L'esprit de la mathématique

UNE INTRODUCTION A LA THEORIE DES GRAPHES FINIS

d'après Sherman K. Stein

Le cadre : Un réseau routier reliant plusieurs villes.

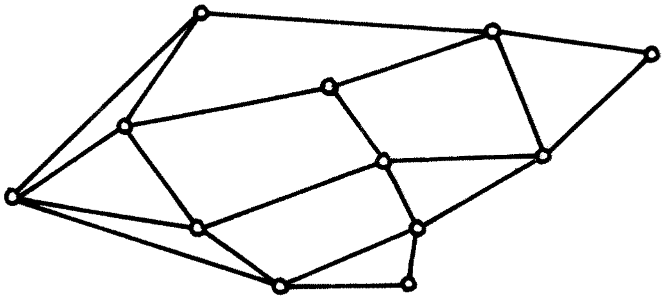


fig 1

Les personnages :

* Un inspecteur des travaux publics chargé de l'entretien du réseau routier (très économe) .
* Un voyageur de commerce (tous frais payés).

Le problème de chacun :

celui de l'inspecteur : Trouver un chemin permettant d'inspecter toutes les routes en ne parcourant chacune qu'une seule fois.

celui du voyageur : Trouver un chemin passant une seule fois par chaque ville du réseau.

Essayons de trouver les chemins respectifs sur le réseau simplifié suivant (six villes et neuf routes):

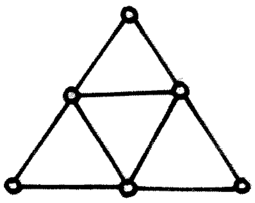


fig 2

Après quelques essais, le lecteur trouvera facilement les deux solutions :

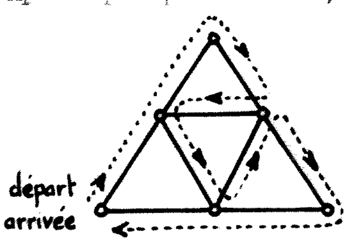


fig 3

Pour l'inspecteur

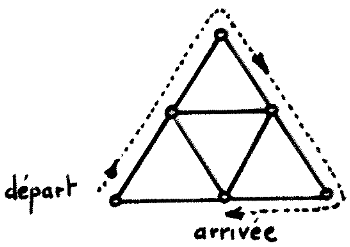


fig 4

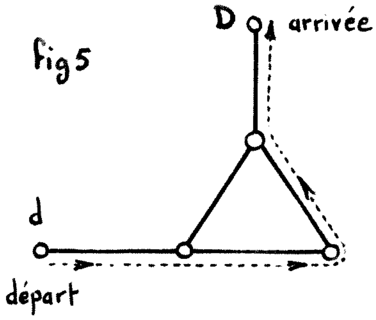
Pour le voyageur

Remarquons que l'inspecteur a l'avantage de débuter et de terminer son parcours au même endroit (ce qui n'était pas exigé).

Le voyageur quant à lui, termine son périple dans une ville adjacente au lieu de départ.

Examinons encore un autre réseau (cinq villes et cinq routes).

fig 5



En travaillant d'abord sur le problème de l'inspecteur nous constatons que les extrémités du parcours doivent être situés en d et D. Il est alors facile de voir qu'aucun des deux chemins issus de d ne couvre entièrement le réseau. Pauvre inspecteur ! En réfléchissant au problème du voyageur nous voyons que là encore son parcours doit débuter en d et se terminer en D (ou inversement). Mais nous constatons avec plaisir, que l'un des deux chemins allant de d vers D conduit notre voyageur par toutes les villes du réseau.

