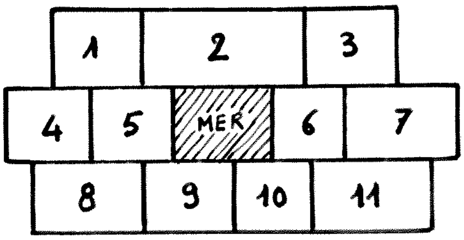
Coloriage

L'Ouvert a publié dans le dernier numéro un article sur le coloriage des cartes de géographie. On trouvera ci-dessous de larges extraits de deux comptes-rendus de cours, l'un fait en 4ème à Ste Marie-aux-mines par Mme Drouillon, l'autre en 3ème par Mme Schadenhaufen, cours portant sur le coloriage d'une certaine carte de 11 pays. Plus que le problème en lui-même, c'est la découverte par les élèves de l'impossibilité de colorier cette carte à l'aide de trois couleurs seulement et la façon dont ceux-ci expriment cette impossibilité qui doivent attirer notre attention. On se trouve vraiment en présence d'une initiation à la démonstration.

1er exemple : Un groupe de 21 élèves de quatrième.

Exposé du professeur : Voici une carte de géographie simplifiée qui représente schématiquement 11 pays avec la mer. Pour l'imprimer, on veut colorier les pays avec des couleurs différentes, de façon à ce que deux pays ayant une frontière commune soient coloriés avec des couleurs différentes afin que l'on puisse les distinguer. Mais comme l'impression revient d'autant plus chère que le nombre de couleurs employées est plus grand, on se demande si c'est possible avec trois couleurs seulement. Sinon, démontrer que c'est impossible.



Avant l'exposé se forment 3 groupes de 4 et 3 groupes de 2 élèves, 3 élèves travaillant seuls. Par la suite 2 des groupes de 2 éclatent et en fait leurs membres travaillent également seuls, en recherchant obstinément une solution par coloriage pendant toute l'heure.

Réactions des élèves :

un élève : Si on le pose (le problème), c'est que c'est possible.

un autre : C'est facile

Tous les élèves se mettent à colorier, 7 ou 8 en plein, les autres en indiquant par des points ou des traits la couleur du pays considéré. Au bout de :

7mn un élève individuel : Ce n'est pas possible, parce que 11 est impair ; on peut prendre les trois couleurs rouge, vert, bleu pour 1/4/8, puis en alternant pour 2/5/9 etc... et au 11 cela ne marche pas.

Le prof. : On n'est pas obligé d'alterner ainsi ; peut-être y-a-t-il une autre solution.

10mn un élève d'un groupe de 4 (G1) : Ce n'est pas possible, car en commençant au pays 1 et en mettant les trois couleurs dans les pays 1/2/3 et en continuant ensuite, cela marche partout, sauf à la fin : Les trois pays 6/7/10 ont les trois couleurs différentes, donc on ne peut pas colorier le pays 11 qui les touche tous les trois.

Le prof. : Peut-être qu'en commençant autrement on peut éviter cet inconvénient. Essayez !

11mn un élève d'un groupe (G2) : C'est impossible, car il faut mettre les trois couleurs dans les trois pays 6/7/10, et donc on ne peut pas colorier 11 qui les touche tous les trois.

Le prof. : Pourquoi <u>faut-il</u> disposer les trois couleurs ainsi ? Ce n'est peut-être pas obligatoire !

Pendant tout ce temps les élèves travaillant seuls proposent à tour de rôle des solutions, mais à chaque fois il y a erreur : deux pays limitrophes ont la même couleur, mais ils ne l'avaient pas vu.

15mn le groupe G1 : Même en prenant d'autres couleurs pour les pays 1/2/3 on tombe toujours sur le pays 11 qui touche les trois pays 6/7/10 qui ont trois couleurs différentes.

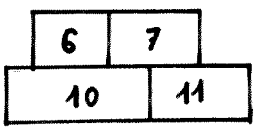
Le prof. : Peut-être y-a-t-il moyen de colorier de manière à ce que 7 et 10 aient la même couleur et que la troisième soit disponible pour le pays 11 ?

un élève : Mais alors ça coince avec 9 : 9 et 10 ont alors la même couleur.

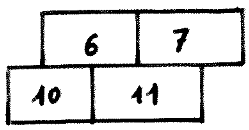
Le prof. : Etaye ton raisonnement et montre pourquoi.

l'élève : ?????

