Nombres Eulériens ; Permutations

(I) INTRODUCTION

On connaît la relation qui existe entre les nombres $C(n,k)$, les coefficients du binôme, notés aussi $\binom{n}{k}$:

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$$

$$\text{avec} \begin{cases} C(n,0) = C(0,k) = 0 \\ C(0,0) = 1 \end{cases}$$

On obtient ces nombres en les construisant à partir du triangle de Pascal :

n \ k	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	1			
3	1	2	1		
4	1	3	3	1	
5	1	4	6	4	1

On définit de façon analogue les nombres de Stirling de deuxième espèce

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \,.\, S(n-1,k)$$

$$\text{avec} \begin{cases} S(n,o) = S(0,k) = 0 \\ S(0,0) = 1 \end{cases}$$

On obtient le tableau suivant pour les premiers nombres :

n \ k	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	1			
3	1	3	1		
4	1	7	6	1	
5	1	15	25	10	1

Pour les nombres de stirling de première espèce on a la définition suivante :

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1).s(n-1,k)$$

$$\text{avec} \begin{cases} s(n,0) = s(0,k) = 0 \\ s(0,0) = 0 \end{cases}$$

On obtient pour les premiers nombres, le tableau suivant. On remarquera que la somme des termes de la n-ième ligne vaut $n!$

n \ k	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	1			
3	2	3	1		
4	6	11	6	1	
5	24	50	35	10	1

Enfin on définit les nombres eulériens par la relation suivante :

$$A(n,k) = (n-k+1).A(n-1,k-1) + k.A(n-1,k)$$

avec $\begin{cases} A(n,0) = A(0,k) = 0 \\ A(0,0) = 1 \end{cases}$

Les premiers nombres eulériens sont donnés par le tableau ci-dessous :

n \ k	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	1			
3	1	4	1		
4	1	11	11	1	
5	1	26	66	26	1

Ici encore la somme des termes de la n-ième ligne est égal à $n!$.

Remarques :

1º) Posons $[n] = \{1, 2, \ldots n\}$ alors $S(n,k)$ est le nombre de partitions de $[n]$ en k sous-ensembles (ou k blocs).

exemples : $n = 3$ alors on a les partitions suivantes :

$k = 1$	$(1,2,3)$			une façon
$k = 2$	$(1)(2,3)$	$(2)(1,3)$	$(3)(1,2)$	trois façons
$k = 3$	$(1)(2)(3)$			une façon

On obtient donc ainsi une interprétation combinatoire des nombres de Stirling.

2º) Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $[n]$ alors $s(n,k)$ est le nombre de permutations qui ont k cycles.

III) NOMBRES EULERIENS ET NOMBRES D' EULER

Quelques résultats :

1º) pour x dans $\mathbb{N}$ on a : $x^n = \sum_{1 \le k \le n} A(n,k) \,.\, C(n,x+k-1)$

2º) on a la relation inverse, dite relation de Worpitzky :

$$A(n,k) = \sum_{0 \le i \le k} (-1)^i (k-i)^n \, C(n+1,i)$$

3º) on définit les polynômes eulériens $A_n(t)$ par :

$$A_n(t) = \sum_{k=1}^{n} A(n,k) \cdot t^{k-1}$$

Pour les premières valeurs de n on a les polynômes suivants :

$A_1(t) = 1$

$A_2(t) = 1 + t$

$A_3(t) = 1 + 4t + t^2$

On démontre alors le résultat ci-dessous :

$$1 + \sum_{n\geqslant 1} A_n(t) \frac{u^n}{n!} = \frac{1 - t}{-t + \exp(u(t-1))} = \left[1 - \sum_{n\geqslant 1} \frac{u^n}{n!} (t-1)^{n-1} \right]^{-1}$$

ce résultat est à rapprocher des deux résultats ci-dessous :

a) $\text{séc}(u) = \dfrac{1}{\cos(u)} = 1 + \sum_{p\geqslant 1} \dfrac{u^{2p}}{(2p)!} E_{2p}$ où E_{2P} sont les nombres d'Euler ou nombres sécants

b) $\text{tg}(u) = \dfrac{u}{1!}\, 1 + \dfrac{u^3}{3!}\, 2 + \dfrac{u^5}{5!}\, 16 + \dfrac{u^7}{7!}\, 272 + \dots$ Les coefficients de $u^{2p+1}/(2p+1)!$ sont les nombres tangents T_{2p+1}

<u>Théorème</u> : $\begin{cases} A_{2p}(-1) = 0 \\ (-1)^{p-1} A_{2p-1}(-1) = T_{2p-1} \end{cases}$

(III) <u>INTERPRETATION COMBINATOIRE</u>

Soit X une application de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{N}$. On dit que X est une <u>statistique eulérienne</u> si et seulement si :

$$\forall k \geqslant 1 \qquad \text{card} \left\{ \sigma \in \mathfrak{S}_n \ / \ X(\sigma) = k \right\} = A(n,k)$$

* <u>notion de descente</u> On appelle descente et on écrit DES la quantité :

$$\text{DES}\ \sigma = \text{nombre d'entiers } i \text{ tels que } \begin{cases} 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \text{et} \quad \sigma(i) > \sigma(i+1) \end{cases}$$

<u>exemple</u> : si $\sigma = 5\ 9\ 3\ \mathrm{I}\ 8\ 2\ 6\ 4\ 7$

alors $\text{DES}\ \sigma = 4$

on démontre que $1 + \text{DES}$ est une statistique eulérienne.

