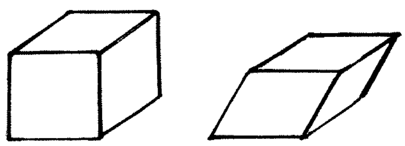
LES FLEXAÈDRES

Tout le monde connaît le parallèlogramme déformable, ces quatre barres deux à deux égales, articulées autour des sommets et qui permet entre autre la construction de certaines dilatations. D'une façon plus générale, un polygône plan, à l'exception du triangle, est toujours déformable dès que l'on articule les sommets.

Passons à une dimension supérieure et plaçons nous dans l'espace habituel de dimension 3. L'équivalent des polygônes sont les polyèdres. On peut donc se demander s'il existe des polyèdres déformables ? Mais ici, il est besoin de préciser exactement ce que l'on entend par polyèdre. Si on selimite aux sommets et aux arrêtes, il est clair qu'un cube (par exemple) est déformable ; on peut l' aplatir en transformant en losange deux faces opposées. Si maintenant on tient compte des faces, qu'on les suppose pleines, le cube, pour reprendre l'exemple précédent, est réellement un solide. Nous aurions obtenu le même résultat en triangulant le cube, c'est-à-dire en remplaçant toutes ses faces par deux triangles obtenus en traçant une diagonale du carré. Les triangles étant indéformables, les faces du cube le sont alors aussi et la manipulation précédente échoue. Qu'en est-il des autres polyèdres ?



cube cube aplati

En 1813, Augustin Cauchy a démontré que tout polyèdre <u>convexe</u>(*) dont les faces planes sont rigides était solide, c'est-à-dire que les deux faces définissant une arrête ne pouvaient s'articuler autour de cette arrête. Le problème est resté ouvert jusqu'à 1977 en ce qui concerne les polyèdres <u>non-convexes</u>(*). L'année dernière un mathématicien américain, Robert Connelly, travaillant à l'I.H.E.S. (institut des hautes études scientifiques) de Bures-sur-Yvette construisait un polyèdre à 18 sommets, à faces rigides et cependant articulable. C'est une variante à 16 sommets que l'Ouvert vous propose de réaliser aujourd'hui. Le lecteur impatient peut se précipiter au mode d'emploi, mais il ne saura pas pourquoi "ça marche". Tant pis pour lui !

Revenons un peu en arrière. En 1897, Bricard publie un mémoire sur la "thé-

*

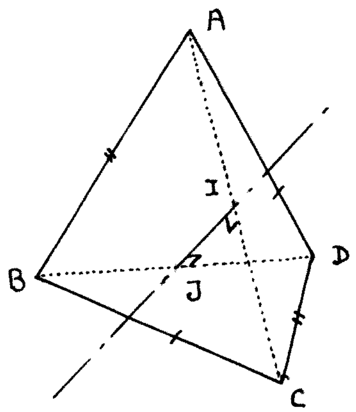
<u>convexe</u> : Le polyèdre est entièrement situé d'un même côté par rapport à l'une quelconque de ses faces.

<u>non-convexe</u> : Il existe une face dont le plan est sécant au polyédre.

orie de l'octaèdre articulé". Il ne s'agit par réellement d'un octaèdre à faces planes rigides puisqu'il n'est formé que de barres représentant les arrêtes ; mais l'octaèdre n'a que des faces triangulaires et un triangle est indéformable ! on pourrait penser qu'en remplissant les faces le problème aurait été résolu depuis 80 ans. Seulement si on se livre à cette opération de remplissage on s'apperçoit que deux faces s'interpénètrent, ce qui est évidemment facheux.

Voyons de plus près comment fonctionne l'octaèdre de Bricard. Pour cela commençons par démontrer le théorème suivant :

Théorème : Dans l'espace, tout quadrilatère (gauche ou non) qui a ses côtés opposés égaux en longueur deux à deux admet un axe de symétrie qui est la droite joignant les milieux des diagonales.