Voici un parcours qui ne va convenir ni à l'inspecteur ni au voyageur :

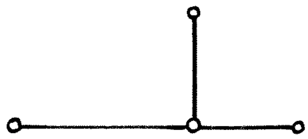


fig 6

Et enfin voici un réseau convenant à l'inspecteur et non au voyageur :

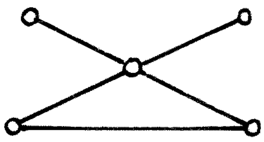
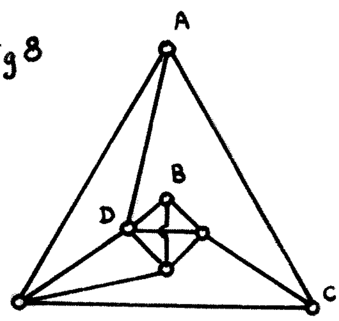


fig 7

Mais les mathématiques ne sont pas une accumulation d'exemples, de la même manière qu'un dictionnaire n'est pas une nouvelle. Ce que nous voulons, c'est trouver un moyen de reconnaître si un certain réseau est favorable soit à l'inspecteur, soit au voyageur et dans l'affirmative de trouver le chemin convenable. Est-il possible de trouver un tel chemin sans faire une multitude d'essais préalables ! Nous nous interesserons en premier lieu au problème de l'inspecteur.

fig 8



Considérons d'abord le réseau suivant, et concentrons notre attention sur la ville A. Supposons pour le moment que l'inspecteur ne commence pas sa tournée en A. Lorsqu'il passe par la ville A il inspecte deux tronçons issus de A, l'un lorsqu'il entre en A, l'autre lorsqu'il quitte A. Il lui restera donc à inspecter un tronçon arrivant en A, mais à ce moment il ne pourra plus quitter la ville sans emprunter une route déjà visitée. Par conséquent nous pouvons conclure que sa tournée doit se terminer en A. Souvenons nous cependant que pour aboutir à cette conclusion nous avions supposé que la ville de départ n'était pas A. Nous constatons donc que si l'inspecteur a trouvé un chemin convenable, celui-ci doit commencer ou se terminer en A.

En raisonnant de façon analogue le lecteur se rendra compte qu'un chemin satisfaisant doit d buter ou se terminer en B, en C et en D ! Mais un chemin n'ayant que deux extrémités ... Par conséquent le réseau précédent ne pourra en aucun cas satisfaire les exigences de l'inspecteur.

Cette étude suggère que le nombre de routes aboutissant à une ville du réseau a certainement une importance dans la résolution du problème de l'inspecteur.

Nous appellerons <u>degré</u> d'une ville le nombre
de route aboutissant à celle -ci .

Ainsi une ville située à l'extrémité d'un réseau sera de degré 1 (sur la figure 8, A est de degré 3 et D de degré 5).

Le raisonnement précédent prouve alors le théorème :

<u>Théorème 1</u> <u>Si une ville est de degré impair, le chemin suivi par l'inspecteur doit commencer ou se terminer en cette ville.</u>

L'étude précédente permet également d'énoncer le théorème :

<u>Théorème 2</u> <u>Si un réseau comporte plus de deux villes de degré impair, le problème de l'inspecteur est insoluble.</u>

Le théorème 2 ne plaira pas à l'inspecteur ! Pour trouver un réseau pour lequel le problème de l'inspecteur puisse avoir une solution il faut donc qu'il y ait au plus deux villes de degré impair. Il y a donc trois cas à considérer :

1) réseau ne comportant aucune ville de degré impair.
2) réseau comportant une ville (et une seule) de degré impair.
3) réseau comportant deux villes (exactement) de degré impair.

Nous allons montrer que le deuxième des cas précédents ne peut exister.

<u>Théorème 3</u> <u>Il n'existe pas de réseau comportant exactement une ville de degré impair.</u>

<u>Preuve</u> : Nous allons établir que si un réseau comporte une ville de degré impair, il en comporte nécessairement une autre de degré impair.

