Le Problème des trois corps: un cas simple !

L'exposé qui suit reproduit une conférence donnée à l'A.P.M de Strasbourg en Mars 1976.

Il est extrait d'un très beau livre récent de J. MOSER : Stable and random motions in dynamical systems (mouvements stables et mouvements aléatoires dans les systèmes dynamiques), paru aux éditions de Princeton en 1973.

Le problème abordé possède la propriété assez spectaculaire d'avoir un énoncé très simple et un résultat inattendu, dont la preuve requiert l'utilisation d'un bon nombre de techniques essentielles, souvent récentes, de la dynamique qualitative.

L'étude détaillée est très longue (près de la moitiée de l'ouvrage de référence) et dépasse souvent le cadre de cet exposé. Je m'arrêterai seulement sur un ses aspects, particulièrement instructif.
J'ai essayé de me placer au niveau de connaissance d'un bon étudiant de première année de Maîtrise de Mathématiques.

Le § 1 doit être omis en première lecture.

1. MISE EN EQUATION DU PROBLEME DES N CORPS

1.1 On considère dans l'espace habituel (espace euclidien $\mathbb{R}^3$) n particules (ou planètes) $P_1, P_2, \dots, P_n$ de masses respectives $m_1, m_2, \dots, m_n$. A un instant t_o ces particules occupent des positions $q_1, q_2, \dots, q_n$ ($q_i \in \mathbb{R}^3$) avec des vitesse $V_1, \dots, V_n$ ($V_i \in \mathbb{R}^3$) ; on veut décrire le mouvement des n particules en fonction de ces conditions initiales (t_o, q_i, V_i), sous l'hypothèse de l'attraction mutuelle Newtonienne.

a) L'énergie potentielle du système $\{P_1, \dots, P_n\}$ est :

$$U = - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}$$

Le signe - exprime le fait que l'énergie potentielle diminue quand les distances mutuelles $\|q_i - q_j\|$ diminuent.

b) L'énergie cinétique du système est :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i V_i^2$$

c) Le mouvement des différentes particules est régi par le système d'équations différentielles du second ordre :

$$(1) \quad m_i \, . \, \ddot{q}_i = \Delta_i U$$

où $\ddot{q}_i$ représente la dérivée seconde du vecteur q_i par rapport au temps (accélération de P_i), et $\Delta_i U$ le gradient de la fonction U par rapport à la variable vectorielle $q_i = (q_{i,1}, q_{i,2}, q_{i,3})$.

La donnée de conditions initiales (temps, positions, vitesses) détermine alors une unique solution du système (1) : $\{q_1(t), \ldots, q_n(t)\}$ qui représente l'évolution correspondante du système.

d) On rappelle que le long de toute solution de (1) l'énergie totale U + T du système garde une valeur constante.

1.2 Si, dans le problème précédent, on fait tendre une des masses, par exemple m_1, vers zéro, on obtient à la limite un problème simplifié qui se décrit ainsi :

a) le système $\{P_2, \ldots, P_n\}$ est régi par un système du type (1), où P_1 n'intervient pas.

b) Le mouvement de P_1 est défini par l'équation différentielle :

$$\ddot{q}_1 = - \Delta_1 \left(- \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i}{\|q_1 - q_i\|}\right)$$

c) On a toujours un bilan énergétique constant au cours d'une évolution du système $\{P_2, \ldots, P_n\}$. Le mouvement de P_1 est tel que la quantité

$$\frac{1}{2} V_i^2 - \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i}{\|q_1 - q_i\|}$$

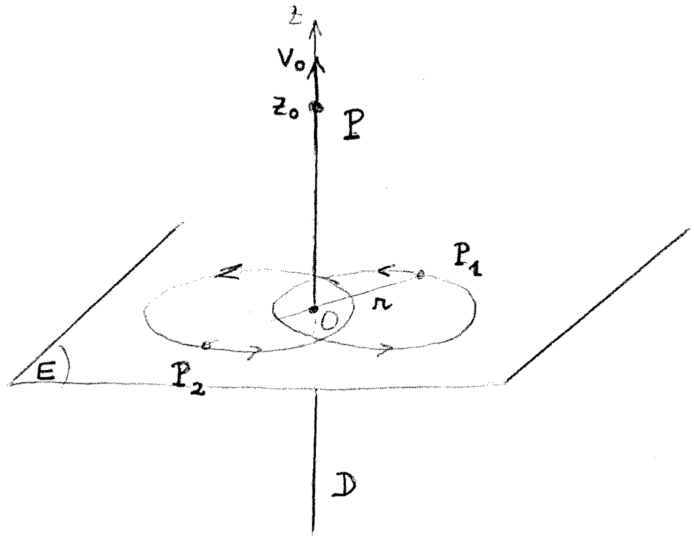
reste constante ; on l'appellera encore l'énergie.

