Nom du jour pour une date donnée

I - DEFINITIONS ET CONVENTIONS

Le calendrier a été rectifié, avec effet du 15 octobre 1582, par le Pape Grégoire XIII, pour réajuster le défaut dû à un trop grand nombre d'années bissextiles du calendrier julien.

1) Nom du jour : J $J = 1'$ le dimanche

$J = 2'$ le lundi

. . . .

$J = 7' = 0'$ le samedi

L'ensemble des jours s'identifie à $\mathbb{Z} / 7\mathbb{Z}$

2) Quantième du mois : Q

3) Rang du mois : M $M = 3$ en mars, ... , $M = 12$ en décembre

$M = 13$ en janvier $M = 14$ en février

remarque : pour les mois ce choix s'impose parceque l'effet d'une année bissextile est sensible à partir du 1^er^ mars ; on déplace donc l'origine au 1^er^ mars. Attention : pour janvier et février il faut donc prendre le millésime de l'année précédente.

4) Millésime : N

5) Une date est la donnée d'un triplet $x = (Q, M, N)$

6) La date suivant x est notée $s(x)$.

remarques : l'ensemble des dates n'est pas un produit cartésien ; par exemple

(31, 4, N) n'est pas une date.

(2, 4, 1783) correspond au 2 avril 1783

7) Soit f l'application associant à toute date le nom du jour.

$$f : x \longmapsto J = f(x)$$

8) E est la fonction partie entière

II - PROPRIETES DE f

1) $f(s(x)) = f(x) + 1'$ (opération dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$)

$\boxed{f(s^n(x)) = f(x) + n'}$ (par récurrence)

2) Changement de millésime

$$f(1,3,N) = f(1,3,N-1) + 365' \quad \text{si } N \text{ est une année commune}$$
$$= f(1,3,N-1) + 1'$$
$$f(1,3,N) = f(1,3,N-1) + 366' \quad \text{si } N \text{ est une année bissextile}$$
$$= f(1,3,N-1) + 1' + 1'$$

par récurrence :

$$f(1,3,N) = N' + \text{nombre d'années bissextiles} + \text{constante}$$
$$= N' + E(\frac{N}{4})' - E(\frac{N}{100})' + E(\frac{N}{400})' + \text{Constante}$$

rappel : une année est bissextile si N est divisible par 4 , sauf si N est multiple de 100 sans être multiple de 400 .

exemples : 1700 n'est pas bissextile
1600 est bissextile

3) Changement de mois

$$f(1,M+1,N) = f(30,M,N) + 1' \qquad \text{si } M = 4 , 6 , 9 \text{ ou } 11$$
$$= f(1,M,N) + 30'$$
$$= f(1,M,N) + 2'$$
$$f(1,M+1,N) = f(31,M,N) + 1' \qquad \text{si } M = 3 , 5 , 7 , 8 , 10 , 12 \text{ ou } 13$$
$$= f(1,M,N) + 31'$$
$$= f(1,M,N) + 3'$$

d'où :

$$f(1,4,N) = f(1,3,N) + 3'$$
$$f(1,5,N) = f(1,4,N) + 2' = f(1,3,N) + 5'$$
$$f(1,6,N) = f(1,5,N) + 3' = f(1,3,N) + 8'$$

. . . .

$$f(1,14,N) = f(1,13,N) + 3' = f(1,3,N) + 29'$$

Posons : $g(3) = 0$; $g(4) = 3$; $g(5) = 5$; $g(6) = 8$; $g(7) = 10$; $g(8) = 13$
$g(9) = 16$; $g(10) = 18$; $g(11) = 21$; $g(12) = 23$; $g(13) = 26$; $g(14) = 29$

