Introduction aux fractions continues

Dans un premier temps rappelons l'algorithme d'Euclide pour la recherche du P.G.C.D. de deux entiers naturels non nuls.

Notons le P.G.C.D. de a et b : $a \wedge b$

Soit $a > b$, alors par division euclidienne, on obtient :

$$a = b\,q_o + r_o \qquad 0 < r_o < b$$

Si $r_o = 0$ $\qquad a \wedge b = b$

Si $r_o \neq 0$ $\qquad a \wedge b = b \wedge r_o$ on effectue une nouvelle division qui donne :

$$b = r_o \cdot q_1 + r_1 \qquad 0 < r_1 < r_o < b$$

Si $r_1 = 0$ $\qquad b \wedge r_o = r_o$ d'où $a \wedge b = b \wedge r_o = r_o$

Si $r_1 \neq 0$ $\qquad a \wedge b = b \wedge r_o = r_o \wedge r_1$

On peut réitérer le raisonnement jusqu'à obtenir un reste nul. Les restes successifs sont positifs et forment une suite strictement décroissante :

(1) $\quad 0 \leqslant r_{n+1} < r_n < r_{n-1} < \ldots\ldots\ldots < r_1 < r_o < b$

Cette suite fait partie de $\mathbb{N}$, $\left\{ r_o , r_1 , \ldots\ldots r_{n+1} \right\} \subset \mathbb{N}$ car aucun des restes ne peut être égal à un autre. Cette partie est finie car elle est majorée par b. Il existe donc un entier n tel que la division de r_{n-1} par r_n donne un reste nul : r_{n+1} .

En effet, si aucun des restes sudcessifs n'était nul, les divisions pourraient se poursuivre indéfiniment et la suite (1) ne serait pas finie ; or elle est constituée d'éléments de $\mathbb{N}$ tels que $\forall i \quad r_i \in \left[0 , b \right]$. On a donc :

$$a \wedge b = r_{n-1} \wedge r_n = r_n$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} a = b \cdot q_o + r_o \\ b = r_o \cdot q_1 + r_1 \\ r_o = r_1 \cdot q_2 + r_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_i = r_{i+1} \cdot q_{i+2} + r_{i+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1} + (r_{n+1}) \end{array} \right.$$

Exemples de disposition pratique :

a) $2070 \wedge 368$

q_i		5	1	1	1	2
	2070	368	230	138	92	46
r_i	230	138	92	46	0	

$2070 \wedge 368 = 46$

b) $97 \wedge 42$

	2	3	4	3
97	42	13	3	1
13	3	1	0	

$97 \wedge 42 = 1$

On voit apparaître la suite des quotients successifs $\{2, 3, 4, 3\}$. Si maintenant on calcule :

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3}}}}$$ on trouve $42 / 97$.

Donc :
$$\frac{97}{42} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3}}}$$

On peut noter $42 / 97 = \{2, 3, 4, 3\}$ et $97 / 42 = (2)\{3, 4, 3\}$

Définissons maintenant ce qu'on appelle une fraction continue :

Considérons la suite de naturels $\{x_1, x_2, \dots\ x_i, \dots\ x_n\}$. On appelle fraction continue le rationnel x écrit sous la forme :

$$x = \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}}}}$$

Relativement à la fraction continue x on appelle réduites, ou convergents successifs les rationnels de la suite :

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{1}{x_1} \quad ; \quad \frac{u_2}{v_2} = \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2}} \quad ; \ \dots\dots \qquad \frac{u_n}{v_n} = x$$

Ces réduites ont des propriétés fort intéressantes. On prend :

$$u_1 = 1 \qquad\qquad v_1 = x_1$$

$$u_2 = x_2 \qquad\qquad v_2 = x_1 x_2 + 1$$

$$u_3 = x_2 x_3 + 1 \qquad\qquad v_3 = (x_1 x_2 + 1) x_3 + x_1$$

On voit apparaître une loi de formation indiquée par u_3 et v_3 :

$$u_3 = u_2 x_3 + u_1 \qquad\qquad v_3 = v_2 x_3 + v_1$$

Montrons par récurrence que :

$$(3) \qquad \begin{cases} u_i = u_{i-1} x_i + u_{i-2} \\ v_i = v_{i-1} x_i + v_{i-2} \end{cases}$$

Soit en effet :

$$\frac{u_i}{v_i} = \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x_{i-1} + \cfrac{1}{x_i}}}}} \qquad (4)$$

Pour obtenir u_{i+1}/v_{i+1} il suffit d'ajouter à l'expression (4) $\dfrac{1}{x_i + \dfrac{1}{x_{i+1}}}$ soit $\dfrac{x_{i+1}}{x_i x_{i+1} + 1}$. Il s'en suit que $\dfrac{u_{i+1}}{v_{i+1}}$ s'obtient en remplaçant $1/x_i$ par la quantité : $\dfrac{x_{i+1}}{x_i x_{i+1} + 1}$, ainsi :

$$\frac{u_{i+1}}{v_{i+1}} = \frac{u_{i-1}\dfrac{x_i x_{i+1} + 1}{x_{i+1}} + u_{i-2}}{v_{i-1}\dfrac{x_i x_{i+1} + 1}{x_{i+1}} + v_{i-2}} = \frac{(u_{i-1} x_i + u_{i-2}) x_{i+1} + u_{i-1}}{(v_{i-1} x_i + v_{i-2}) x_{i+1} + v_{i-1}} = \frac{u_i x_{i+1} + u_{i-1}}{v_i x_{i+1} + v_{i-1}}$$

La relation (3) donnant u_i et v_i est donc vraie.