18mn un élève propose une solution : En effet deux pays limitrophes n'ont jamais la même couleur, mais il a changé de figure :



au lieu de



et dans ce cas il existe effectivement une solution. Très déçu, car il était déjà très fier d'avoir trouvé <u>la</u> solution, il reprend ses recherches avec la bonne disposition de figure.

20mn le groupe G2 : Tous sont persuadé que ce n'est pas possible, mais ne proposent aucune démonstration.

22mn un élève : Il pense avoir trouvé, mais il a lui aussi fait une figure fausse.

25mn un élève : Pense également avoir trouvé ; mais il a également fait une figure fausse il a oublié le pays 9 ; les pays 8 et 9 ne forment qu'un seul pays, et dans ce cas aussi il y a une solution.

30mn le groupe G3 fait le même raisonnement que le groupe G1 à la 15ème mn (indépendemment de celui-ci) et la réponse du professeur est la même.

40mn le prof : "Qui pense encore qu'il existe une solution ?" 8 répondent par l'affirmative et pensent qu'ils cherchent mal, alors que les 13 autres sont persuadés qu'il n'y a pas de solution. Le professeur leur demande alors de le démontrer.

42mn un élève : "C'est pas possible car 3 rose + 3 noir + 3 rouge = 9 et il y a 11 pays" le prof : " Ceci n'est pas une raison, car dans le cas de la figure fausse (cf à la 18ème minute) ceci est encore vrai et pourtant il y a alors une solution."

50mn le groupe G1 affirme : " 2 et 4 ont la même couleur". Puis après le "Pourquoi" du professeur ils lui expliquent : "avec une couleur en 1 et une autre en 2 on est obligé de mettre la troisième en 5, puis à nouveau en 4 celle qui n'est ni en 1 ni en 5, donc celle qui est en 2."

Le professeur les encourage dans cette voie et ils trouvent rapidement que 2/4/9 et 7 doivent avoir la même couleur, mais il n'arrivent pas à faire le dernier pas : que 7 et 10 doivent aussi avoir la même couleur, et que donc en 9 et 10 il y a impossibilité.

A la fin de l'heure, le professeur leur dit de continuer ainsi et donne l'indication aux autres pour continuer à chercher.

En conclusion : Les élèves n'ont pas raisonné d'une façon "symétrique", mais ont progressé dans l'ordre de numérotation des pays et ont donc buté sur l'impossibilité de colorier le dernier pays 11 ; d'abord d'une manière intuitive, puis réfléchie et finalement étayée d'un raisonnement logique. Par contre tous semblaient dès le début, conscient du fait que d'intervertir les couleurs ne donnerait rien de nouveau, que le principe sous-jacent était le même quelle que soit la mremière, la deuxième ou la troisième couleur.

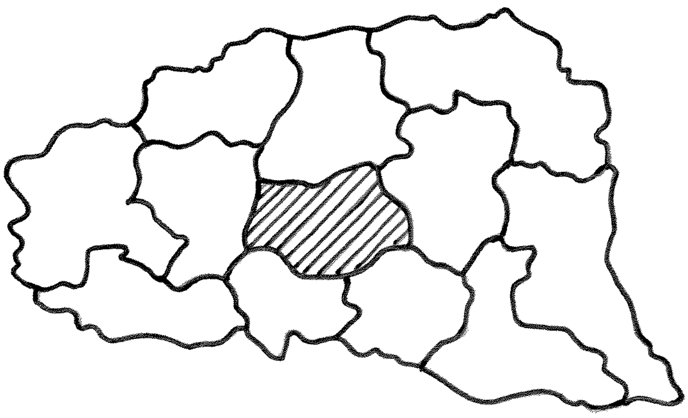
Huit jours après les élèves demandent au professeur la solution ; 3 pensent encore qu'une solution existe, les autres sont persuadés du contraire. Après la démonstration un élève reste malgré tout encore un peu hésitant.

Le même problème a été posé en 1re C et D.

Plus personne ne colorie, mais tous utilisent des symboles pour les différentes couleurs. Quelques rares groupes se forment, presque tous travaillent seuls. Au bout de deux minutes, deux élèves pensent avoir trouvé, indépendemment l'un de l'autre, mais ils n'avaient pas vu leur erreur (même couleur dans deux pays limitrophes). Cinq minutes plus tard, un groupe de trois pense avoir trouvé, mais là aussi la figure était fausse (mauvaise disposition des pays). Ce n'est que dix minutes après le début de la séance qu'un élève travaillant seul démontre, sans avoir reçu la moindre indication, qu'il y a impossibilité... A partir de là les autres élèves l i demandent comment il faut faire et ne sont plus enclins à chercher par eux mêmes.