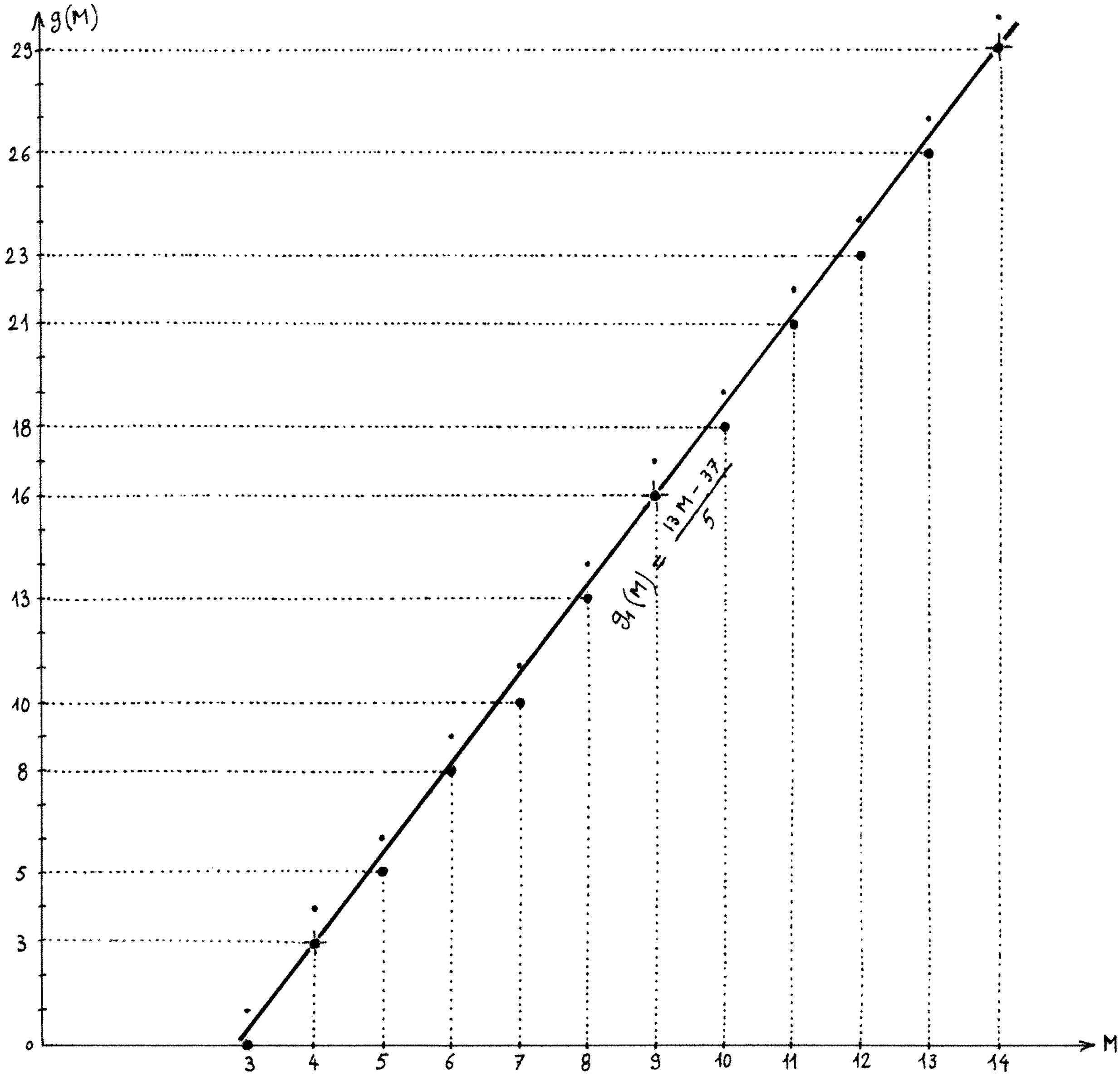
On remarque alors que :

$$(g(M))' = f(1,M,N) - f(1,3,N)$$

Une représentation de g est donnée sur le graphique ci-après. Le problème est de réduire g "à une formule", donc d'approcher g par une fonction simple. Une solution se présente par la constatation que la droite

$$g_1(M) = \frac{13\,M - 37}{5}$$

passe par trois points et que de plus : $0 \leqslant g_1(M) - g(M) < 1$



Donc on aura : $g(M) = E(g_1(M))$

et : $(g(M))' = E(\dfrac{13\,M - 37}{5})'$

$$= E(2\,M + \frac{3\,M + 3}{5} - 8)'$$

$$= 2\,M' - 8' + E(\frac{3\,M + 3}{5})'$$

$$= 2\,M' - 1' + E(\frac{3(M+1)}{5})'$$

En remplaçant dans l'expression de f , il vient :

$$f(1,M,N) = 2\,M' - 1' + E(\frac{3(M+1)}{5})' + f(1,3,N)$$

remarque : Une autre fonction g_2 vérifiant la double inégalité ci-dessus conviendrait tout aussi bien, ou encore une fonction g_3 égale à g' pour les valeurs entières, mais donneraient un aspect différent à f .