Un tel problème, où une ou plusieurs masses sont annulées, est appelé un problème restreint des n corps.

C'est un problème de ce type que nous allons étudier.

2. UN EXEMPLE DE PROBLEME RESTREINT DES 3 CORPS.

2.1



Deux planètes P_1, P_2 de même masse $\neq 0$, ou primaires, décrivent dans un plan E des ellipses autour du centre gravité 0, pris comme origine ; leur mouvement est périodique, de période supposée égale à 2π, par un choix convenable de l'état initial.

Une troisième particule P, de masse nulle, est placée en Z_o sur l'axe D perpendiculaire à E en O, et lancée avec une vitesse initiale V_o colinéaire à D, à un instant initial t_o. Le mouvement de P s'effectuera sur D par raison de symétrie ; il s'agit de décrire ce mouvement, en fonction des conditions initiales.

2.2 Mise en équation

Soient Z l'abscisse de P sur D (origine O), et r(t) la distance au temps t de P_1 et P_2 à l'origine 0. Compte tenu de 1.2, on a :

$$(1) \quad \ddot{Z} = -\frac{\partial U}{\partial Z} \quad \text{où } U(t,Z) = -\frac{1}{\sqrt{r^2(t) + Z^2}}$$

en supposant que les masses de P_1 et P_2 sont égales à $\frac{1}{2}$.

Ceci donne $\ddot{Z} = -\dfrac{Z}{(r^2(t) + Z^2)^{3/2}}$

La fonction r(t) est une fonction périodique, de période 2π, pas très compliquée, puisqu'elle représente le rayon vecteur d'une ellipse par rapport à l'un de ses foyers. Cependant, on ne sait pas en général intégrer l'équation différentielle (1).

2.3 Premières remarques qualitatives

i) L'origine O est une position d'équilibre ; l'unique solution correspondant aux conditions initiales (t_o, $Z_o = O$, $V_o = 0$) est $Z \equiv 0$

ii) $\ddot{Z}$ est toujours de signe contraire à celui de Z ; ceci signifie que, dans le plan (t, Z), le graphe d'une solution de (1) a sa concavité tournée vers le bas en tout point où $Z > 0$, et vers le haut en tout point où $Z < O$.

iii) La valeur absolue $|\ddot{Z}|$ de l'accélération de P est <u>majorée</u> indépendamment du temps et de la position occupée. C'est évident "physiquement" ; plus précisément :

d'une part $$|Z''| = \frac{Z}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} = \frac{|Z|}{|Z|^3(1+\frac{r^2}{Z^2})^{3/2}} \leq \frac{1}{Z^2}$$

donc $|Z''| \leq \frac{1}{a^2}$ si $|Z| \geq a$

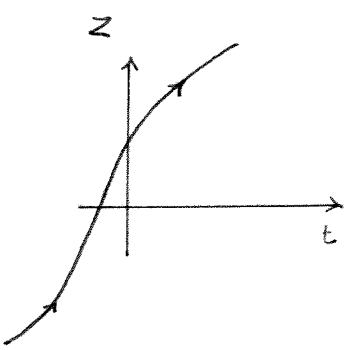
d'autre part $|Z''| \leq \frac{|Z|}{r^3} \leq \frac{1}{a^2}$ pour $|Z| \leq a$

où a est le <u>minimum</u> (non nul) de r(t).

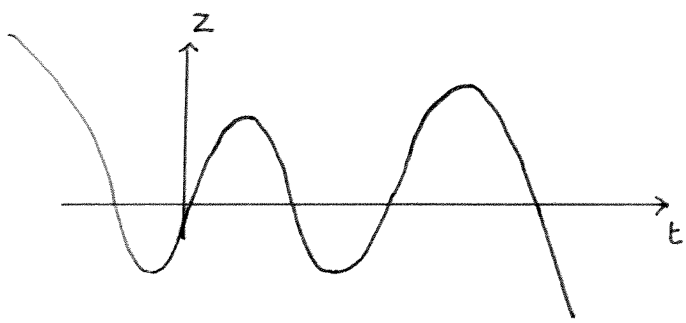
On déduit de iii) que <u>toute solution de (1) est définie pour toutes les valeurs de t</u> (exercice).

