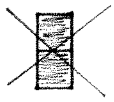
Activités mathématiques en sixième

Notre précédent article présentait les trois premières séances d'une activité dont le sujet était de déterminer le nombre de tours différentes que l'on peut réaliser avec des cubes de 2 couleurs, en tenant compte de la consigne suivante :



(rouge sur rouge interdit,
toutes autres possibilités permises)

Lors de la 3e séance, les élèves ayant établi "la règle" et l'ayant vérifiée pour les exemples construits en arrivent à penser qu'on ne pourra jamais dire si la règle est toujours juste puisqu'on ne peut écrire tous les exemples.

4ème séance : Un arrêt momentané est marqué dans le travail par groupes, et l'on discute au niveau de toute la classe du problème qui se pose.

Prof. : Lors de la dernière séance, plusieurs groupes qui avaient trouvé une règle qui semblait convenir, ont dit qu'on ne pourrait jamais savoir si elle est correcte.

Un él. : "Pour savoir si elle est correcte, on regarde les exemples ; mais on ne peut pas écrire tous les exemples car ils n'ont pas de fin"

Un él. : "Mais si on fait beaucoup d'exemples, par exemple jusqu'à 100 cubes, on sera déjà plus sûr"

Autre él. : "Peut-être que ce sera faux après quand même"

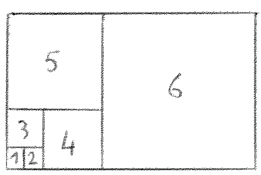
El préc. : "Oui, mais la chance que ce soit juste sera plus grande que si on va seulement jusqu'à 10 cubes"

Un él. : "Je ne comprends pas comment on pourrait montrer que c'est toujours juste !"

Un autre : "Sûrement pas avec les exemples"

Prof. : "Souvenez-vous de la construction que nous avons fait en début d'année avec les carrés :

(tracé au tableau)



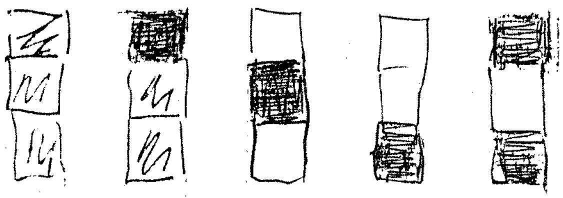
Nous avions trouvé que la suite des nombres qui indiquent la longueur en cm des côtés était 1,1,2,3,5 ... et nous avions expliqué pourquoi.

<u>Un él.</u> : "Là, c'est parce que le nouveau carré est posé sur les 2 carrés d'avant, c'est pour ça qu'il faut additionner"

<u>Prof.</u> : "Je vous propose de bien regarder vos colonnes de cubes et d'essayer comme on a pu le faire pour la figure avec les carrés, de trouver une explication pour la règle. Bien sûr, c'est un peu plus difficile"

Les groupes se reforment et l'activité redémarre. Ceux qui n'ont pas encore établi la règle continuent leur travail sur les exemples d'empilements comme s'il n'y avait eu aucune intervention. Parmi les autres, le problème posé est d'abord interprété comme : "On s'est peut-être trompé" et donne lieu à des justifications par explicitation de la règle de construction systématique des exemples.

Pour être sûr qu'on n'a pas oublié de nombres on peut protéder comme ceux-ci.



J'aligne une 1ère rangée de noir à la 1ère ligne. Unex seconde à la 3ème ligne et une autre que je distance de 1, 2, 3, 4, 5, 6 carreaux de la 7ème ligne de noir.

Certains se remettent même à construire de nouveaux exemples et l'idée qu'on augmente les chances que ce soit juste réapparaît.

Je ~~me~~ peu n'arrive pas à prouver la justesse de la règle, Je pense reprendre l'argument de Christophe : Si je continue jusqu'à 1000 avec cette règle est que la règle marche toujours jusque là, je pense que le nombre suivant suivra cette règle. J'ai plus de chances de ne pas me tromper que si je n'avais donné que 100 nombres.

