'univers de $M^*$ un réel $\alpha > 0$ , tel que l'inégalité $\alpha < a$ soit vérifiée pour tout réel $a > 0$ choisi dans l'univers de $M$ . Un tel $\alpha$ sera appelé un infiniment petit.

Ce n'est pas le lieu ici de développer les conséquences du schéma $\Sigma$ ; d'excellents ouvrages ont été conçus dans cette intention, de plus on peut se familiariser rapidement avec la technique. Rappelons simplement que l'on aboutit ainsi à une théorie cohérente et utile des"infinitésimaux".

Dans la deuxième partie de notre exposé, nous utiliserons librement ces grandeurs infinitésimales.

DIGRESSION :

Depuis la nuit des temps, on connaît des situations présentant une analogie[2] plus ou moins valable avec le schéma $\Sigma$ , qu'il s'agisse de littérature, d'ésotérisme, de rhétorique, de typologie .... La lecture à plusieurs niveaux de beaucoup de textes n'a rien de mystérieux. L'exemple suivant nous semble relever typiquement d'un schéma $\Sigma$ : il s'agit de la boutade célèbre attribuée à B. SCHAW : << Anglais, Américains, deux peuples séparés par une langue commune >> .

---

(1) Il n'est évidemment pas question de chercher l'une ou l'autre de ces listes dans "Valiron". (Cet ouvrage se contente d'évoquer, à l'occasion, des propriétés des nombres réels, par exemple << 2 est un nombre réel >> ) .

(2) Certaines situations éthniques qualifiées - quelque peu improprement - par le terme de "bilinguisme" doivent être évoquées ici. On y rencontre deux cultures $M^*$ et $M^{**}$ et une langue $\mathcal{L}$ propre à décrire $M^*$ et $M^{**}$ ; la langue $\mathcal{L}$ est le privilège de l'ethnie bi-lingue.

PREVENTIONS :

Il n'est guère surprenant que la naissance et les premiers développements de l'analyse non-standard aient déclenché un tollé général: les protestations,préventions, préjugés et dogmatismes se sont donné libre cours ; citons quelques uns des a priori :

i) L'analyse non-standard n'apprend pas à "majorer ou minorer" [comme si "Valiron" ignorait la pratique et la vertu des majorations] .

ii) "Peu nous importe une théorie qui reprenne les espoirs déçus des analystes du 18$^{e}$ siècle" [comme si les plus grands mathématiciens n'avaient pas constamment clamé leur nostalgie devant l'abandon - qui leur semblait inévitable - de tout recours à la notion d'infinitésimaux] .

iii) "Il est remarquable de pouvoir s'exprimer ainsi (entendez : selon les règles de l'analyse non-standard) ... mais, heureusement, on peut également fort bien s'en passer" [ comme si quelque part existait une théorie dont on ne puisse se passer ... Mais, au fait, désirerait-on se passer de "Valiron" ? ]

iv) "Le schéma $\Sigma$ est bien compliqué, il est difficile de prouver sa consistance" [comme si la consistance des mathématiques classiques (et l'aspect chimérique de l'entreprise) inquiétaient les mathématiciens actifs] .

v) " que l'on établisse des résultats nouveaux par le moyen de l'analyse non-standard " : [comme si devant un tel résultat nouveau on ne feignait pas de trouver encore plus intéressante une preuve standard a posteriori : (une preuve non-standard d'un résultat classique, ne saurait évidemment pas retenir l'attention)] .

vi) " Le caractère prétendument "intuitif" des preuves non-standard est illusoire " [comme si ... ] .

vii) " Surtout qu'on ne change rien à l'enseignement élémentaire ! [comme si au moins le changement suivant n'était pas d'ores et déjà irréversible :

alors qu'avant Robinson il était possible de dire "la méthode $\epsilon,\delta$ de Cauchy-Weierstrass est la méthode permettant un fondement solide de l'analyse" , il est nécessaire d'être plus prudent après Robinson et, par exemple, de dire une méthode plutôt que la méthode] .

viii) "Les démonstrations en non-standard sont de mauvaises traductions de belles preuves en $\epsilon,\delta$ " [comme si la production d'un tel jugement dispensait d'autre forme de preuve, comme si A. Robinson n'avait pas écrit d'inoubliables pages à ce sujet : principe de Saint Venant] .

