Du calcul vers l'analyse

I - CINQ EN DEUX

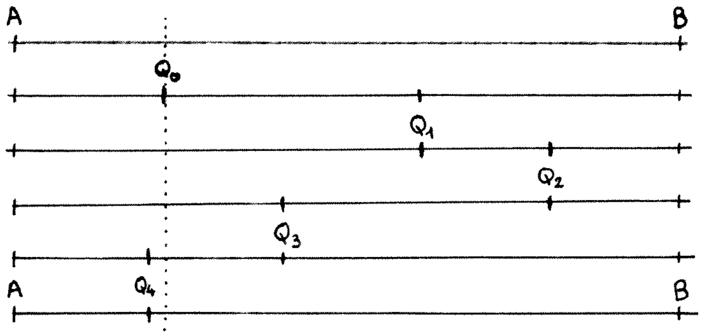
Le point de départ de la conférence de ce matin est du à deux articles de Fletcher parus dans le "Petit Archimède". Ces articles ont pour sujet l'utilisation du pliage dans les activités mathématiques.

1ére question : Marquer le milieu d'une bande de papier par pliage.

2ème question : Partager une bande de papier en cinq parties égales à l'aide de pliage en deux.

Autant la première question est triviale, autant la seconde ne l'est pas. On pourra d'ailleurs généralisée cette question en cherchant à placer le point d'abscisse x par pliage en deux.

Voici la solution de la deuxième question :



Q_0 est une première approximation.

Q_1 est le milieu de $[Q_0, B]$

Q_2 est le milieu de $[Q_1, B]$

Q_3 est le mileiu de $[A, Q_2]$

Q_4 est le mileui de $[A, Q_3]$

Alors Q_4 est une meilleure approximation du cinquième de $[AB]$ que Q_0.

Plus exactement si $\overline{AQ_0} = \left(\frac{1}{5} + h\right) \overline{AB}$

alors $\overline{AQ_4} = \left(\frac{1}{5} + \frac{h}{16}\right) \overline{AB}$

II - PREMIERE GENERALISATION

Comme il a été écrit plus haut, généralisons le problème en essayant de marquer le point d'abscisse u par pliage successif (non nécessairement en deux).

Il est d'abord bien clair qu'on peut se ramener à l'intervalle $[0 , 1]$

Pour la commodité de l'exposé, on se limitera aux décimaux de la forme $u = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots . a_n$ dont le développement décimal est fini.

Posons :
$$v = \frac{a_p}{10^p} + \frac{a_{p+1}}{10^{p+1}} + \ldots . + \frac{a_n}{10^n}$$

on a alors : $$\frac{a_p}{10^p} \leqslant v < \frac{a_p+1}{10^p}$$

en particulier : $$\frac{a_1}{10} \leqslant u < \frac{a_1+1}{10}$$

On peut donc affirmer que si on plie la bande en 10 , le point cherché est entre le (a_1)ième et le (a_1+1)ième plis et comme on peut écrire u sous la forme :

$$u = \frac{a_1}{110} + \frac{1}{10}\left(\frac{a_2}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^{n-1}}\right)$$

on est ramené à repérer le point :

$$u_1 = \frac{a_2}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^{n-1}}$$

sur le segment déterminé par les deux plis précédents. On itère le processus jusqu'à l'obtention de l'approximation voulue.

Critiquons tout de suite ce procédé. D'abord on ne sait pas faire le partage en dix, sauf l'approximation donnée au premier paragraphe. Ensuite, quand bien même saurait-on faire ce partage, au delà du deuxième coup, il est vraisemblable que la bande manipulée serait trop petite pour effectuer le moindre pliage.

III - DEUXIEME GENERALISATION

En se fondant sur ces critiques et en se rappelant le mot de Gagnaire selon lequel "Deux est tout puissant", on va travailler en base deux.