Cette notion est même maniée avec beaucoup de précision logique :

Je pourrais aller jusqu'à 1000. et si la règle indique que c'est juste je ~~ne pourrait~~ en déduirait que jusqu'à 1000 la règle marche.

Une partie plus importante des élèves a beaucoup de mal à "lâcher" les suites de nombres pour revenir aux empilements de cubes. Pour certains même, le seul fait qu'une situation ait pu conduire à une règle numérique suffit à assurer la conviction que ce qu'on a trouvé est juste.

Si on prenait 2 qui a été obtenu par les dessins et 3 qui a aussi été obtenu par les dessins et si on les additionnait ça donnerais 5. Je suis la règle.

$(2+3) = 5$

$(5+3) = 8$

$8+5 \;—\; 13$

Donc en partant de nombre sûr on arrive à un résultat sûr

On en arrive au cheminement linéaire :

situation $\longrightarrow$	règle numérique $\longrightarrow$	extrapolation de la règle
manipulations	EFFACEMENT de la	étude des particularités
	situation de départ	analyse ...

Ainsi, pour plusieurs groupes, on assiste à un travail sur la suite trouvée plutôt qu'à une tentative d'explication de l'exactitude de cette suite comme réponse au problème posé.

Pour ~~1 000~~ 16 carreaux de hauts combien puis-je faire de colonnes ? Il n'y a pas de proportionnalité ! Je peux faire 2 584 colonnes. Il n'y a pour 1 000 qu'une règle c'est : le nombre précédemment trouvé + le nombre trouvé. Il n'y a pas de règles directes. Il faudrait beaucoup de temps pour le faire !
J'ai aussi pensé à une autre règle possible.
Un ~~relation~~ opérateur qui passe d'un nombre à l'autre en grandissant suivant un autre opérateur
Mais ça ne marche que pour la suite suivante :
2 - 3 - 6 - 9 - 18 etc...
×1,5 ×2 ×3 ×1,5 ×2 ×3

	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	1	2	~~1~~					
3	1	3	~~3~~1					
4	1	4	3					
5	1	5	6	1				
6	1	6	10	4				
7	1	7	17	9	1			
8	1	8						

A la fin de la séance, un élève me fait part de son idée :

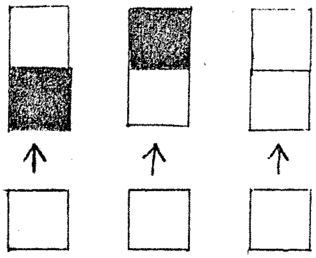
Je prends les 5 colonnes de la ligne 3, je pose sur chaque colones un carré vert, je trouve 5 solutions. Ensuite je met un carré rouge là où c'est possible je trouve 3. Total=8 c'est le même nombre de colones de la ligne 4.

Plusieurs autres se sont lancés dans la même direction.

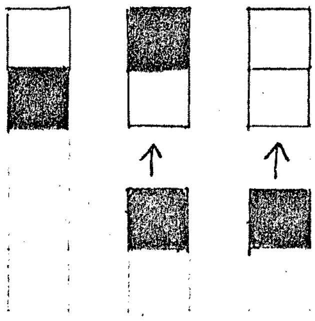
<u>5ème séance</u> : L'attrait de la "nouvelle méthode" est grand, mais l'explication du procédé de construction n'est pas simple à exploiter.

J'ai 12 solutions Pour savoir combien de solutions j'aurais avec 6 carrés, je prends une des colones de 5 et j'ajoute un carrés selon la couleur.

pour les rangées de trois il ya 5 ~~rangées~~ colonnes alors on pose un vert sur les 5 ~~rangées~~ colonnes on ajoute 5 cubes alors on pose un rouge sur ~~chacun~~ les 5 ~~rangées~~ colonnes on ajouté de nouveau 5 cubes et 5+5 = 10 mais on enlève la couleurs interdite qui est placé en haut des rangès qui pour les rangés de 3 fais 2 et 10-2=8 8 étant les nombres des rangées de 4 je pense que cette règle est juste.