ix) "Une bonne idée trouve son chemin,il n'y a donc pas de risque à se montrer circonspect" [comme si on adoptait cette attitude si l'on reconnaissait à l'idée quelque chance d'être bonne]..

x) "L'analyse non-standard ne peut pas intéresser la mathématique appliquée" [comme si le collègue qui formule ce jugement s'intéressait tant soit peu aux applications (il en convient d'ailleurs fort volontiers) ; comme si des préoccupations de mathématiques appliquées n'avaient pas joué un rôle déterminant dans les préoccupations d'A. Robinson] .

xi) "L'Algérie n'avait vraiment pas besoin de cela" , "dilettantisme" "cela fait rire tout l'Institut de Mathématique" ...

HISTORIQUE :

Quelques points d'histoire s'avéreront peut-être utiles à ce stade.

L'épisode épique de la querelle sur l'analyse non-standard se cristallise autour d'une analyse (1) d'un livre de Keisler (1), signée par Bishop. Cette critique est un monument d'absence de sang-froid et d'objectivité,elle a provoqué des ripostes en chaîne dont on trouvera l'écho dans divers périodiques U.S. récents

(1) cf. B.A.M.S. 83 (1977) p. 205-208 ; Keisler : Elementary calculus Boston 1976 . Le livre de Keisler a la réputation, en dehors même de toute préoccupation non-standard, de fournir une mine riche en trouvailles didactiques.

(B.A.M.S. 83 (1977) p. 10008 , Notices N° 179(1977), p. 269 et 283 , American Mathematical Monthly)

L'avenir dira comment il convient de juger des diverses péripéties de la bataille, mais il convient de rappeler qu'il s'agit ici d'une phase (la dernière ? ) d'une longue histoire qui remonte vers 1966. Cette date marque approximativement la parution de deux ouvrages

- l'un est un remarqué manifeste de mathématique constructiviste :

  E. Bishop : Foundations of Constructive Analysis (N.Y) (1967) .

- l'autre est l'acte de naissance de l'analyse non-standard :

  A. Robinson Non-standard analysis Amsterdan (1966) .

Ces deux livres présentent beaucoup d'analogies : même format, même épaisseur, structures semblables, introductions construites sur des plans parallèles, même projet d'apporter une contribution essentielle à la construction de quelques pans de l'édifice mathématique, même enthousiasme et même souffle.

Au-delà de ces éphémères analogies, ces ouvrages sont parfaitement antagonistes : l'un est jaune, l'autre est vert ; l'un appartient à la mathématique formelle , l'autre rejette - selon la solide conception de Brouver - la formalisation au bénéfice de "l'intuitionisme" ... ; et surtout les deux ouvrages s'ignorent l'un l'autre de manière étonnante.

L'ouvrage fondamental de Robinson semble devoir rester longtemps l'outil pour tout travailleur dans le domaine de l'analyse non-standard. La profondeur d'inspiration en fait un des grands évènements de la publication mathématique. D'autres ont dit cela mieux que nous ne saurions le faire[1] . Certes la littérature sur le sujet s'est fortement enrichie, et comporte bien des traités et études utiles et originaux, mais cela ne modifie en rien la place du traité de Robinson.

---

(1) Voir en particulier : B.A.M.S 83 1977 p. 646-666 . A ma connaissance le B.A.M.S. n'a pas publié d'analyse du livre d'A. Robinson ?

Après cette évidence, nous nous sentons vraiment dans nos "petits souliers" au moment d'exposer, à titre d'illustration, quelques échantillons proches de nos propres préoccupations ; on nous pardonnera peut-être, soit qu'on se tourne vers des lectures choisies dans le traité de Robinson, soit qu'on nous reconnaisse pour avoir oeuvré quelque peu dans le sens du message de Robinson.

## DEUXIEME PARTIE : EXEMPLES.

### 1) Unicité des solutions d'une équation différentielle.

Soit l'équation différentielle

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

où $f$ est de classe $C^2$.