* on définirait de façon tout à fait analogue la <u>notion de montée</u>.

* <u>notion d'excédence</u> On pose :

$$\text{EXC}\ \sigma = \text{nombres d'entiers } i \text{ tels que } \begin{cases} 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \text{et} \quad \sigma(i) > i \end{cases}$$

<u>exemple</u> : si $\sigma = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{I}} & \boxed{2} & 3 & 4 & \boxed{5} & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \boxed{5} & \boxed{9} & 3 & \mathrm{I} & \boxed{8} & 2 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

alors $EXC\ \sigma = 3$

on démontre que $1 + EXC$ est une statistique eulérienne.

* on définirait de même l'excédence au sens large : EXC_o en remplaçant dans la définition précédente $\sigma(i) > i$ par $\sigma(i) \geq i$. Alors on démontre que EXC_o est une statistique eulérienne.

(IV) CONSTRUCTION D'UNE BIJECTION DE $\mathfrak{S}_n$ SUR $\mathfrak{S}_n$

Le but de cette bijection est de transformér σ en $\hat{\sigma}$ de façon que :

$$EXC\ \sigma = DES\ \hat{\sigma}$$

ce qui entraîne que si l'une est une statistique eulérienne, il en est de même de l'autre. Nous allons expliciter la construction de $\hat{\sigma}$ à partir de σ au moyen d'un exemple :

1) $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \underline{5} & \underline{9} & \underline{8} & 2 & 3 & 6 & 7 & I & 4 \end{pmatrix}$$

ce qui montre que $EXC\ \sigma = 3$. On écrit ensuite σ sous forme d'un produit de cycles :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 8 \\ 5 & 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 9 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

ce qui peut également s'écrire :

2) $$\sigma = (\ 1\ 5\ 3\ 8\ )(\ 2\ 9\ 4\ )(\ 6\ )(\ 7\ )$$

3) on calcule ensuite l'inverse de σ :

$$\sigma^{-1} = (\ 8\ 3\ 5\ I\ )(\ 4\ 9\ 2\ )(\ 6\ )(\ 7\ )$$

4) dans chaque cycle on écrit en tête le plus grand élément

$$\sigma^{-1} = (\ 8\ 3\ 5\ I\ )(\ 9\ 2\ 4\ )(\ 6\ )(\ 7\ )$$

5) le produit des cycles étant commutatif, on ordonne les cycles dans l'ordre croissant des premiers termes :

$$\sigma^{-1} = (\ 6\ )(7\ )(\ 8\ 3\ 5\ I\ )(\ 9\ 2\ 4\ )$$

6) on obtient $\hat{\sigma}$ en supprimant les parenthèses :

$$\hat{\sigma} = (\ 6\ 7\ 8\ 3\ 5\ I\ 9\ 2\ 4\ )$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} I & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 3 & 5 & I & 9 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

on vérifie bien que $DES\ \hat{\sigma} = 3$

Inversement, $\hat{\sigma}$ étant donné, on peut placer les parenthèses devant les élèments saillants , c'est-à-dire les élèments qui sont plus grand que tous ceux précèdent. On reconstitue alors les cycles de σ^{-1} puis ceux de σ.

On a vu que s(n,k) est le nombre de permutations ayant k cycles, donc si σ a k cycles, $\hat{\sigma}$ a k élèments saillants et s(n,k) peut aussi s' interprêter comme étant le nombre de permutation ayant k élèments saillants.

quelques résultats sur $\mathfrak{S}_3$

σ	DES	MON	EXC	EXC_0	1+DES	1+EXC
1 2 3	0	2	0	3	1	1
1 3 2	1	1	1	2	2	2
2 1 3	1	1	1	2	2	2
2 3 1	1	1	2	2	2	3
3 1 2	1	1	1	1	2	1
3 2 1	2	0	1	2	3	1

et on a bien : A(3,1) = 1 ; A(3,2) = 4 ; A(3,3) = 1

(V) AUTRE INTERPRETATION

Considérons un cube de côté 1 dans un espace de dimension n. Coupons-le par les hyperplans d'équation :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n = k$$

pour k entier compris entre 1 et n inclus. Soit U(n,k) le volume du cube compris entre les hyperplans d'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n = k - 1$$

et $$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_N = k$$

Alors on ale résultat :

$$U(n,k) = \frac{A(n,k)}{n!}$$

extrait de la conférence de

FOATA (U.LP.)

d'après les notes de Lefort