On ne considèrera que les nombres dont le développement diadique est fini ou périodique. On se souviendra qu'un nombre peut avoir un développement fini en base dix et infini périodique en base deux ; par exemple :

$$(0,2)_{\text{dix}} = (0,\overline{0011})_{\text{deux}}$$

a) Le même raisonnement qu'en base dix prouve que si le développement est fini, on a :

$$u = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n}$$

avec : $$\frac{a_1}{2} \leqslant u < \frac{a_1+1}{2}$$

et par suite :

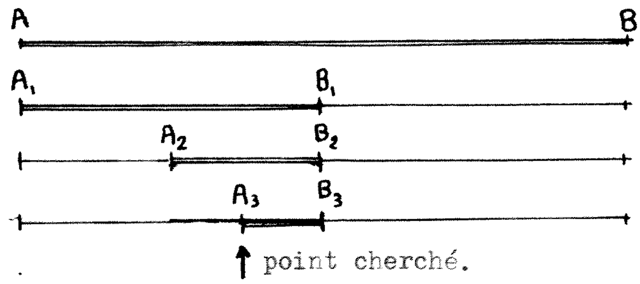
$$a_1 = 0 \implies 0 \leqslant u < 1/2$$
$$a_1 = 1 \implies 1/2 \leqslant u < 1$$

d'où le codage : si $a_1 = 0$ on plie $[AB]$ en deux et on garde la partie gauche.
si $a_1 = 1$ on fait de même mais en gardant la partie droite.

On fait la même chose sur le segment $[A_i B_i]$ gardé au ième pliage en raisonnant sur la ième "bicimale" .

<u>exemple</u> : $3/8 = (0,011)_{\text{deux}}$

d'où la construction suivante :



b) Si maintenant le développement est périodique, on introduit la même technique sur la partie irrégulière puis sur la première période, puis sur la deuxième, etc .... Le procédé utilisé converge puisqu'en posant :

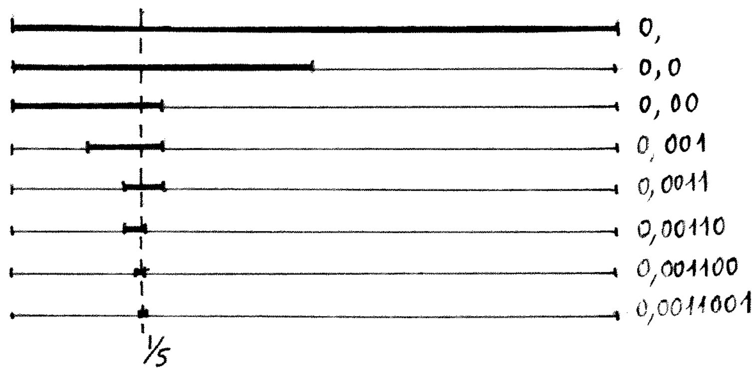
$$u = 0,a_1a_2 \ldots\ldots\ a_n \ldots\ldots$$

et $$u_p = 0,a_1a_2 \ldots a_p$$

alors : $|u - u_p| \leqslant \frac{1}{2^p}$ qui peut être aussi petit que l'on veut.

<u>exemple</u> : $1/5 = (0,\overline{0011})_{\text{deux}}$

d'où la construction suivante :



qui est une illustration magnifique du théorème sur les segments emboîtés.

<u>IV - OU L' ENVERS VAUT L' ENDROIT (et vice versa)</u>

Soit $u = 0,a_1a_2 \ldots a_n$ le développement limité à n bicimales d'un nombre. Supposons qu'au lieu d'effectuer le processus de pliage tel qu'il a été ennoncé en partant de a_1 , on le fasse en partant de a_n . Il est alors étonnant qu'on trouve le même point !

1) Si u a une seule bicimale : $u = 0{,}1$ le résultat est évident

2) Raisonnons alors par récurrence et supposons que cela soit vrai pour

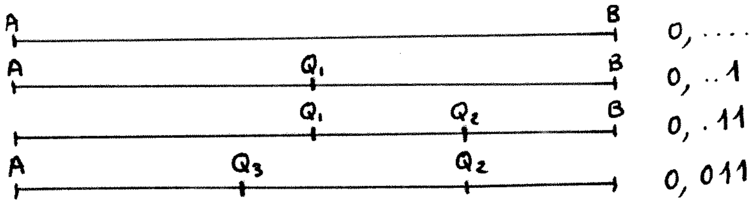
$$u_n = 0,\ b_n b_{n-1} \ldots\ldots b_1$$

considérons $\quad u_{n+1} = 0,\ b_{n+1} b_n b_{n-1} \ldots\ldots b_1$

si $b_{n+1} = 0$ alors $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$ et Q_{n+1} est le milieu de $[A\,Q_n]$ c'est à dire le milieu de la partie gauche.