La démonstration de l'unicité des solutions de (1) revient à la démonstration de l'unicité de la solution $y = 0$ pour une équation du type

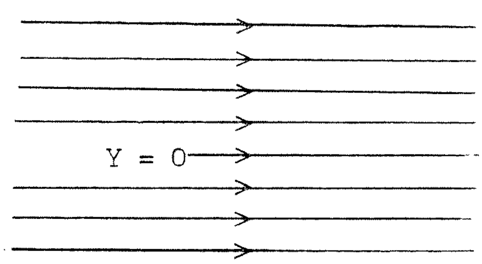
$$y' = y^2\varphi(x,y) \tag{2}$$

où $\varphi$ est de classe $C^0$.

Faisons le changement de coordonnée $y = \varepsilon Y$ où $\varepsilon$ est infiniment petit. On obtient

$$Y' = \varepsilon Y^2 \varphi(x,\varepsilon Y)$$

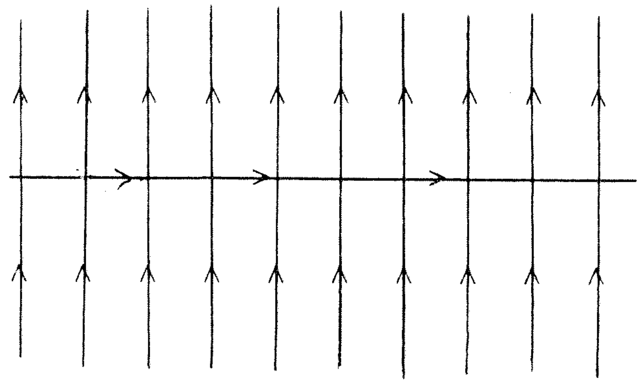
Les trajectoires du champ de vecteurs ainsi défini dans le plan $(x,Y)$ sont infiniment proches de parallèles à $Ox$ pour $x$ et $Y$ finis.



Ainsi toute solution de (2) coupant $y = 0$ est infiniment proche de la solution $y = 0$.

Par conséquent celle-ci est l'unique solution standard s'annulant pour $x = 0$

Remarque : Pour l'équation $y' = u^{2/3}$ le même changement de coordonnées conduit au schéma suivant :



2. Existence d'une solution périodique pour l'équation de Van der Pol.

L'équation de Van der Pol

$$\epsilon x'' + (x^2 - 1)x' + x = 0 ,$$

où $\epsilon$ est un réel standard positif quelconque, est équivalente au système

$$(\Delta) \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{\epsilon} [u - (\frac{x^3}{3} - x) ] \\ u' = - x \end{cases}$$

qui admet un cycle limite.

Ceci découle de l'existence d'une solution bornée.

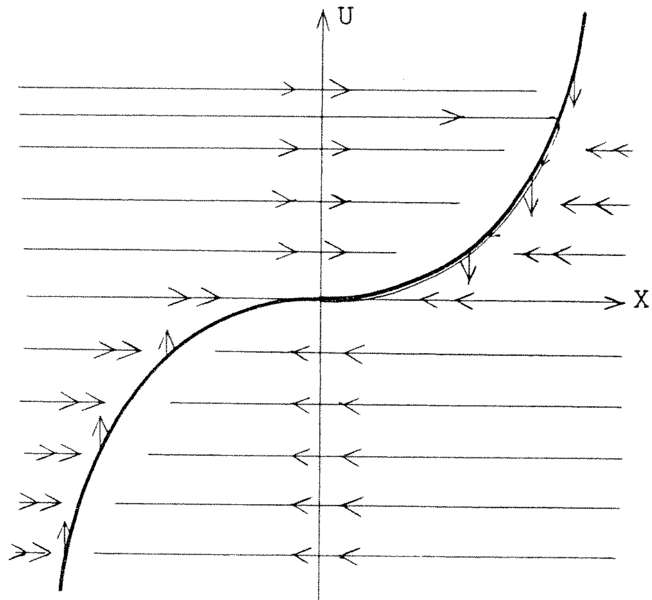
Pour démontrer l'existence d'une telle solution, on peut faire le changement de coordonnées et variables suivant

$$\begin{cases} X = \alpha x \\ U = \alpha^3 u \quad \text{où} \quad \alpha > 0 \quad \text{est infiniment petit.} \\ \tau = \alpha^2 t \end{cases}$$