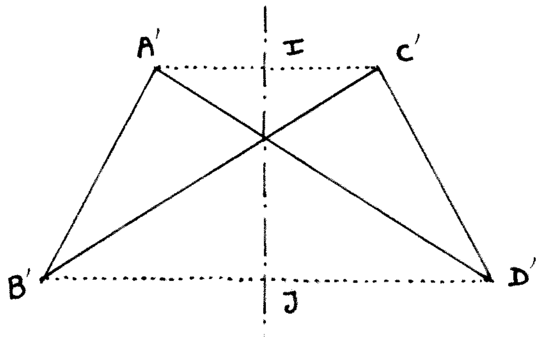
Soit ABCD le quadrilatère, tel que AB = CD et AD = BC Soient I et J les milieux respectifs de Ac et BD . Les triangles ABD et CDB sont isométriques donc leurs médianes ont des longueurs égales : JA = JC . Par conséquent le triangle AJC est isocèle et la médiane JI est également hauteur. Donc IJ est perpendiculaire à AC . On démontre de même que IJ est perpendiculaire à BD . IJ est alors perpendiculaire commune aux deux diagonales. Si nous considérons la symétrie d'axe IJ (rotation d'angle π autour de l'axe IJ) nous remarquons que A et C s'échange de même que B et D . Cette symétrie laisse donc le quadrilatère invariant.

Imaginons maintenant un point P distinct de A, B, C ou D et non situé sur IJ . L'ensemble des segments PA, PB, PC, PD, AB, BC, CD, DA, sorte de pyramide est déformable et s'articule autour des cinq sommets. Il ne saurait être question de transformer cette construction en polyèdre en remplissant les faces puisque ABCD n'est pas en général plan et que les longuerus BD et AC ne restent pas constantes.

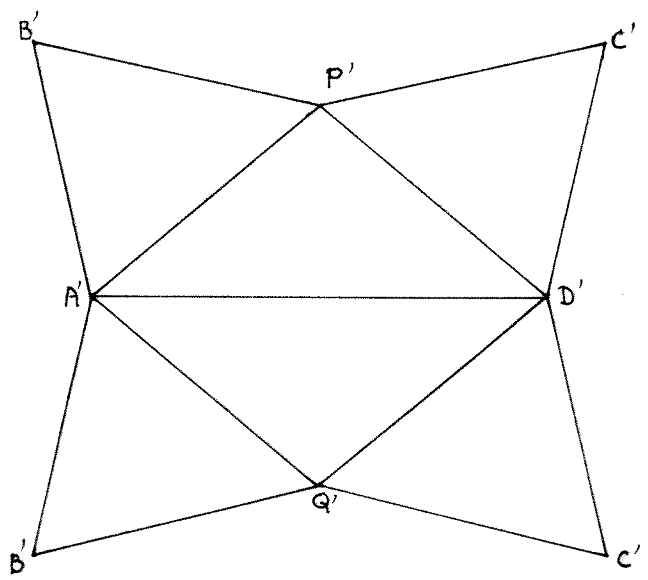
Soit alors Q le symétrique de P par rapport à la droite IJ ; construisons de même les segments QA, QB, QC et QD . Alors l'octaèdre ABCDPQ est articulable puisqu'à tout mouvement d'une arrête partant de P correspond le mouvement symétrique de l'arrête correspondante partant de Q.

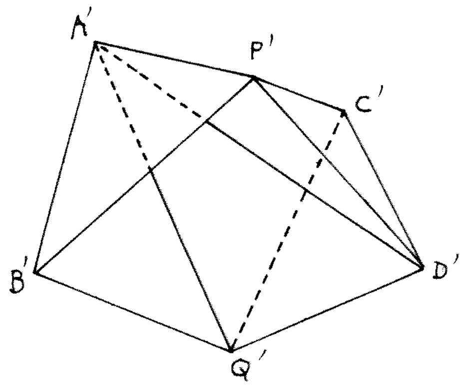
Il y a deux méthodes de construire un octaèdre de Bricard. C'est la combinaison de ces deux méthodes qui a conduit R. Connelly à la réalisation du flexaèdre. Essayons de visualiser ce qui se passe ; on peut évidemment construire un tel octaèdre avec des tiges articulables (par exemple des pailles dans lesquelles on insère une ficelle) ; cela évite de remplir les faces et permet de voir ce qui se passe. Peut être l'un ou l'autre lecteur a-t-il ce genre de matériel sous la main et va-t-il s'empresser de réaliser cette construction physique. Je m'adresse donc aux autres. Pour eux il s'agit de réaliser la fossette.

