Files d'attente aléatoires

Au retour des vacances où certains lecteurs ont certainement gouté aux joies des bouchons et embouteillages du réseau routier, il peut être plaisant de s'en souvenir pour sublimer l'énervement passé en un joli problème mathématique !

Afin d'initier le lecteur à la mathématisation de la chose, je lui propose ci-dessous une étude de file d'attente dans un atelier de reproduction d'une entreprise. Pour cela, je me suis largement inspiré d'un article paru dans T.E. nº 85 de janvier 1977.

L'atelier de reprographie de l'entreprise est chargé d'effectuer des travaux qui ne peuvent être exécutés correctement sur les matériels légers de chaque service. Dans l'état actuel, les deux employés accomplissent les divers travaux au fur et à mesure de l'arrivée des demandeurs qui attendent les reproductions. Mais en raison de l'augmentation récente du volume des travaux, d'une part les deux employés sont amenés à faire des heures supplémentaires (d'où fatigue pour les employés et perte d'argent pour l'entreprise *) et d'autre part des files d'attente assez importantes se produisent à certaines heures de la journée du fait que les demandeurs préfèrent petienter plutôt que de revenir.

Afin de trouver une solution économique à ce problème et d'optimaliser le nombre de poste de travail de l'atelier, on a observé heure par heure pendant deux semaines le nombre d'arrivée dans l'atelier de reproduction. Pendant ces deux semaines tout le travail demandé chaque jour a été exécuté dans la journée, mais chacun des deux employés a du faire 10 heures supplémentaires en tout (une heure par jour en moyenne).

On vérifie sur le tableau nº 1 ci-après que la durée moyenne de traitement est de :

$$\frac{\overset{\text{(heures effectuées)}}{(40 + 40 + 10)} \times \overset{\text{(nb d'employés)}}{2}}{\underset{\text{(nb total de demandes)}}{500}} \simeq 22 \text{ mn}$$

Comme il faut tenir compte de l'entretien du matériel, des pannes et des absences

---

* Si, si ; c'est comme ça dans le privé ; l'H.S. est d'avantage payé que l'heure normale et l'entreprise en paye même les charges !

	8	9	D	11	12-13	14	15	16 17	total journalier
L	6	8	4	3	8	8	5	0	42
M	6	14	4	4	8	8	5	4	53
m	6	15	6	5	10	7	6	2	57
J	8	10	8	5	9	8	4	4	56
V	5	11	7	3	7	7	3	2	45
L	6	7	6	4	5	7	6	1	42
M	7	16	7	3	9	6	7	4	59
m	6	9	7	5	9	8	6	3	53
J	9	11	6	5	9	7	6	4	57
V	5	10	5	3	5	5	2	1	36
						TOTAL GENERAL :			500

TABLEAU nº 1

éventuelles des employés, on décide de majorer ce temps d'un tiers et de considérer que la durée moyenne du traitement d'une demande est de 30 minutes. On ne pourrait donc traiter en moyenne que 4 demandes (ou 4 arrivées) par heure dans l'hypothèse actuelle de deux postes de travail.

Par ailleurs, on peut déduire du tableau nº 1 le nombre moyen d'arrivées par heure. Il apparaît une pointe très nette entre 9 et 10 heures et en début d'après midi. Il est alors clair qu'il faut au plus 6 postes de travail permettant de traiter dans l'heure 12 demandes alors qu'il en arrive au plus 11,1. Ce sera l'hypothèse forte. Il va de soi que le nombre optimum sera compris, au sens large, entre 2 et 6.

