Le nombre π

1) La recherche de la valeur exacte de π a été une constante de l'histoire des mathématiques. L'avènement de l'ordinateur a mis un terme à cette recherche en permettant le calcul de milliers de décimales en un temps record, ce qui ne présente aucun intérêt, sinon de fournir de façon très compliquée une table de nombres au hasard (on vérifie en effet, que l'ordre des chiffres dans le développement décimal de π est aléatoire).

Après Archimède qui avait fourni la valeur approchée 22/7 , Metius à la fin du seizième siècle donna la fraction 355/113 qui est exacte à moins de $3.\ 10^{-7}$ près. Ces deux fractions ne sont autres que des réduites particulières du développement de π en fractions continues :

$$\pi = 3, \{ 7 , 15 , 1 , 292 , 1 , 1 , 1 , 2 , 1 , 3 , 1 , 14 , 2 , 1 , 1 , 2 , 2 , 2 , 2 , 1 , 84 , 2 , 1 , 1 , 15 , 3 , 13 , 1 , 4 , 2 , 6 , 6 , 1 \ldots \}$$

(Voir l'article sur les fractions continues de Goerg dans ce numéro).

Les premières méthodes de calcul de π utilisaient les propriétés des polygônes réguliers inscrits et exinscrits dans un cercle. En doublant à chaque fois le nombre de côtés et en partant du carré, on vérifie que :

$$\pi = \lim_{n \to \infty} 2^n \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}_{\text{il y a } n \text{ fois } 2}$$

à titre d'exemple, on obtient pour n = 6 : 3, 141 3 ...

Au début du XVII ème siècle, le hollandais Ludolf Van Ceulen donna π avec 34 décimales et à la fin du siècle le français Lagny en donna 128 .

2) On peut s'amuser à retenir les 30 premières décimales de π au moyen du célèbre quatrain suivant, où chaque décimale est donnée par le nombre de lettre du mot correspondant :

Que j ' aime à faire apprendre un nombre utile aux sages
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

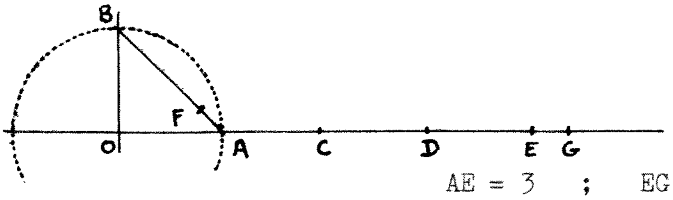
Immortel Archimède , artiste ingénieur !
8 9 7 9

Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
3 2 3 8 4 6 2 6

Pour moi ton problème eut de pareils avantages.
4 3 3 8 3 2 7 9

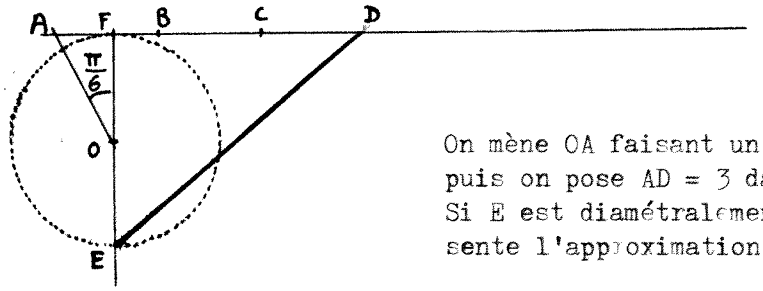
3) D'autres approximations de π sont souvent utilisées, car constructibles à la règle et au compas ; par exemple :

* $3 + \sqrt{2}/10 \simeq 3,1414$ qui donne une erreur relative de $1/15000$



AE = 3 ; EG = AF = AB/5
AG est l'approximation recherchée

* $\sqrt{\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2^2} \simeq 3,14153$ qui donne une erreur de $6/100\,000$



On mène OA faisant un angle de 30º avec OF, puis on pose AD = 3 dans la direction de AF. Si E est diamétralement opposé à F, ED représente l'approximation cherchée.