Comme premier exemple, calculons les réduites successives avec la suite notée $X = \{x_1, x_2, \dots\ x_n\} = \{1, 1, 1\ \dots, 1\}$ et $n = 10$; on obtient avec $u_1 = 1$, pour u_i : $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55\}$

pour v_i : $\{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89\}$

D'où pour $\dfrac{u_i}{v_i}$: $\left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{8}{13}, \dfrac{13}{21}, \dfrac{21}{34}, \dfrac{34}{55}, \dfrac{55}{89}\right\}$

Les valeurs sont les inverses des rationnels formanat la suite de Fibonacci, suite qui a pour limite $(1 + \sqrt{5})/2 \simeq 1,618\,033\,96\dots$ liée au <u>nombre d'or</u> cher aux artistes.

Prenons maintenant comme suite celle constituée par 8 termes tous égaux à 2 . $u_1 = 1$; $v_1 = 2$; on obtient :

$$\frac{u_i}{v_i} = \left\{ \frac{1}{2} , \frac{2}{5} , \frac{5}{12} , \frac{12}{29} , \frac{29}{70} , \frac{70}{169} , \frac{169}{408} , \frac{408}{985} \right\}$$

soit à 10^{-7} près par défaut :

$\{ 0,5$; $0,4$; $0,4166666$; $0,4137931$; $0,4142857$; $0,4142011$; $0,4142156$; $0,4142131 \}$

On constate que la suite des réduites d'ordre impair est décroissante, celle des réduites d'ordre pair est croissante. De plus les deux suites tendent vers $-1 + \sqrt{2}$ 0,414135... Ces propriétés se démontrent.

Une "analogie" existe entre les fractions continues et la fonction homographique.

Soit $f : x \dashrightarrow \frac{ax + b}{cx + d}$ $\left(x \neq - \frac{d}{c} \right)$ et $c \neq 0$

La variation de f dépend du signe de la dérivée $f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$. Cette dérivée peut être notée :

$$\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$

On appellera déterminant de f le nombre $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

On peut de même associer à la fonction homographique sa <u>matrice</u> dont le déterminant est Δ .

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ainsi on peut symboliquement écrire :

$$y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+b \\ cx+d \end{pmatrix} = \frac{ax + b}{cx + d}$$

ou plus simplement $y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . x$

Si maintenant on compose deux fonctions homographiques d'après le schéma :

$$t \xrightarrow{g} x \xrightarrow{f} y$$

alors $f \circ g\,(t) = f\,(\,g(t)\,) = f\,(x) = y$ et si $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ et $g(x) = \frac{a'x + b'}{c'x + d'}$ il vient :

$$y = \frac{(aa' + bc')t + (ab' + bd')}{(ca' + dc')t + (cb' + dd')} \qquad (5)$$

Mais si les matrices respectives de f et g sont F et G , alors comme pour les matrices d'applications linéaires $\mathrm{mat}(f \circ g) = F . G$ ce qui donne en appliquant la règle du produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} = F \cdot G$$

et $\quad f_o g\,(t) = F \cdot G \cdot t \quad$ en comparant à (5)

de même $\quad \Delta(f_o g) = \Delta(f) \cdot \Delta(g)$

Comment se servir des matrices ainsi définies pour aborder les fractions continues.

Reprenons la recherche du P.G.C.D. de 97 et 42 . Soit :

$$97 = 42 \times 2 + 13$$
$$42 = 13 \times 3 + 3$$
$$13 = 3 \times 4 + 1$$
$$3 = 1 \times 3$$

La suite $\{2 , 3 , 4 , 3\}$ se retrouve. Si on pose $a = 97$; $b = 42$ il vient :

$$a = b.2 + r_o \qquad r_o = 13 < b \quad (=42)$$
$$b = r_o.3 + r_1 \qquad r_1 = 3 < r_o \quad (=13)$$
$$r_o = r_1.4 + r_2 \qquad r_2 = 1 < r_1 \quad (=3)$$
$$r_1 = r_2.3$$

D'où si $x = \frac{a}{b}$; $y = \frac{b}{r_o}$; $z = \frac{r_o}{r_1}$; $t = \frac{r_1}{r_2}$ on voit que :

$$x = 2 + \frac{1}{y} = \frac{2y+1}{y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . y$$
$$y = 3 + \frac{1}{z} = \frac{3z+1}{z} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . z$$
$$z = 4 + \frac{1}{t} = \frac{4t+1}{t} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . t$$
$$t = 3$$

x , y et z sont des fonctions homographiques de matrices particulières $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Tous les déterminants valent (-1) .

