Coloriage d'une carte

Vers 1850 un jeune étudiant en mathématique d'Edimbourg : Francis Guthrie se pose la question de savoir si 4 couleurs suffisent toujours pour colorier une carte de géographie. Ce problème reçoit une consécration officielle en 1878 quand Arthur Cayley le pose à la London Mathematical Society et le fait publier dans le bulletin de la Royal Geographical Society.

L'année suivante, Kempe publiait une solution qui devait se révéler fausse en 1890 grâce à l'oeuvre de Heawood. Cependant cette démonstration permettait de montrer que cinq couleurs suffisaient. La démonstration complète ne sera donnée qu'en 1976 grâce à l'ordinateur.

Entre temps le problème avait été étendu à toutes les surfaces topologiques imaginables.

Quelques définitions : La définition mathématique du mot "surface" correspond assez bien à notre idée intuitive : au voisinage de chaque point on peut assimiler le surface à un petit morceau de plan. Mais ce sont les propriétés globales des surfaces que l'on utilise pour les classer. Deux surfaces sont dites équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre par une déformation continue. Les surfaces dites "compactes" sont les plus faciles à classer. La sphère et le tore sont compacts, mais pas le plan ni la bande de Moebius.

1) D'abord on range les surfaces en deux familles : les orientables et les non-orientables. Une surface est orientable si on peut distinguer un intérieur et un extérieur (exemple la sphère, le tore) ; elle est non-orientable dans le cas contraire (exemple la bouteille de klein, la bande de moebius).

2) Puis à chaque surface on associe un nombre entier : sa caractéristique d'Euler-Poincaré. (E.P.) Pour la calculer, on découpe la surface compacte en un nombre fini de "polygones" sans trou. Si S est le nombre de sommets, F le nombre de faces (nombre de polygones) et A le nombre d'arrêtes, la caractéristique d'E.P. est le nombre $S - A + F$ qui est indépendant du découpage choisi.

Deux surfaces compactes sont équivalentes si et seulement si elles ont même type d'orientabilité et même caractérisitque d'E.P.

La caractéristique d'une surface orientable s'écrit toujours : $n = 2 - 2g$, avec g entier positif ou nul. Le nombre g s'appelle le genre de la surface. La caractéristique d'une surface non-orientable s'écrit $n = 2 - g$ avec g entier supérieur ou égal à 1.

Le nombre chromatique d'une surface S est le plus petit nombre entier χ tel que toute carte tracée sur S et constituée de pays connexes (en un seul morceau) puisse être coloriée au moins d'une façon en utilisant au plus χ couleurs.

Quelques résultats : Heawood a démontré que si la surface compacte S n'est pas une sphère et a sa caratéristique d'E.P. égale à n , on a l'inégalité :

$$\chi \leqslant \left[(7 + \sqrt{49 - 24\,n}\,)/\,2 \right] \qquad = \text{partie entière de } (\ 7 + \ldots$$

Heawood a vérifié pour quelques surfaces que sa majoration était très bonne puisqu'il y avait égalité et non inégalité. D'où sa conjecture : "Le nombre chromatique d'une surface compacte autre qu'une sphère et sa caractéristique d'E.P. sont liés par la relation :

$$\chi = \left[(7 + \sqrt{49 - 24\,n}\,)/\,2 \right] \text{"}$$

La conjecture était exacte, ce qui ne fut complètement démontré qu'en 1969 à l'exception de la bouteille de Klein pour laquelle $n = 0$ et dont Franklin avait démontré en 1934 que $\chi = 6$ (et non pas 7 comme le donnerait la formule).

Pour la démonstration de la conjecture on associe a toute carte un graphe de la façon suivante : On prend un point quelconque dans chaque pays et on joint deux points si ils sont dans deux pays ayant une frontière commune. Un tel graphe n'est pas plan en général. On est donc ramené au problème de trouver la surface de plus petit genre (dans le cas des surfaces orientables) contenant ce graphe et de voir que son genre est donné par la formule :

$$g = \left[(N - 3)(N - 4)\ /\ 12 \right] + 1$$

où N est le nombre de sommet du graphe que l'on suppose complet (c'est-à-dire que tous les sommets sont joints deux à deux).

La structure de cette expression dépend du reste de la division de N par 12 ce qui explique que le problème se soit divisé en douze cas d'inégale difficulté. Les démonstrations ont été faites dans l'ordre suivant :

1954 : Surface non orientable et $N = 12\,k + 5$ par Ringel

1960 : $N = 12\,k + 3$; $N = 12\,k + 7$; $N = 12\,k + 10$ par Ringel

1963 : $N = 12\,k + 4$ par Gustin

1965 : $N = 12\,k$ par Terry, Welch et Youngs.

1966 : $N = 12\,k + 1$; $N = 12\,k + 6$; $N = 12\,k + 9$ par Youngs.

1967 : $N = 12\,k + 2$; $N = 12\,k + 8$; $N = 12\,k + 11$ par Ringel et Youngs.

1969 : $N = 18$; $N = 20$; $N = 23$; $N = 30$ par Mayer (ces cas n'avaient pu être traités par les méthode générale.

En guise de conclusion : Quelle est l'utilité de démontrer qu'il suffit de 4 couleurs pour colo ier une carte plane ? Dans le fond cela n'aura aucune importance pratique et il est probable que la solution du problème ne modifiera jamais le métier de cartographe. La réponse est double : d'une part les mathématiciens ont du goût pour ce genre de défi qui tient de l'exploit sportif, et, d'autre part l'expérience a souvent montré que la résolution de problèmes même farfelus peut être génératrice d'idées nouvelles. Le problème des quatre couleurs a grandement contribué au développement de la théorie des graphes, une des branches vives de l'analyse combinatoire, et on reconnaîtra que ce n'est pas son moindre mérite.

D'après "La Recherche" nº 46 Juin 1974

"L'OUVERT" : responsable de la publication : Jean Lefort
22, rue du Dr. A. Schweitzer
WINTZENHEIM
68000 COLMAR
impression par les soins de : I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX

Toute la correspondance doit être envoyée à l'I.R.E.M. de Strasbourg.
N'oubliez pas de signaler vos changement d'adresse.