4) Changement de quantième.

$$f(Q,M,N) = f(1,M,N) + Q' - 1'$$

CONCLUSION

$$f(Q,M,N) = Q' + 2\ M' + E(\frac{3(M+1)}{5})' + N' + E(\frac{N}{4})' - E(\frac{N}{100})' + E(\frac{N}{400})' + C$$

C est une constante déterminée par un exemple : $C = 2'$. Vérifiez en prenant la date d'aujourd'hui !

III - CALENDRIER JULIEN (avant le 4-10-1582)

Le principe est le même, mais le nombre d'années bissextiles est $E(\frac{N}{4})$ à une constante près ; donc :

$$f(Q,M,N) = Q' + 2\ M' + E(\frac{3(M+1)}{5})' + N' + E(\frac{N}{4})'$$

la constante est nulle.

IV - TABLEAUX UTILISES PAR L' ADMINISTRATION

On trouvera page suivante un exemple de tels tableaux. Par les dispositions choisies :

a) le tableau I donne, à une constante près :

$$u_1 = N' + E(\frac{N}{4})' - E(\frac{N}{100})' + E(\frac{N}{400})'$$

Comment est-il constitué ?

Pour les années : un décalage d'une unité tous les quatres ans à cause de l'année bissextile.

Pour les siècles juliens : une diminution d'une unité par siècle ; dans 100 ans, on trouve 25 années bissextiles et :

$$\begin{aligned} f(Q,M,N + 100) &= f(Q,M,N) + 100' + 25' \\ &= f(Q,M,N) - 1' \end{aligned}$$

Pour les siècles grégoriens : une diminution de deux unités par siècle, sauf quand le siècle est divisible par 400. En effet le nombre d'année bissextiles n'est que de 24. Donc :

$$\begin{aligned} f(Q,M,N + 100) &= f(Q,M,N) + 100' + 24' \\ &= f(Q,M,N) - 2' \end{aligned}$$

Lentz
lycée de Barr
(pour le groupe astronomie de l'irem)

ANNEES						
00	01	02	03		04	05
06	07		08	09	10	11
	12	13	14	15		16
17	18	19		20	21	22
23		24	25	26	27	
28	29	30	31		32	33
34	35		36	37	38	39
	40	41	42	43		44
45	46	47		48	49	50
51		52	53	54	55	
56	57	58	59		60	61
62	63		64	65	66	67
	68	69	70	71		72
73	74	75		76	77	$\boxed{78}$
79		80	81	82	83	
84	85	86	87		88	89
90	91		92	93	94	95
	96	97	98	99		

TABLEAU I																
SIECLES								ANNEES								
JULIENS				GREGORIENS												
0	7	14		—	17	21	25	6	0	1	2	3	4	5	
1	8	15		—	—	—	—	5	6	0	1	2	3	4	
2	9	—		—	18	22	26	4	5	6	0	1	2	3	
3	10	—		—	—	—	—	3	4	5	6	0	1	2	
4	11	—		15	$\boxed{19}$	23	27	2	3	4	5	6	0	$\boxed{1}$	u_1
5	12	—		16	20	24	28	1	2	3	4	5	6	0	
6	13	—		—	—	—	—	0	1	2	3	4	5	6	

TABLEAU II								
	MOIS	mai	aou fév (b)	fév mar nov	jun	sep déc	$\boxed{\text{avr}}$ jul jan (b)	jan oct
u_1	$\boxed{1}$	2	3	4	5	6	$\boxed{0}$	1
	2	3	4	5	6	0	1	2
	3	4	5	6	0	1	2	3
	4	5	6	0	1	2	3	4
	5	6	0	1	2	3	4	5
	6	0	1	2	3	4	5	6
	0	1	2	3	4	5	6	0

TABLEAU III							
u_2	1 8 15 22 29	2 9 16 23 30	3 10 17 24 31	4 11 18 25	5 12 19 $\boxed{26}$	6 13 20 27	7 14 21 28
1	D	L	m	M	J	V	S
2	L	m	M	J	V	S	D
3	m	M	J	V	S	D	L
4	M	J	V	S	D	L	m
5	J	V	S	D	L	m	M
6	V	S	D	L	m	M	J
$\boxed{0}$	S	D	L	m	$\boxed{M}$	J	V

b) le tableau II donne, à une constante près $u_2 = u_1 + h(M)$; la fonction h est la fonction g' (à une constante près) mais différente pour janvier et février pour lesquels le millésime n'a pas changé. Il en résulte les deux variantes pour ces deux mois suivant que l'année est bissextile ou non.

c) le tableau III donne $u_3 = u_2 + Q$, u_2 étant introduit en première colonne.