Calculons x par la composée des applications. L'on obtient :

$$x = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . 3 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . 3 = \begin{pmatrix} 30 & 7 \\ 13 & 3 \end{pmatrix} . 3 = \frac{97}{42}$$

Ceci va permettre une nouvelle définition des réduites.

Mais auparavant rappelons que nous sommes partis de la suite

$$(2)\{3 , 4 , 3\} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3}}}$$

Chaque élément de cette suite ayant donné naissance à une matrice du type $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\Delta = -1$. Le déterminant du produit de deux telles matrices est 1 .

En effet :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha' & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + 1 & \alpha \\ \alpha' & 1 \end{pmatrix}$$

a pour déterminant $\alpha\alpha' + 1 - \alpha\alpha' = 1$ quelque soit α et α'.

Ceci va nous permettre de généraliser :

Partant d'une suite $\{ \alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \dots \dots \alpha_i , \dots \dots \alpha_n \}$

les matrices déduites $\begin{pmatrix} \alpha_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_i$ permettent de calculer x par la relation :

$$x = (A_1 . A_2 \dots . A_n).{}_n$$

Il s'en suit que pour les produits d'ordre impair les déterminants seront égaux à -1 et à $+1$ pour l'ordre pair.

Exprimons $M_n = A_1 A_2 \dots\dots A_n$ à l'aide de M_{n-1} .

Soit donc $\quad M_{n-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \Delta(M_{n-1}) = \pm 1$

or $\quad M_n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha_n + b & a \\ c\alpha_n + d & c \end{pmatrix}$

$$\Delta(M_n) = bc - ad = (-1)\, \Delta(M_{n-1})$$

Retenons que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha_n + b \\ c\alpha_n + d \end{pmatrix}$ qui donne la première colonne de M_n ,

alors que la deuxième est la première de M_{n-1} .

On appelle réduite le rapport des termes des deux colonnes :

$$R_n = \frac{a\alpha_n + b}{c\alpha_n + d} \quad \text{est la réduite d'ordre } n .$$

Soit par exemple la suite (2)$\{ I , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 , 1 \}$. On arrive à :

$$\frac{2}{1} , \frac{3}{1} , \frac{8}{3} , \frac{11}{4} , \frac{30}{11} , \frac{41}{15} , \frac{112}{41} , \frac{153}{56} , \frac{418}{156} , \frac{571}{209}$$

qui sont les réduites successives de 571/209 .

On a par exemple $\quad M_8 = \begin{pmatrix} 153 & 112 \\ 56 & 41 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

R_8

Les réduites de 209/571 étant alors données par la suite :

$$\frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{3}{8} , \frac{4}{11} , \frac{11}{30} , \dots \dots \text{etc.}$$

On remarque que toutes ces réduites sont des fractions irréductibles.

Supposons une fonction homographique telle que sa matrice soit composée de termes tous positifs. Supposons de même que la variable soit positive.

Prenons par exemple : $y = \dfrac{41x + 30}{15x + 11}$ (7) Comme $x \geqslant 0$, y est toujours définie. De plus :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 41 & 30 \\ 15 & 11 \end{vmatrix} = 1$$

On a donc dans ce cas $41 \, . \, 11 - 15 \, . \, 30 = 1$

Dans le cas général on a $ad - bc = \pm 1$ si le déterminant s'écrit $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

et si a , b , c , d sont des naturels, alors d'après le théorème de Bachet-Bezout, les deux termes d'une même ligne ou d'une même colonne sont premiers entre eux. Les réduites sont donc des fractions irréductibles.

De plus, comme a , b , c , d sont dans $\mathbb{N}$ et que x est également dans $\mathbb{N}$:

si $x \longrightarrow \infty$ $\quad y \longrightarrow a/c$

si $x = 0$ $\quad y = b/d$

Donc y est compris entre a/c et b/d . Ainsi (7) est compris entre $\dfrac{30}{11}$ et $\dfrac{41}{15}$.

Avant de terminer, quelques mots sur les réduites de π.

on a : $3,1415926 < \pi < 3,1415927$

d'où :

$$A = \frac{15707963}{5000000} < \pi < \frac{31415927}{10000000} = B$$

ce qui donne deux suites :

pour A : $(3) \{7 , 15 , 1 , 243 , 1 , 1 , 9 , 4 , 1 , 4\}$

pour B : $(3) \{7 , 15 , 1 , 354 , 2 , 6 , 1 , 4 , 1 , 2\}$

Ces deux suites ont les quatre premiers termes égaux. Pour ces termes on trouve les réduites suivantes :

$$\frac{3}{1} , \frac{22}{7} , \frac{333}{106} , \frac{355}{113}$$

et : $3 < \dfrac{333}{106} < \pi < \dfrac{355}{113} < \dfrac{22}{7}$

C'est Archimède (250 Av. J.C.) qui indiqua 22/7 et Adrien Metius (1571 - 1635) qui donna 355/113 .

22/7 donne π à 10^{-2} près par excès.

355/113 donne π à 10^{-6} près par excès.

J. Goerg