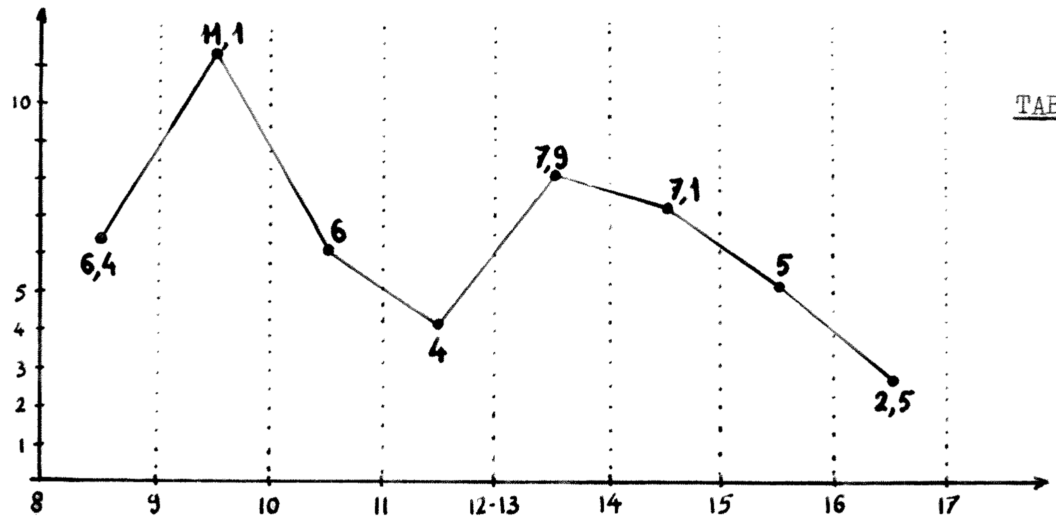


TABLEAU nº 2

Pour trouver le nombre optimum de postes de travail il faut affiner l'analyse en tenant compte des contraintes financières.

Construisons tout d'abord le tableau des fréquences (tableau nº 3) :

nombre d'arrivées par heure	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
fréquence en deux semaines	1	2	3	6	9	12	13	11	9	6	3	2	0	0	1	1	1

Reportons ces données sur un graphique et miracle, il apparaît une magnifique courbe en cloche.

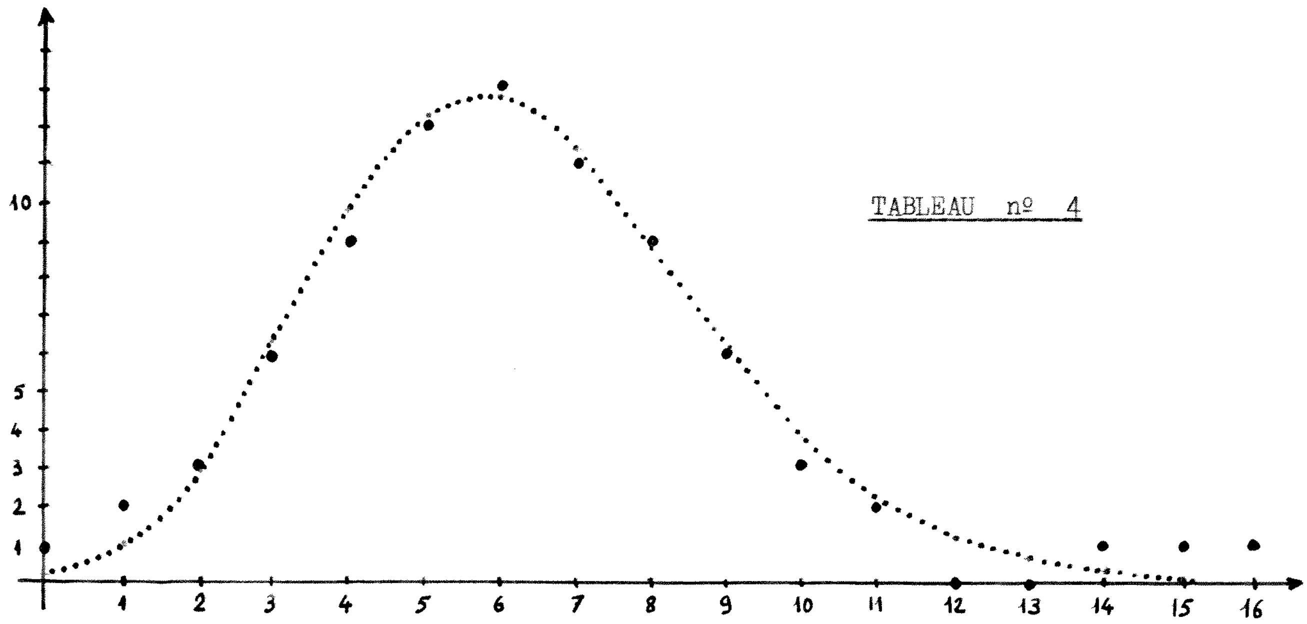


TABLEAU nº 4

Or qui dit courbe en cloche, dit probabilité ; nous allons donc probabiliser le modèle A tout hasard, calculons l'espérance et la variance :