4) On sait que π est transcendant, donc non seulement π n'est pas constructible à la règle et au compas(d'où en particulier l'impossibilité de la quadrature du cercle) mais encore π n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers. Cependant le développement de certaines fonctions en séries entières permet d'affirmer que π est la plus petite solution positive de l'équation :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \qquad (\Leftrightarrow \quad \sin x = 0)$$

5) Schwab de Nancy a démontré en 1813 que $1/\pi$ est la limite vers laquelle tend la suite des nombres obtenus en partant de 0 et de 1/2 et en prenant alternativement la moyenne arithmétique et la moyenne géomètrique entre les deux nombres précédents. On trouve successivement :

$u_0 = 0$	$u_6 = 0,314\,21\ldots$
$u_1 = 0,5$	$u_7 = 0,320\,36\ldots$
$u_2 = 0,25$	$u_8 = 0,317\,29\ldots$
$u_3 = 0,353\,55\ldots$	$u_9 = 0,318\,82\ldots$
$u_4 = 0,301\,78\ldots$	. . . .
$u_5 = 0,326\,64\ldots$	$1/\pi = 0,318\,098\ldots$

Cela revient à étudier la suite :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad ; \quad u_1 = 0{,}5 \\ u_{2n} = \frac{1}{2}\left(u_{2n-1} + u_{2n-2} \right) \\ u_{2n+1} = \sqrt{u_{2n} \cdot u_{2n-1}} \end{cases}$$

6) La fonction Γ généralise la notion de factoriel, plus exactement, on a : $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour n entier strictement positif. On démontre entre autre que :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!\, n^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

et que :

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

en conclusion, $\sqrt{\pi}$ apparaît comme étant la limite de la suite :

$$u_n = \frac{2.4.6.\cdots\cdots 2n}{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Pour u_{10} on trouve la valeur 1, 794 ... alors que $\sqrt{\pi}$ = 1, 772 ...
On peut rapprocher ce résultat de la formule de Stirling :

$$n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

7) On définit la fonction Arctg par :

$$\left.\begin{array}{c} x = \operatorname{tg} y \\ -\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \iff y = \operatorname{Arctg} x$$

On démontre que la dérivée de cette fonction est donnée par $\frac{1}{1+x^2}$. Par conséquent, comme $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$, on a :

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

ce qui permet de calculer une valeur approchée de π par les méthodes numériques de calcul des intégrales définies.

On peut aussi développer Arctg x en série entière :

$$\operatorname{Arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

et donc : $\pi/4 = \operatorname{Arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots\cdots\cdots$

Mais ce résultat est peu utile car la série ainsi obtenue ne converge pas vite. Aussi utilise-t-on habituellement l'artifice suivant :

En partant de l'expression donnant la tangente d'une somme, on démontre que, sous certaines hypothèses :

$$\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} y = \operatorname{Arctg} \frac{x+y}{1-xy}$$

On remarque alors que :

$$4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctg} \frac{1}{239} = \operatorname{Arctg} 1$$

et en utilisant le développement en série entière, on obtient finalement le résultat :

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots\right)$$

cette série converge très rapidement puisque :

$4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5}\right) + \frac{1}{239} = 0,\ 785\ 405\ldots$ alors que $\pi/4 = 0,\ 785\ 398\ldots$

8) π est un nombre fondammental en mathématiques car il intervient dans de nombreux problèmes où on ne l'attend pas. En probabilité on le retrouve dans :

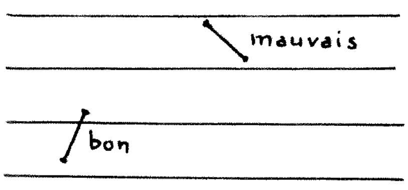
$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ce qui permet de normaliser la fonction Φ définie par :

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$

(e^{-t^2} redonne la fameuse courbe en cloche de Gauss).

Il faut aussi citer la célèbre expérience de Buffon (1707-1788) : On laisse tomber sur un réseau de parallèles équidistantes une aiguille dont la longueur est égale à la distance de deux droites voisines. Si la chute se fait au hasard, alors la probabilité que l'aiguille coupe une des droites du réseau est égal à $2/\pi$. Cette expérience est renouvellée quotidiennement au Palais de la Découverte à Paris.



Citons également ce résultat probabiliste : Si on se donne deux nombres au hasard (ou une fraction), la probabilité pour que ces deux nombres soient premiers entre eux (ou que la fraction soit irréductible) est égale à $6/\pi^2$

9) Pour conclure, rappelons la célèbre formule :

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

due à Euler et dans laquelle ce dernier voyait la preuve de l'existence de Dieu !