2ème exemple : Un groupe de 17 élèves de troisième.

Exposé du professeur : Après distribution de feuilles sur lesquelles était imprimé ce dessin, j'ai dit aux élèves :



"Ce dessin correspond à une carte de géographie. La partie hachurée au centre représente la mer et les autres parties représentent 11 pays. On veut colorier cette carte à l'aide de trois couleurs, chaque pays étant colorié avec une seule couleur, et deux pays ayant une frontière commune devant avoir des couleurs différentes pour que l'on puisse les distinguer. Pouvez-vous me donner un coloriage qui convient ? "

Réactions des élèves : La carte a bien plu aux élèves.

L'un d'eux dit : "Oh, mais l'année dernière on a eu un exercice comme cela avec notre professeur, mais ce n'était pas la même carte."

Un autre : "On n'est pas obligé de colorier vraiment !"

Moi : "Non".

Très peu d'élèves ont colorié totalement les cases. Ils ont généralement indiqué la couleur par un trait ou utilisé un symbole au crayon noir pour pouvoir effacer et recommencer.

Cinq minutes après des essais infructueux, des élèves ont comparé leur dessin à ceux de leurs voisins et se sont aperçus que pour tous, il y avait une case qu'ils n'arrivaient plus à colorier.

Trois élèves ont affirmé que ce n'était pas possible. Les autres n'osaient pas encore l'affirmer.

Moi : "Je n'accepterai la réponse oui qu'avec un dessin qui convient, la réponse non qu'avec une explication qui prouve que ce n'est pas possible.

Quelques élèves m'ont présenté des dessins qui leur semblait convenir, mais avec les symboles ou les traits ils ne se rendaitent pas toujours compte qu'ils avaient mis la même couleur dans deux pays voisins.

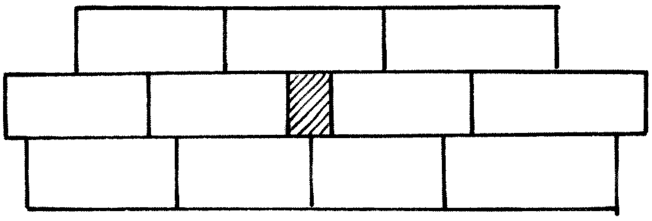
(. . . .)

Un élève a demandé s'il pouvait faire un schéma pour remplacé la carte.

L'élève qui avait vu l'exercice l'année passée lui a aussitôt répliqué : " mais si tu changes de carte ce n'est plus le même problème.

Le premier : "Oh si, je garde la même disposition des pays".

Alors le deuxième a fait un geste signifiant "Eurêka", il a bien regardé le dessin, a essayé de refaire le schéma qu'il avait eu l'année dernière tout en examinant celui qu'il avait sous les yeux et a fait le schéma suivant :



"Ah mais oui, c'est exactement la même carte, donc ce n'est pas possible parceque je sais que ce n'était pas possible l'année dernière."

Moi : "Est-ce qu'à l'aide du schéma, tu peux plus facilement me prouver qu'on ne peut pas colorier cette carte comme je l'ai demandé ?"

Mais par la suite cet élève n'a plus donné d'indication ; il connaissait la réponse et n'avait apparemment plus envie de chercher. Et il n'a pas imposé alentour le schéma qu'il avait retrouvé.

Pendant ce temps le premier élève a aussi fait un schéma qui, aux contours près, avait la même forme que la carte donnée, s'est dit que le schéma ne l'éclairait pas plus que la carte, et s'est mis à chercher dans une autre direction.

(. . . .)

Un élève : "C'est parce qu'il y a 11 pays et que 11 n'est pas divisible par 3 ". Si on en mettait un entre ces deux là, on y arriverait, et 12 est divisible par 3.

Moi : "Oui, mais si tu enlevais celui que tu n'as pas pu colorier, tu y arriverais aussi, et 10 n'est pas divisible par 3."

(. . . .)

La cloche allait bientôt sonner et ils m'ont demandé comment on peut prouver qu'on arrive pas à colorier cette carte. Je leur ai donné une explication en utilisant le schéma trouvé ci-dessus.

Un élève : "Ah bon, il n'y a pas de nombres, on peut l'expliquer comme cela !