= sa donne 3 collones



= sa donne 2 collones

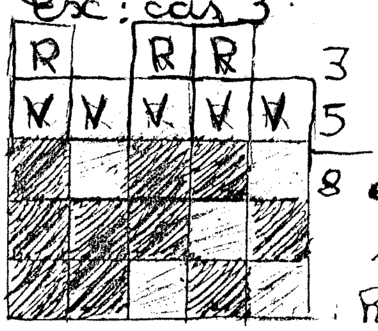
3 + 2 = N:5

L'idée d'utiliser ce procédé pour expliquer la règle numérique est avancée, mais difficile à mettre en oeuvre.

On additionne ici les verts qui sont en haut et on trouve le nombre de colonne qui précède, où on additione le nombre de colone et on trouve le nombre de cube vert qui sont en haut.

Nous avons remarqué que dans les cas 1, 2, 3, 4 ...... nous pourrons rajouté autant de carreaux ~~vert~~ rouges qu'il y a de colonnes ~~rouges~~ vertes et partout des carreaux ~~rouges~~ verts au-dessus.

Ex : cas 3 :



et voici le nombre de colonnes que l'on pourra trouver avec 4 carreaux de hauteur c'est-à-dire : le cas 4.

On peut fabriquer autant de colonnes avec un vert en haut que de colonnes qu'il y avait dans la famille précédente.

On peut fabriquer autant de colonnes avec un rouge en haut, que de colonnes avec un vert en haut qu'il y avait dans la famille précédente.

Il est à remarquer que dans cette formulation figurent toutes les données nécessaires à l'explication de la règle $u_n = u_{n-1}+u_{n-2}$. Ce qui y est dit pourrait se schématiser par :

colonnes se terminant par un rouge	colonnes se terminant par un vert	colonnes se terminant par un rouge	colonnes se terminant par un vert

famille précédente

B

famille à construire

A

Pour clore l'explication il suffit d'appliquer le même raisonnement à la famille B. (D'où proviennent les colonnes de B se terminant par un vert ?) Personne ne franchira seul ce dernier obstacle !
La question formulée entre parenthèses ci-dessus fut en général suffisante pour débloquer la situation ...

<u>En guise de bilan</u> :
Que peuvent donc apporter de telles activités ?

. En premier lieu, on y est conduit à des manipulations. Manipuler ne veut pas dire ici manier des objets physiques, mais augmenter la connaissance d'un objet mathématique par la construction de représentations qui permettent de dégager des invariants. Dans notre cas, faisant appel à une construction systématique de tous les exemples de hauteur donnée, cette phase nécessite d'une part une stratégie efficace et économique, d'autre part la prise de conscience que ce travail ne peut se suffire à lui-même, car inachevable.

. La deuxième phase est celle de la constatation qu'il existe une règle permettant de prévoir... Le caractère inachevable du travail de construction des exemples est ainsi englobé dans une hypothèse dont on prévoit qu'elle s'applique à tous les exemples.

. Constater qu'une hypothèse peut s'expliquer, non par confrontation avec les exemples qu'on ne peut tous expliciter, mais par retour au point de départ de la règle générative, fut pour tous les élèves ayant vécu ce passage un moment d'une densité très particulière, et qui s'apparente plus au choc émotionnel d'une poésie qu'à la récitation des tables de multiplication.