REALISATION DE LA FOSSETTE



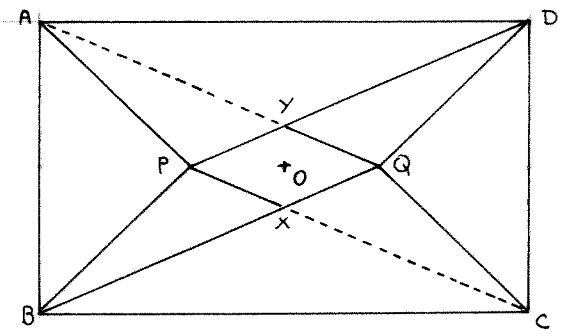
C'est un octaèdre de Bricard tel que le quadrilatère $A'B'C'D'$ soit croisé. ($A'C'D'B'$ est un trapèze isocèle). Quand le quadrilatère se défrome, il reste plan et l'axe de symétrie IJ reste dans ce plan. Prenons le point P' tel que P' soit équidistant des quatre sommets du quadrilatère (Q', symétrique par rapport à IJ présente les mêmes propriétés). Il est clair que les faces $P'A'D'$ et $P'B'C'$ s'interpénètrent (de même pour $Q'A'D'$ et $Q'B'C'$). Il est donc nécessaire de supprimer l'une des deux faces, par exemple $P'B'C'$ (et $Q'B'C'$). On obtient alos les six faces de la fossette. Ces six faces ont été développées sur les pages hors texte ci-jointes et doivent être découpées.





Si on colle ensemble les arrêtes $A'B'$ devant $A'D'$, il faut coller les arrêtes $C'D'$ derrière $A'D'$ pour obtenir ce qui est représenté ci-dessus à droite. Il est alors facile de remuer cette "fossette" par simple pression et de remarquer que la longueur $B'C'$, bien que non matérialisée, reste constante au cours du mouvement.

CAS PLUS GENERAL

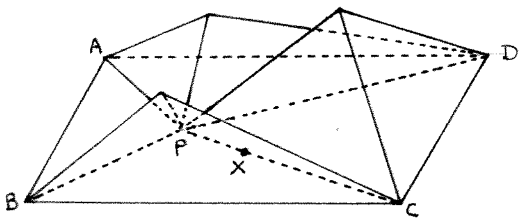


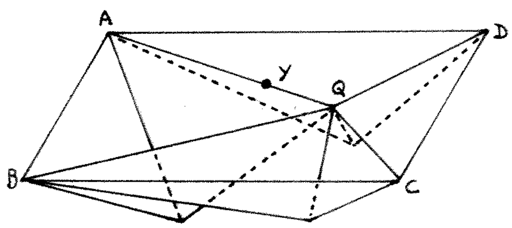
Soit ABCD un quadrilatère à côtés opposés égaux deux à deux qui dans sa position plane est un rectangle (figure ci-contre). Plaçons P et Q dans son plan, symétriquement par rapport au point de concours des diagonales (l'axe de symétrie du rectangle est en effet perpendiculaire à son plan en ce point).

Nous obtenons encore une fois un octaèdre de Bricard, mais cette fois ci, ABCD ne reste pas plan lors de la déformation. Il est facile de s'en rendre compte en découpant dans du papier les deux surfaces PDABC et QADCB (rectangles dont on a enlevé respectivement les triangles DCP et ABQ). On les accolle avec un ruban adhésif le long de AD et BC après les avoir croisés comme sur la figure ci-dessus. Lors du mouvement, P et Q se soulèvent et s'abaissent simultanément. Pour faciliter le mouvement, on aura pris soin de marquer par un pli les arrêtes PA , PB , QC , QD . On remarque que QB est au dessus de PC et QA au dessous de PD.

CONSTRUCTION DU FLEXAEDRE

C'est à partir de l'octaèdre précédent que l'on peut construire un flexaèdre. Remplaçons les faces PAD , PBC et PCD par des pyramides pointant vers le haut, les faces QAB , QBC et QAD par des pyramides pointant vers le bas. En accollant ces deux surfaces le long du rectangle ABCD , on obtient presque un flexaèdre. Le blocage se fait seulement en X ou en Y suivant que l'on veut soulever P et Q ou les abaisser.





L'idée est donc de faire une petite encoche en X et Y de façon à permettre le mouvement. C'est le rôle de la "fossette".