On obtient ainsi le système suivant

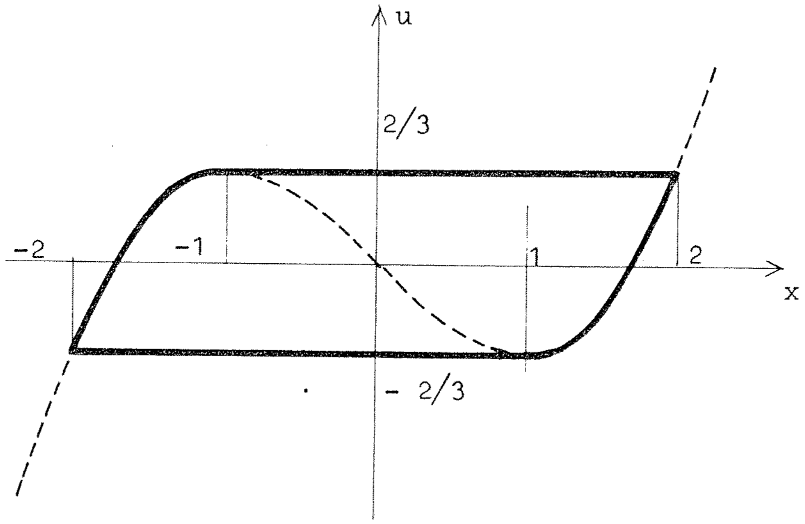
$$\begin{cases} X' = \dfrac{1}{\epsilon\alpha^4}\left(U - \dfrac{X^3}{3} + \alpha^2 X\right) \\ U' = -X \end{cases}$$

d'où le schéma qui rend évident l'existence d'une solution bornée.

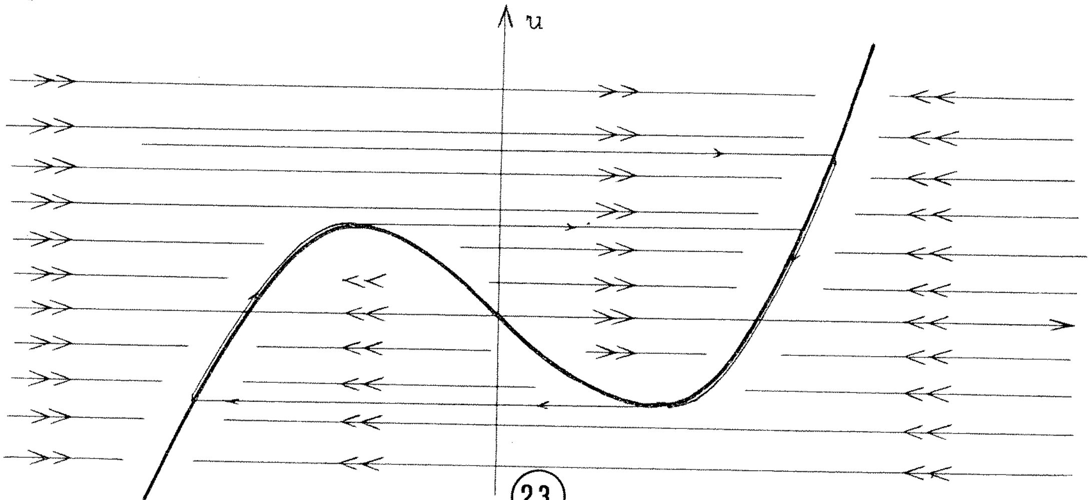



3. Convergence lorsque $\epsilon \to 0$ et stabilité du cycle limite de l'équation de Van der Pol avec paramètre.

Le cycle limite du champ de vecteurs défini par le système $(\Delta)$ de 2. tend vers la courbe $\Gamma$ définie sur la figure 1 .




En effet pour $\epsilon$ infiniment petit, la composante horizontale du champ de vecteurs est infiniment grande en dehors des points infiniment proches de la cubique $u = \dfrac{x^3}{3} - x$ . Il a donc la configuration suivante :



On en déduit immédiatement que le cycle limite est infiniment proche de la courbe $\Gamma$ ce qui, par transfert, donne le résultat.