Pour terminer, observons cette autre direction de recherches :

	1 0 rouge	2 1 rouge	3 2 rouges	4 3 rouges	5 4 rouges	6 5 rouges	7 6 rouges	8 7 rouges	TOTAL
1°) 2 carrés	1	2	0						3
2°) 3 carrés	1	3	1	0					5
3°) 4 carrés	1	4	3	0	0				8
4°) 5 carrés	1	5	6	1	0	0			13
5°) 6 carrés	1	6	10	4	0	0	0		21
6°) 7 carrés	1	7	15	10	1	0	0	0	34
Présomption 8 carrés	1	8	21	20	5	0	0	0	55

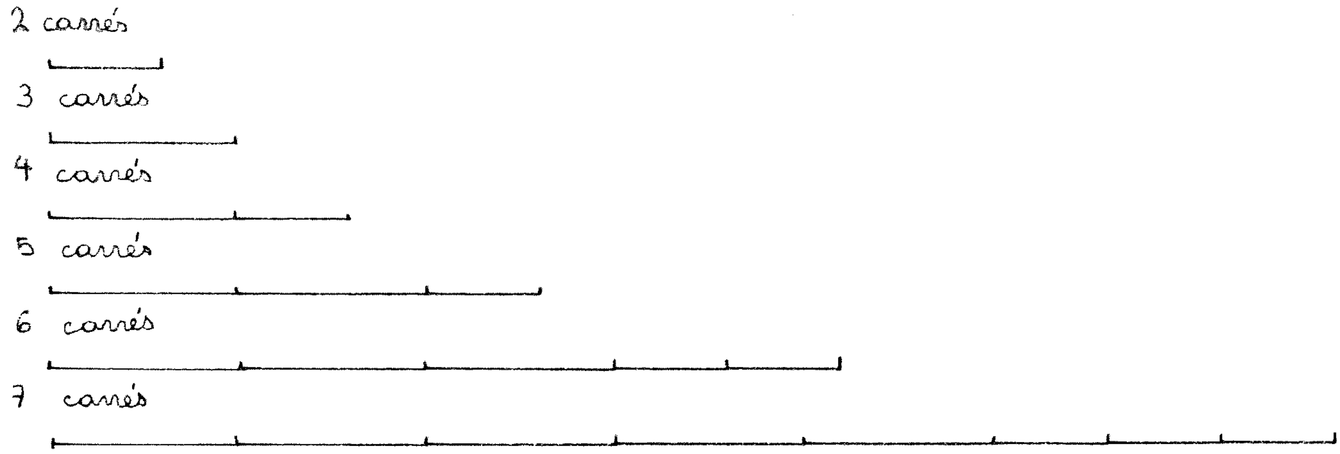
REGLE : le nombre de combinaisons possibles pour un nombre de carrés donnés est égal au total des nombres de combinaisons des deux constructions précédentes

Présomption Suite 1 : pas de progression

Présomption Suite 2 : 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ;

Présomption Suite 3 : 0 ; 1 ; 3 ; 6 ; 10 ; 15 ; 21

Présomption Suite 4 : 0 0 ; 1 ; 4 ; 10 ; 20 ;



J'ai constaté en construisant ce graphique des nombre de combinaisons
que chaque nombre est égal à 1 multiple de 5 + un multiple de trois
que les multiples de 5 suivent la même règle que le nombre de combinaisons possibles
que les multiples de 3 suivent aussi cette règle avec 1 décalage d'un rang en moins

Nombre de combinaisons pour 34 carrés =
$(2.178.309 \times 5) + (1.346.269 \times 3) = 14.930.352$ combinaisons

Et ne négligeons pas non plus ces 2 élèves qui, bien qu'ayant régulièrement travaillé, ne sont même pas parvenus à la découverte de la règle numérique. Totalement insensibles aux constatations des autres, elles ont impertubablement continé à fabriquer des exemples, arrivant enfin au bout des cinq séances à des procédés permettant de ne pas oublier des cas. Est-ce par hasard que ces deux élèves, et uniquement celles-ci, en sont restées à des références esthétiques ?

Moi, j'ai fait au hasard et je me suis aperçue que les numéros 11, 12, 13 font un dessin, les numéros 4, 5, 6 font un dessin.

J'ai pris les figures au hasard et je me suis aperçue que si on rassemblait quelques figures sa forme un damier.

"Le chemin du vrai passe par celui qui le pense"
Bachelard