UN PEU D'HEURISTIQUE

Un groupe de professeurs du second cycle s'est intéressé durant l'année 1974/75 au comportement de leurs élèves devant des énoncés d'exercices ou de problèmes posés en termes "inhabituels". Il ne s'agissait pas d'en déduire quelque résultat que ce soit sur le mode de compréhension et de raisonnement des élèves, d'un niveau donné ; il n'était pas question de tester nos élèves ou notre enseignement.

Plus modestement, le but était en se forçant à l'observation de nos élèves -malgré le programme, malgré l'examen, malgré les classes trop nombreuses- de se rendre compte de la diversité de leurs réactions, de leurs difficultés d'appréhender une situation inconnue -sans référence immédiate au "cours"-, de leurs intérêts,... bref, le but était plus d'apprendre de nos élèves que de chercher à mieux leur apprendre "nos" mathématiques.

On lira ci-dessous un premier énoncé et un peu de ce que les élèves auxquels ils furent donnés, nous ont appris.

De l'importance d'un énoncé

Enoncé :

L'équation : $x^8 - 5x^7 = 3x^6 + 15x^5 - 22x^4 + 20x^3 - 12x^2 - 60x + 72 = 0$ admet huit racines dont $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $i\sqrt{2}$. Quelles sont les huit racines de : $216x^8 - 180x^7 - 36x^6 + 60x^5 - 66x^4 + 45x^3 + 9x^2 - 15x + 3 = 0$?

1° Il y a, en fait dans ce problème, deux questions :
  a) Quelles sont les solutions de (1), la première équation
  b) Quels liens y-a-t'il entre les solutions de (1), la première équation et celles de (2), la seconde équation ?

Tel quel, cet exercice a été proposé dans une T.D. et une T.C. en travail de groupes (de deux ou trois élèves) et a soulevé un vif intérêt en ce sens que la plupart des élèves se sont acharnés à le résoudre. Ils ont trouvé des éléments de réponse en répondant à a) ou à b) (partiellement ou totalement). Quelques groupes ont résolu entièrement l'exercice dans l'heure qui leur était impartie.

1° Chez certains une période d'"essais" durant laquelle l'élève espère avoir la chance de trouver des solutions "évidentes" de (1) ou de (2) ; par exemple $\sqrt{2}$ dans (2) "parce que" $\sqrt{2}$ est solution de (1), $\sqrt{4}$ dans (1) parce que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ sont solutions de (1) ; développer $(z + a)^8$ parce que l'équation est du 8e degré.

2° Chez d'autres un démarage rapide dans le but de factoriser le premier membre de (1) : $(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{3})(x - i\sqrt{2})(ax^5 + \ldots)$; en général, ces élèves espèrent longtemps que le calcul entrepris finira par "donner quelque chose" et n'abandonnent que tardivement. Il y a des tentatives d'amélioration en remarquant que $-i\sqrt{2}$ est aussi racine de (1) (racines complexes d'une équation à coefficients réels) et parfois que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont racines doubles de (1) (puisqu'étant propres complexes conjugués) (!).

3° La plupart devinent la relation entre les solutions de (1) et celles de (2) ; mais pas tous ; en particulier un groupe ayant trouvé les solutions de (1) ne trouvera pas celles de (2). Et peu démontrent cette relation, beaucoup vérifiant, chaque fois, que l'inverse d'une solution de (1) est bien solution de (2).

4° Plusieurs groupes, après des essais infructueux, en viennent à vérifier que $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}$ sont bien solutions de (1), mais plusieurs ne déduisent rien de cette vérification, c'est-à-dire font un calcul de "routine", sans observation ni réflexion. Certains le font et c'est ce qui les conduit rapidement à trouver deux autres solutions de (1), puis toutes par factorisation.

Commentaire :

Cet exercice accroche l'attention des élèves ; ils sentent que sa résolution est tout à fait à leur portée, même s'ils ne trouvent pas rapidement et les essais plus ou moins fructueux ne les découragent pas, en général. De plus, sa résolution ne demande pas "d'astuce" mais de la réfléxion.
Cet exercice permet d'observer un certain nombre de comportements des élèves : ceux qui espèrent trouver "par chance" ceux qui se lancent "tête baissée" dans les calculs, ceux qui oscillent entre les deux questions et ceux qui les cherchent méthodiquement l'une après l'autre dès le départ, ceux qui s'accrochent à un calcul, ceux qui en font le minimum, etc...

Autre énoncé :

Soit l'équation dans C :
$x^8 - 5x^7 + 3x^6 + 15x^5 - 22x^4 + 20x^3 - 12x^2 - 60x + 72 = 0 \quad (1)$

1° Vérifier que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $i\sqrt{2}$ sont des racines de (1).
2° En déduire les autres solutions de (1).
3° En déduire les solutions de :
$216x^8 - 180x^7 - 36x^6 + 60x^5 - 66x^4 + 45x^3 + 9x^2 - 15x + 3 = 0 \ (2)$

Tel quel, cet exercice a été proposé dans une T.C. où il a rencontré un intérêt mitigé ; plus de la moitié des élèves manifestant assez rapidement des signes de lassitude : "l'exercice ne présente pas d'intérêt en tant que recherche, ce sont des calculs, particulièrement le 1) et les résultats trouvés en 2) sont le fruit de longs essais laborieux", "ce calcul est très peu intéressant car un ordinateur serait bien plus approprié pour le faire" ont dit certains (!).

Commentaire :

L'énoncé est probablement en cause car il impose à l'élève :

1° une vérification qui, au départ, lui semble fastidieuse et inutile malgré le "en déduire" qui suit.

2° une démarche linéaire ; s'il ne trouve pas en 2), le voilà en panne sans possibilité de diversion à cause du "en déduire" qui suit.

3° il ne semble pas que ces "en déduire" qui recouvrent des déductions très différentes aident les élèves à trouver ni même à chercher.

Remarques :

- on énonce en T.D. et T.C. un résultat sur les racines complexes d'une équation polynômiale à coefficients réels, mais non sur les racines réelles (du moins, certaines) d'une équation polynômiale à coefficients rationnels. Il n'y a eu aucune "activité de transfert" (ou raisonnement par analogie) dans la T.C. qui avait étudié $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ avant d'étudier $\mathbb{C}$, en classe.

- on peut aménager l'énoncé pour que (1) et (2) n'aient pas de racines imaginaires, de façon à le poser en classe de seconde ou première.