$$\mu = 6,25$$
$$\sigma^2 = 8,4375$$

Car il ne faut pas oublier que les fréquences indiquées au tableau nº 3 doivent être divisées par les 80 heures. Quand on pense au grand nombre de fois que les employés de la reproduction font le même geste, il n'est pas trop idiot de se dire que la distribution des fréquences doit être voisin d'une distribution binomiale. (Le lecteur me dira que ça n'a rien à voir et il aura raison, mais c'est comme ça que fonctionne l'intuition). Et quitte à prendre une distribution voisine, autant en prendre une qui facilite les calculs. La courbe en pointillé qui apparaît sur le tableau nº 4 correspond à la distribution de Poisson de paramètre 6,25 . Attention, dans une distribut tion de Poisson on doit avoir $\mu = \sigma^2$. Le mathématicien pourra faire un test (celui du χ^2 par exemple) pour se rendre compte que dans ce cas $6,25 \simeq 8,4375$. J'épargnerai au lecteur ce calcul, d'autant plus que l'économiste, lui, ne s'en embarrasse pas. (C'est comme ça que "les meilleurs économistes" justifient, entre autre, les augmentations d'impôts - à l'aide de magnifiques théories inapplicables !)

Une fois admis que la distribution est une distribution de Poisson, le mathématicien est à l'aise et peut se lancer dans les calculs.

On définit tout d'abord le taux de trafic moyen qui est tout simplement le rapport entre le nombre d'arrivées et le nombre de sorties. Sur les deux semaines d'observation, le nombre d'arrivées est de 500. Le nombre de sorties dépend du nombre de postes de travail. Comme on veut se placer dans l'hypothèse de 40 heures de travail hebdomadaire (supression des heures supplémentaires) et comme il est traité en moyenne deux demandes par heure, on aura le tableau suivant :

nb de poste	32	3	4	5	6
taux de trafic	$\frac{500}{80x2x2} = 1,56$	$\frac{500}{80x2x3} = 1,04$	$\frac{500}{80x2x4} = 0,78$	$\frac{500}{80x2x5} = 0,625$	$\frac{500}{80x2x6} = 0,52$

TABLEAU nº 5

Il est clair que les deux premières solutions (deux ou trois postes de travail) sont à rejeter puisque le nombre d'entrée est supérieure au nombre de sortie et qu'alors les files d'attente augmentent.

Le taux de trafic étant connu, on peut déterminer le temps moyen d'attente, soit par le calcul (ce qui est long et pénible), soit en faisant confiance à ceux qui ont déjà fait ces calculs. C'est ce dernier choix que nous ferons en utilisant la table ci-dessous :

taux de trafic	1,00	0,90	0,90	0,85	0,80	o,75	0,70	0,65	0,60	0,55	0,50
temps d' attente	2	1,9	1,8	1,6	1,1	0,7	0,1	0,09	0,08	0,06	0,02

On ne tient pas compte dans le temps d'attente, de l'attente durant la réalisation du travail demandé ; on a vu qu'il fallait chiffrér ce délai à 30 minutes et qu'il est indépendant du taux de trafic.

Chiffrons maintenant les différents coûts :

- L'heure moyenne d'attente des employés coûte, charges comprises, **20** francs.
- Un poste de travail avec l'amortissement du matériel revient à 42000 F. par an.
- Il y a en tout 230 jours ouvrables dans l'année.