Ceci établi, ii) montre que <u>toute solution prend au moins une fois la valeur 0</u>, c'est-à-dire que, quelque soit l'état (t_o, Z_o, V_o) de P considéré, la particule P est passée ou passera au moins une fois par le point 0. C'est bien facile : si Z(t) était une solution de (1) sans zéro, et par exemple toujours > 0, son graphe aurait en tout point sa concavité vers le bas, d'où contradiction avec le fait que Z est définie sur tout $\mathbb{R}$.

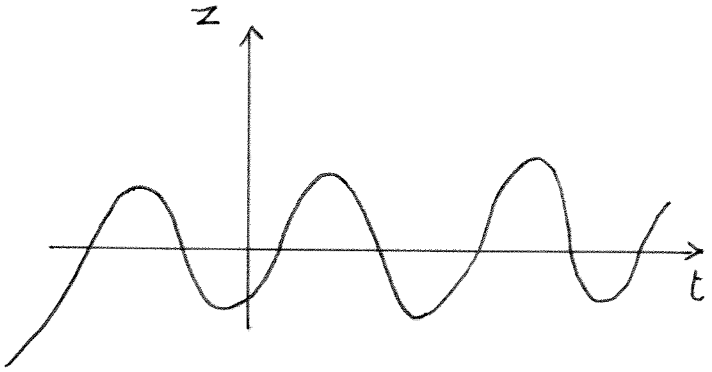
Voici quelques formes "possibles" de solutions, compte tenu des observations précédentes :



P va de $-\infty$ à $+\infty$ (sans arrêt)



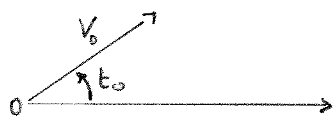
P vient de $+\infty$, se livre à quelques va-et-vient autour de 0, puis s'éloigne vers $-\infty$



P vient de $-\infty$, et oscille indéfiniment autour de 0.

2.4 Nous allons nous donner l'objectif suivant :
étudier, pour chaque solution de (1), la répartition des temps de passage successifs en 0 de la particule P.
Nous choisirons, compte tenu des remarques précédentes, des conditions initiales de la forme $(t_o, 0, V_o)$, c'est à dire avec P à l'origine. Le problème étant symétrique par rapport au plan de l'écliptique E, nous pourrons toujours supposer que $V_o > 0$ (si $V_o = 0$, P reste en équilibre à l'origine).

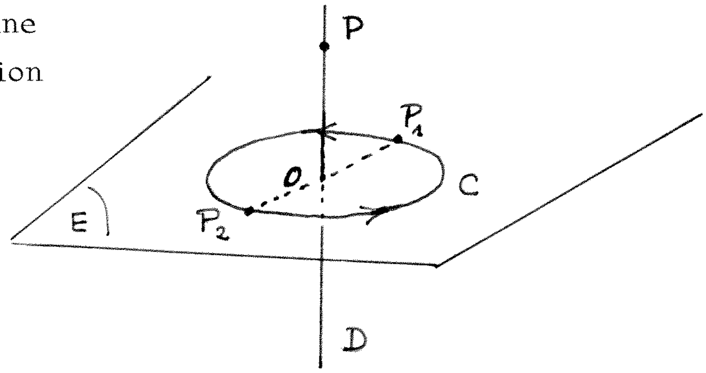
Nous noterons alors (t_1, V_1) l'état (temps, vitesse) de P à son premier retour en 0, s'il existe ; V_1 représentera en fait la valeur absolue de la vitesse de P lors de ce premier retour (en tenant encore compte de la symétrie par rapport à E).
De même (t_{-1}, V_{-1}) sera l'état de P au passage en 0 précédant la situation dite initiale (s'il existe). On définit de même plus généralement les états (t_n, V_n), $n \in \mathbb{Z}$; par définition la suite t_n est croissante, et la suite V_n est positive.
Si nous envisageons deux états initiaux (t_o, V_o) et $(t_o + 2\pi, V_o)$, les solutions correspondantes sont identiques à une translation près (d'amplitude 2π) de l'axe des temps, eu égard à la périodicité du mouvement de P_1 et P_2.
Ceci suggère d'interpréter un état initial (t_o, V_o) comme représentant un point du plan par ses coordonnées polaires : t_o sera l'argument, V_o le module.
Le passage de l'état initial (t_o, V_o) au premier retour (t_1, V_1) définira une application d'une partie du plan (à déterminer), à valeurs dans le plan ; cette application sera notée ϕ dans toute la suite.