On place le point P' de la "fossette" au sommet de la pyramide de base PBC et le point Q' au sommet de la pyramide de base PDC , le point B' en C et le point C' en P . On fait de même au voisinage de Y pour la deuxième fossette. Le mouvement est alors possible et l'on vient de réaliser un flexaèdre à 16 sommets. C'est ce flexaèdre que l'Ouvert vous propose de réaliser à partir du développement donné sur les pages hors-textes ci-jointes. Auparavant posons quelques questions :

QUELQUES QUESTIONS

En n'autorisant le mouvement que dans un sens, on peut supprimer une fossette et par conséquent deux pyramides (lesquelles ?). On obtient alors un flexaèdre à 12 sommets. Des chercheurs de Bures sur Yvette ont réduit ce nombre à 9. On a démontré qu'il est impossible qu'un polyèdre flexible ait 7 sommets ou moins. Reste le cas de 8 sommets ......

On peut vérifier que le volume du flexaèdre est invariant lors des déformations. Mais on ne sait pas si cette propriété est vrai pour tout polyèdre flexible ....

Existe-t-il des flexaèdres en géométrie non-euclidienne ? ....

Peut-on généraliser cette notion en dimension supérieure à 3 ? .....

REALISATION DU FLEXAEDRE

1) Les patrons ont été dessinés avec la convention suivante :

- en traits pleins les angles saillants ;
- en traits interrompus les angles rentrants.

Cette convention n'a évidemment pas été utilisée pour le pourtour des languettes.

2) Chaque languette porte une référence et doit être collée le long de l'arrête portant la même référence et sous la feuille. On prendra donc soin lors du découpage de reporter les références sous les faces.

3) Découper les quatre morceaux du patron. On s'astreindra à un découpage précis, surtout au voisinage des sommets.

4) Monter les deux fossettes. Lors du collage (on prendra une colle plastique) on placera les languettes <u>sous</u> la feuille et on superposera très exactement les arrêtes correspondantes.

5) Pour faciliter le montage, on pliera la feuille très soigneusement le long de chaque arrête en respectant le sens indiqué.

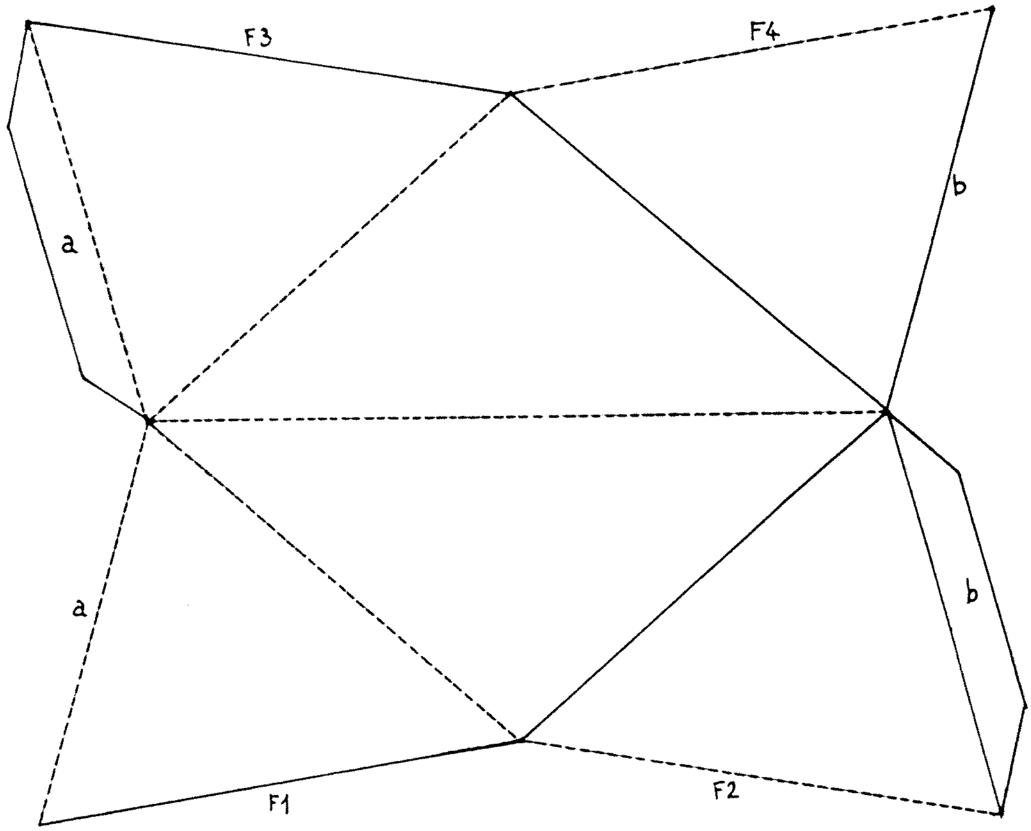
6) L'ordre du montage est peu important. Il est toutefois agréable de pouvoir terminer dans une position simple. Nous conseillons donc l'ordre suivant :