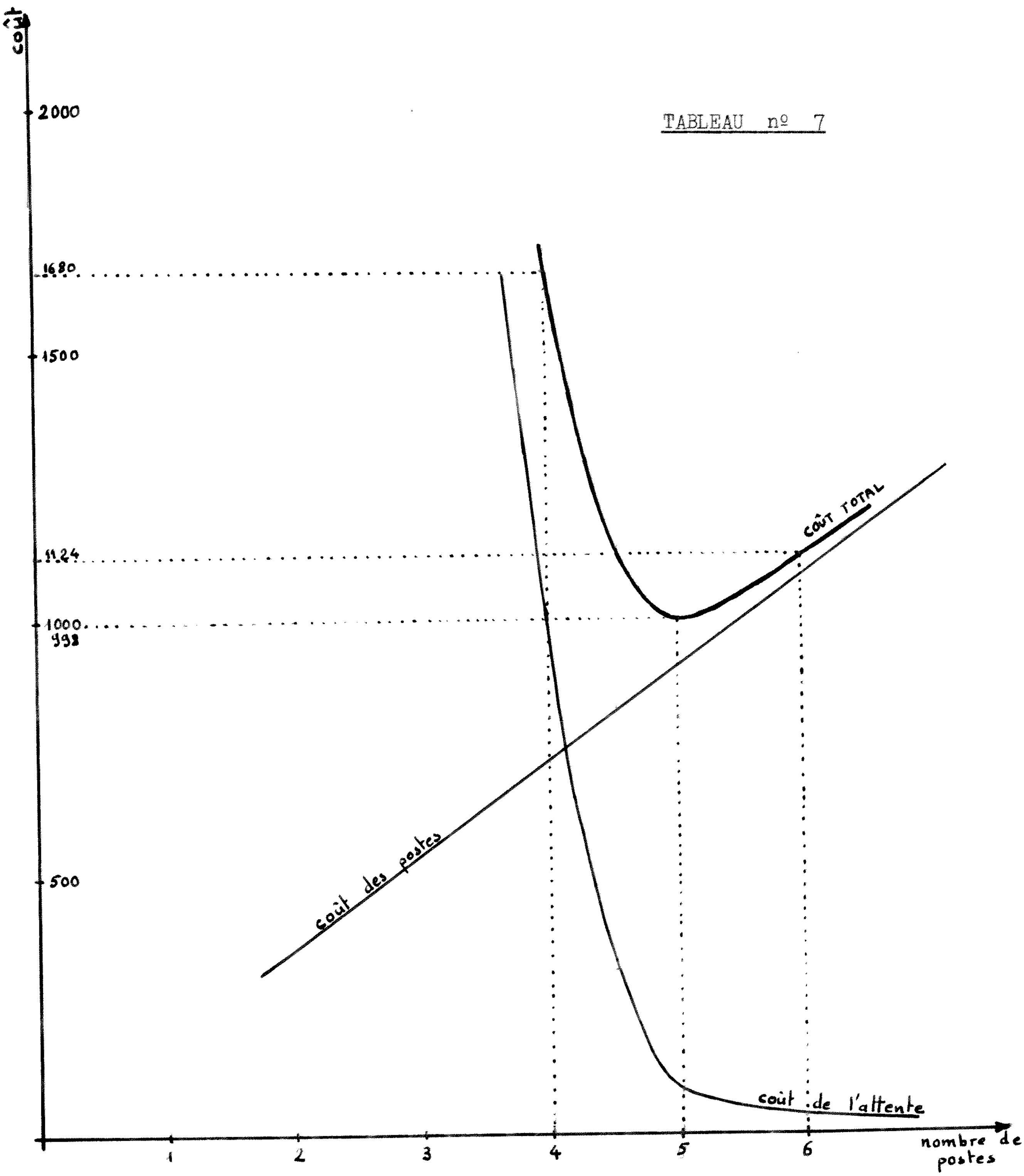
Rapportons toutes ces données à la journée. Dans une journée il y a en moyenne 50 arrivées. Pour chacune d'elle il faut attendre un temps t qui dépend du taux de trafic (donné par le tableau ci-dessus). Comme l'heure d'attente revient à 20 francs, en une journée l'attente coûte : 50 x t x20 = 1000 t . Par ailleurs, le prix de revient journalier d'un poste de travail est de 42000/230 $\simeq$ 182,60 F. D'où les résultats suivants (en faisant les interpollations nécessaires) :

- Pour 4 postes : 1000 x 0,95 + 4 x 182,6 $\simeq$ 1680
- Pour 5 postes : 1000 x 0,085 + 5 x 182,6 $\simeq$ 998
- Pour 6 postes : 1000 x 0,03 + 6 x 182,6 $\simeq$ 1124

On a donc un optimum pour 5 postes de travail. Fiancièrement ils reviennent à moins de mille francs par jour. Cet aspect est illustré par le graphique de la page suivante.

Pour conclure, on voit que toute la difficulté vient de l'évaluation des coûts d'attente. Pour reprendre l'exemple initial, si le coût de la suppression d'un point noir du réseau routier est aisé à évaluer, il est beaucoup plus difficile de calculer celui résultant de l'attente des automobilistes : Pollutions de toutes sortes, consommation accrue d'essence, perte de temps, énervement, accidents, ...
Les choix qui sont alors faits sont nécessairement politiques dans la mesure où chacun chiffrerait d'avantage telle ou telle nuisance.

TABLEAU nº 7



Jean Lefort
Lycée Bartholdi - Colmar