Soit T une ville de degré impair et imaginons un chemin qui débute en T. Nous nous déplacerons au hasard à travers le réseau mais de façon à ne jamais emprunter deux fois la même route. Si nous sommes malchanceux, notre promenade sera très courte mais avec un peu de chance elle sera longue. Mais du moment que le nombre de routes du réseau est limité, notre promenade se terminera dans l'une des villes du réseau ;

nous appellerons E cette ville "terminus".

Est-ce que E et T peuvent être identiques !

Remarquons que puisque l'inspecteur est parti de T, il reste un nombre pair de routes non utilisées aboutissant à T. Par conséquent, chaque fois que l'inspecteur entre en T, il peut en repartir, ce qui prouve que E n'est pas T.

Comme la randonnée s'achève en E et d'après ce qui précède, E doit être de degré impair. Ceci prouve le théorème.

Il nous reste deux cas à examiner : les réseaux sans ville de degré impair et les réseaux comportant exactement deux villes de degré impair.

<u>Théorème 4</u> <u>Si un réseau ne comporte aucune ville de degré impair le problème de l'inspecteur admet au moins une solution. De plus la ville d'arrivée coïncide avec la ville de départ.</u>

Mentionnons tout d'abord un fait tacitement admis jusque là : toutes les villes du réseau sont reliées à au moins une autre ville du réseau. Nous dirons qu'un réseau est <u>connexe</u> s'il est possible, en partant d'une ville quelconque, de rejoindre n'importe quelle autre ville du réseau.

<u>Preuve du théorème 4</u> : Non seulement nous allons démontrer le théorème 4, mais en outre nous trouverons un chemin possible pour l'inspecteur. Choisissons arbitrairement une ville T du réseau comme ville de départ. Il est clair que le parcours se terminera également en T.

Voici une recette permettant de trouver un parcours favorable :

L'inspecteur part de la ville T et se déplace au hasard à travers le réseau (sans repasser deux fois par la même route). Il s'arrête dès qu'il ne peut plus sortir d'une ville. Comme le réseau a un nombre fini de sections, sa promenade doit se terminer à un certain moment. Comme toutes les villes sont de degré pair, son voyage se terminera nécessairement en T. Il est peu probable qu'il couvre ainsi dès le premier essai tout le réseau. Dans ce cas il y aura une ville du réseau traversée par l'inspecteur et où aboutissent des routes non utilisées par celui-ci. Appelons E une telle ville. En partant au hasard de E, en évitant soigneusement les routes déjà utilisées, l'inspecteur fera un voyage se terminant nécessairement en E (raisonnement précédent). Il peut par conséquent regrouper ces deux parcours en un seul : il part de T et dès qu'il arrive en E il emprunte le second parcours qui se termine en E puis il reprend son périple vers T. Si le réseau n'est pas entièrement couvert, on recommence et ainsi de suite ... Comme le réseau comporte un nombre fini de routes et que le procédé précédent agrandit toujours le parcours, il faut bien qu'après un nombre fini d'agrandissements successifs tout le réseau soit couvert. Ceci prouve le théorème.

Voici un réseau pour lequel nous appliquerons le théorème 4.

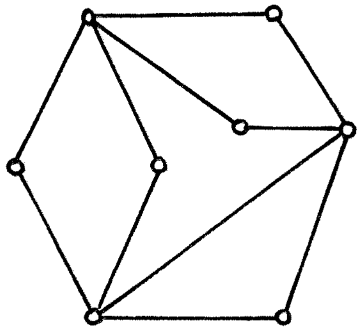
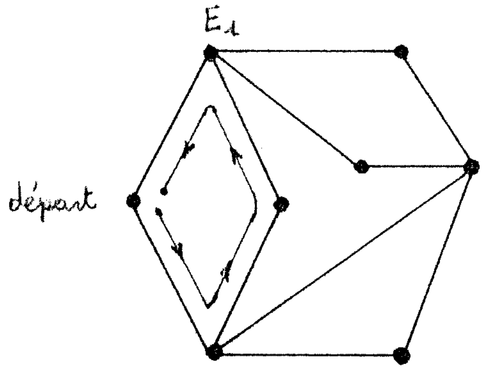
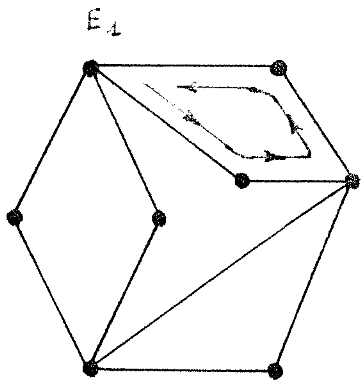