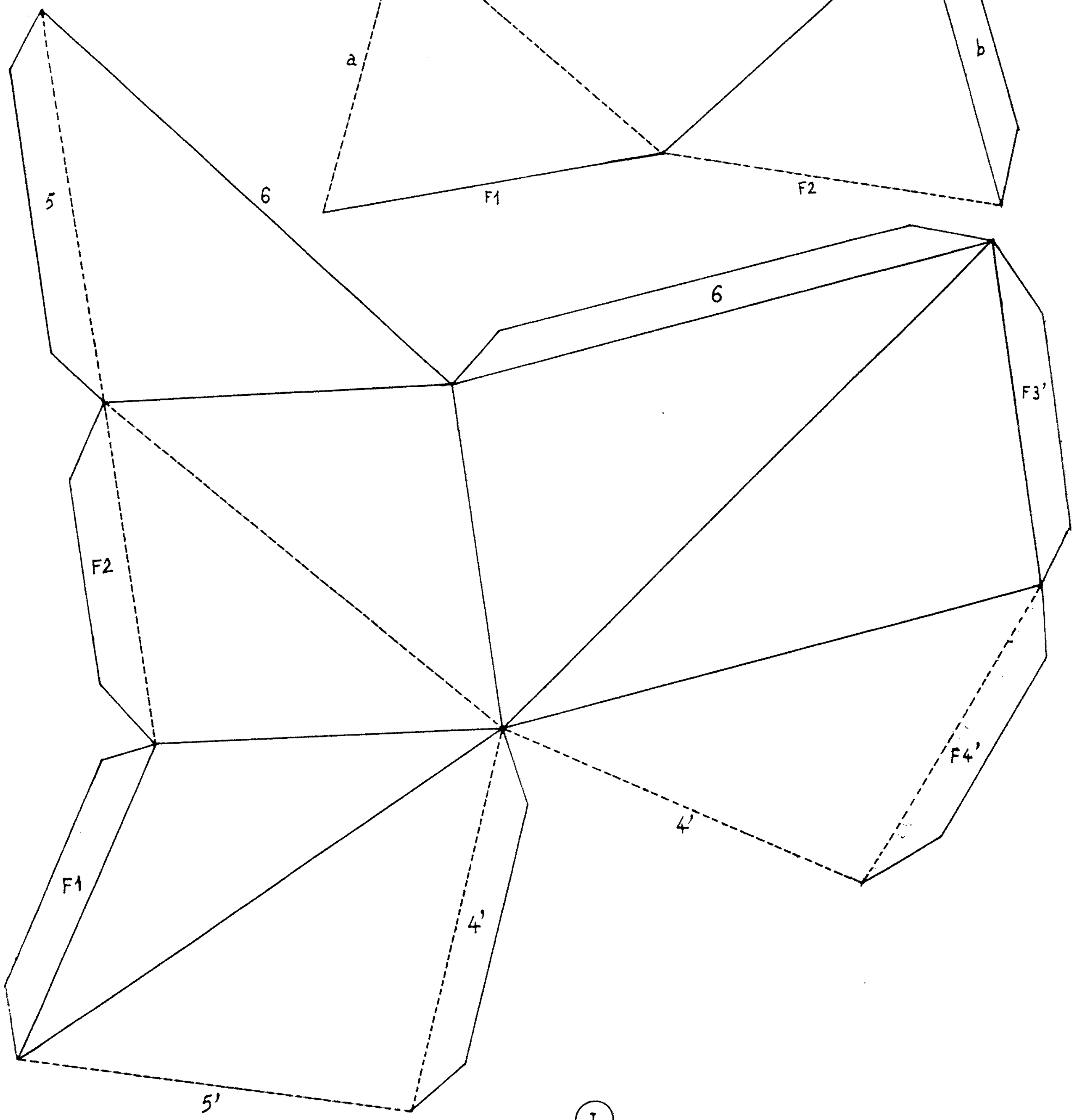
F2 , F1 , F2' , F1' , F4' , F3' , 6 , 5 , 4 , F4 , F3 , 4' , 5' , 6'