Remarque : la configuration du champ pour $\epsilon > 0$ infiniment petit donne aussi de façon immédiate l'unicité du cycle limite pour $\epsilon > 0$ standard assez petit.

On sait qu'un cycle limite de $(\Delta)$ est stable si le long de ce cycle la quantité :

$$I = \int_0^T \frac{(1-x^2(t))}{\epsilon}\, dt$$

est strictement négative, $T$ désignant la période.

Pour $\epsilon > 0$ infiniment petit les parties du cycle limite pour lesquelles $|x| < 1$ sont parcourues en un temps infiniment petit, alors que les autres sont parcourues en un temps non infiniment petit. Il en résulte que $I < 0$.

## 4. Existence d'une solution périodique pour une équation différentielle du type

$$\epsilon x'' - f(x') + x = 0 \qquad (1)$$

Supposons que $x = f(y)$ est une fonction impaire $C^1$ telle que

1) il existe un maximum unique $M$ atteint en un point $\alpha > 0$

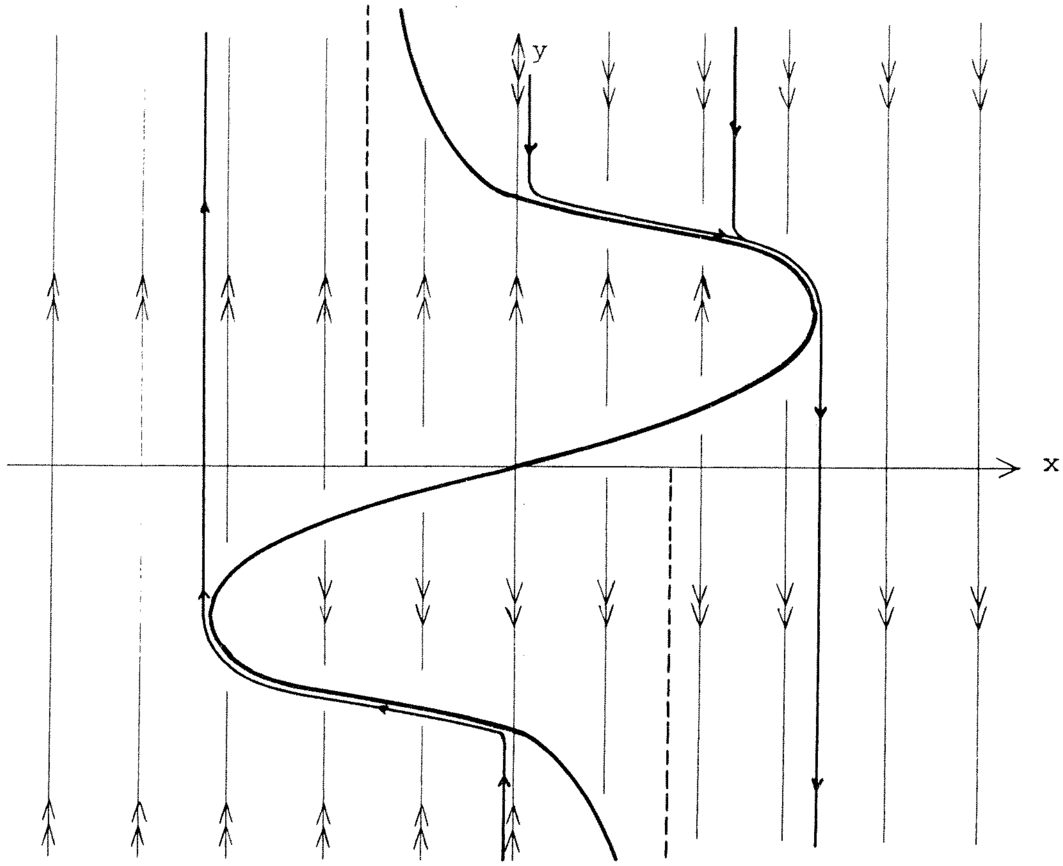
2) $\lim_{y \to +\infty} f(y) = -a$ ou $o < a < M$.

Alors l'équation (1) admet une solution périodique pour $\epsilon$ assez petit.