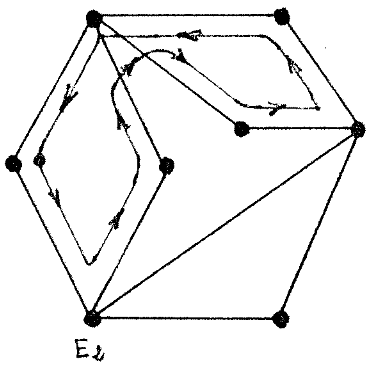
fig 9



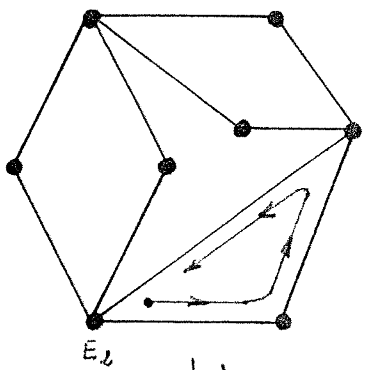
a)



b)



c)



d)

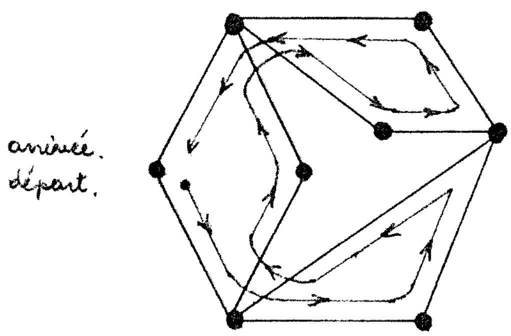


Fig 10

e)

Le seul cas restant à étudier sera résolu par le :

théorème 5 Si un réseau comporte exactement deux villes de degré impair, le problème de l'inspecteur admet au moins une solution. De plus son parcours doit débuter dans l'une des villes de degré impair et se terminer dans l'autre.

La démonstration est analogue à celle du théorème 4 et est laissée aux soins du lecteur.

Le problème de l'inspecteur est ainsi résolu par un rapide décompte des villes du réseau ayant un degré impair.

Quant au voyageur de commerce, son problème n'a pas été encore résolu. Ce problème a été posé pour la première fois par W. R. Hamilton en 1859 et jusqu'à ce jour aucune solution n'a été trouvée. Peut-être n'y a-t-il aucune solution à ce problème et il est fort probable que s'il y en a une, elle sera beaucoup plus compliquée que celle trouvée pour notre inspecteur.

Il y a ainsi en mathématique beaucoup de problèmes similaires dans leur formulation mais de difficultés incomparables.

* Il est facile de démontrer qu'il n'existe qu'un unique nombre premier inférieur d'une unité à un carré parfait mais personne ne sait combien il y a de nombres premiers supérieurs de une unité à un carré parfait !
* Il est facile de démontrer que la suite des nombres premiers est illimitée, mais personne ne sait si la suite des nombres premiers jumeaux (deux premiers sont jumeaux si leur différence est égale à 2) est finie ou non !
* Il est facile de prouver que tout nombre "spécial" est premier mais il est difficile de prouver la réciproque. (on dit qu'un entier est "spécial" si chaque fois qu'il divise un produit de deux entiers il divise nécessairement l'un d'entre eux).

M. Langer
L.T.C. d'Haguenau