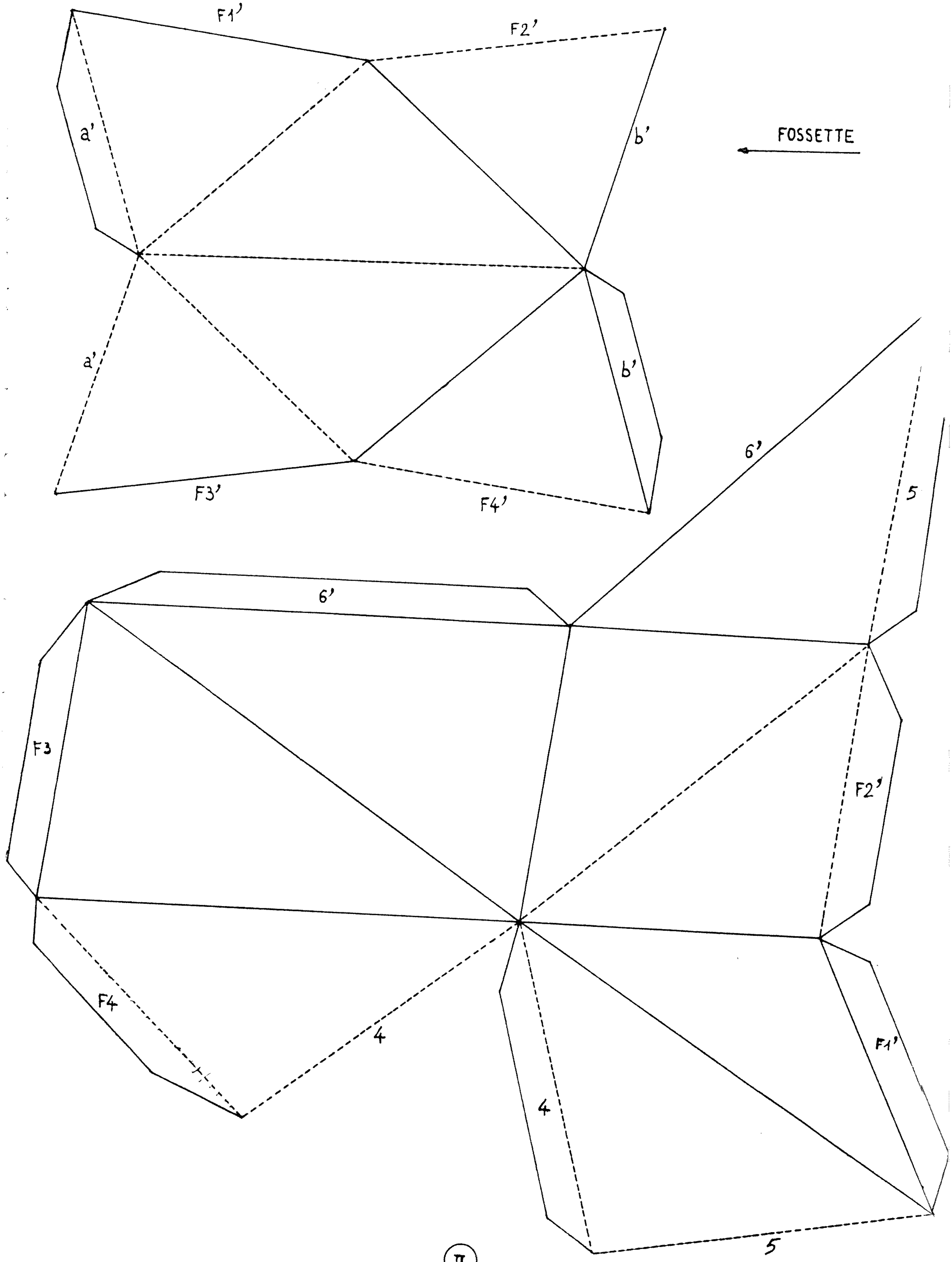
7) Les personnes sensibles qui pleureraient à l'idée de découper leur bel Ouvert peuvent décalquer le patron, ou mieux, le redessiner en mesurant les longueurs de chaque arrête. Les différentes mesures qui interviennent sont , en mm :

$$55 \; ; \; 65 \; ; \; \sqrt{55^2 + 50^2} \; ; \; \sqrt{55^2 + 80^2} \; ; \; 105 \; ; \; 110 \; ; \; 130$$

FOSSETTE






F1'
F2'
a'
b'
FOSSETTE
a'
b'
6'
5
F3'
F4'
6'
F3
F2'
F4
4
4
F1'
5