Ceci découlera de l'existence d'un cycle limite pour le champ de vecteurs défini dans le plan de phase par le système différentiel suivant équivalent à (1) :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{1}{\epsilon}(f(y) - x) \end{cases} \quad \epsilon > 0 \text{ infiniment petit.}$$

Dans le plan $(x,y)$ on a la configuration du champ suivante :




Soit $(x_o,y_o)$ un point fini tel que $y_o > \alpha$ et $f(y_o) < x_o < M$.

Vu la configuration du champ la trajectoire de ce point est infiniment proche d'une parallèle à $Oy$ jusqu'à ce qu'elle soit à une distance infiniment petite de la courbe $x = f(y)$ qu'elle longera ainsi jusqu'au maximum.

Ensuite elle s'éloigne de la courbe en restant infiniment proche de la droite $x = M$, ceci jusqu'en un point $(x_1,y_1)$ où $y_1$ est infiniment grand.

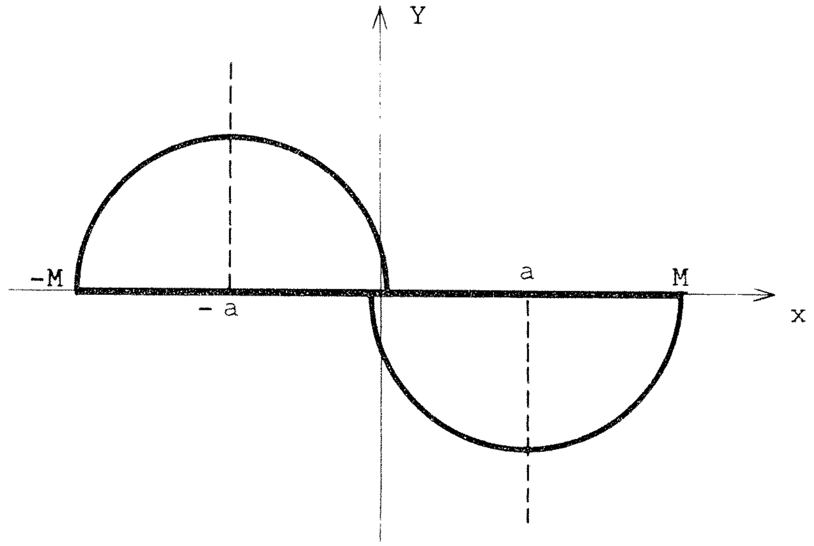
Le changement d'échelle $Y = \sqrt{\varepsilon}\, y$ sur l'axe $Oy$ donne le système suivant

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} Y \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[-x + f\left(\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} Y\right)\right] \end{cases}$$

Puisque $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} Y$ est infiniment grand pour $Y \geq Y_1$, où $Y_1 = \sqrt{\varepsilon}\, y_1$, la trajectoire de $(x_o,y_o)$ longe dans le plan $(x,Y)$ le demi-cercle $(x-a)^2 + y^2 = (M-a)^2$ en restant à une distance infiniment petite jusqu'en un point $(x_2,Y_2)$ où $x_2$ est infiniment proche de $2a - M$ et $Y_2 = Y_1$.

Ensuite la trajectoire revient dans le plan des $(x,y)$ finis.

Par symétrie, on en déduit que dans le plan $(x,Y)$ la demi-trajectoire positive est infiniment proche de la courbe représentée par la figure suivante :




Le résultat en découle.

<u>Remarque</u> : le même raisonnement s'applique évidemment dans des cas plus généraux.

## <u>B I B L I O G R A P H I E</u>


[1] REEB G. Séance débat sur l'analyse non-standard. Gazette des Mathématiciens N° 8 (S.M.F. Février 1977) p. 8-14 .

[2] TROESCH A. Existence de solutions bornées des équations différentielles de Lienard (Publication IRMA Strasbourg) à paraître.

[3] TROESCH A. URLACHER E. Analyse non-standard et équation de Van der Pol. (Publication IRMA Strasbourg 1977).

[4] URLACHER E. Existence et stabilité de solutions périodiques pour des équations différentielles du type $\varepsilon x'' + f(x') + x = 0$ (Publication IRMA Strasbourg) à paraître.