si $b_{n+1} = 1$ alors $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n)$ et Q_{n+1} est le milieu de $[Q_n\ B]$ c'est à dire le milieu de la partie droite.

exemples : $u = 3/8$



$u = 1/5$; en conservant deux périodes on trouve que

$$AQ_4 = 0{,}\ 1875$$
$$AQ_8 = 0{,}\ 19921875$$

la convergance est rapide puisque $\left| u - u_q \right| \leqslant \frac{1}{2^q}$ et par conséquent si u_q s'écrit avec k périodes de longueur p et une partie irrégulière de longueur r :

$$\left| u - u_q \right| \leqslant \frac{1}{2^{kp+r}}$$

ce qui permet de prévoir le nombre de période nécessaire pour atteindre une précision donnée.

Remarques : 1) Il existe une méthode très simple pour trouver l'écriture dyadique de A/B où A et B sont étrangers (premiers entre eux).

— Si $2A/B < 1$ alors $A/B < 1/2$ et $a_1 = 0$

— Si $2A/B > 1$ alors $A/B > 1/2$ et $a_1 = 1$

au coup suivant, si $a_1 = 0$ on travaille avec $2A/B$

si $a_1 = 1$ on travaille avec $(2A/B)-1$

et on recommence.

exemple : $1/5 \dashrightarrow 2/5 \dashrightarrow 4/5 \dashrightarrow 8/5$

$3/5 \dashrightarrow 6/5$

$1/5 \dashrightarrow \ldots$

o $\quad$ 0,0 $\quad$ 0,00 $\quad$ 0,001 $\quad$ 0,0011 $\quad$ . . .

2) En base n le développement de A/B n'a pas de partie irrégulière si

pgcd(B,n) = 1 . En particulier en base deux si B est impair.

contre exemple : 5/8 n'a qu'une partie irrégulière : $(0,101)_{\text{deux}}$.

V - A LA RECHERCHE DES RACINES

Imaginons qu'un constructeur facétieux ait réalisé une calculatrice n'autorisant que les multiplications et les extractions de racines carrées (et disposant de quelques mémoires). Peut-on avec une telle machine calculer la racine cinquième d'un nombre u ?

Voici une solution et son explication :

$$y = \sqrt[5]{u}$$

$$y^5 = u$$

$$y^6 = u.y \qquad \text{en multipliant par } y$$

$$y^3 = \sqrt{u.y} \qquad \text{en prenant la racine carrée des deux membres.}$$

$$y^8 = u\sqrt{u.y} \qquad \text{en multipliant par } y^5 = u$$

$$y^4 = \sqrt{u\sqrt{u.y}} \qquad \text{en prenant la racine carrée des deux membres.}$$

$$y^2 = \sqrt{\sqrt{u\sqrt{u.y}}} \qquad \text{" " " " "}$$

$$y = \sqrt{\sqrt{\sqrt{u\sqrt{u.y}}}} \qquad \text{" " " " "}$$

On dira que la formule ne permet pas de calculer y puisqu'elle le contient dans les deux membres. En fait, elle le permet en partant d'une valeur approchée y_o et en itérant le processus

$$y_1 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{u\sqrt{u.y_o}}}}$$

. . . .

$$y_{n+1} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{u\sqrt{u.y_n}}}}$$

car il y a convergence ; par exemple, si u = 49 , en partant de $y_o = 3$ on obtient successivement :

y_1 = 2, 221 937 524
y_2 = 2, 180 632 624
y_3 = 2, 178 076 712
y_4 = 2, 177 917 067
y_5 = 2, 177 907 090
y_6 = 2, 177 906 466
y_7 = 2, 177 906 427
y_8 = 2, 177 906 425

Voici une autre solution :

On remarque que : $\frac{1}{5} = \frac{3}{16-1} = \frac{3}{16} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{16}}$

$$= \frac{3}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{4n}}$$

donc: $$\sqrt[5]{u} = u^{1/5} = \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[2^{4n}]{u^3}$$

d'où le processus itératif suivant :

$$u_o = u^3$$

$$u_1 = \sqrt{u_o}$$

$$\cdots\cdots$$

$$u_n = \sqrt{u_{n-1}}$$

et : $$\sqrt[5]{u} = \prod_{p=1}^{\infty} u_{4p}$$

Je laisse le soin à chacun d'entre vous de généraliser cet aspect.

M. GLAYMANN
irem de lyon