C'est une étude de ϕ qui nous conduira à une réponse (partielle) à la question posée au début de ce paragraphe.
Nous allons d'abord étudier un cas particulier.

3 CAS PARTICULIER OÙ LES PRIMAIRES ONT UNE ORBITE CIRCULAIRE

On suppose ici que P_1 et P_2 ont des orbites circulaires. Elles décrivent donc un même cercle C, de centre 0, d'un mouvement uniforme, en y occupant à chaque instant les extrémités d'un diamètre.



Dans ce cas, la fonction r(t) est une constante (rayon de C), et l'équation différentielle (1) devient :

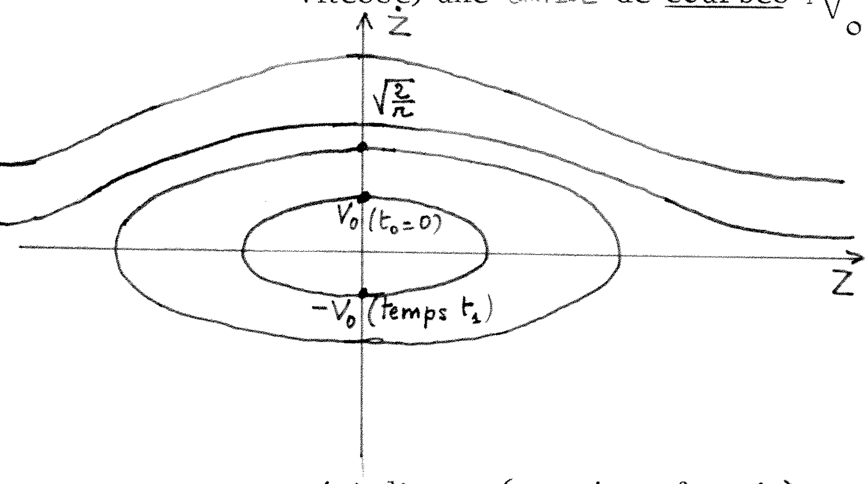
$$\ddot{Z} = - \frac{Z}{(r^2 + Z^2)^{3/2}}$$

Elle est autonome , c'est-à-dire indépendante du temps. En d'autres termes, le champ de force sur la droite D, qui anime P, est indépendant du temps. Le temps initial ne jouera ici aucun rôle.
Dans ce cas, le principe de conservation de l'énergie (cf. 1.2 c)) permet de (presque) résoudre l'équation différentielle. On doit en effet avoir :

$$(2) \quad \frac{1}{2} \dot{Z}^2 - \frac{1}{\sqrt{r^2 + Z^2}} = \frac{V_0^2}{2} - \frac{1}{r}$$

(énergie totale de P en l'état $(t_0, 0, V_0)$).
($\dot{Z}$ désigne ici la vitesse de P).

l'équation (2) définit dans le plan des phases (coordonnées Z, $\dot{Z}$: position, vitesse) une famille de courbes Γ_{V_0} , représentée ci dessous :

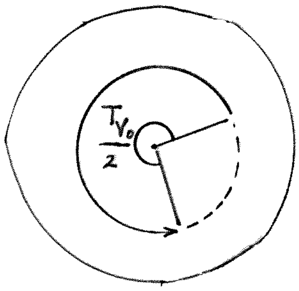


Pour $V_0 < \sqrt{\frac{2}{r}}$, la courbe Γ_{V_0} est fermée
Pour $V_0 = \sqrt{\frac{2}{r}}$, elle est asymptote à l'axe Z ; pour $V_0 > \sqrt{\frac{2}{r}}$, elle admet une asymptote horizontale de cote > 0.
La courbe Γ_{V_0} détermine la solution de l'équation différentielle correspondant à l'état initial ($t_0 = 0$, $Z_0 = 0, V_0$).
Si $V_0 < \sqrt{\frac{2}{r}}$, la solution obtenue est périodique (Γ_{V_0} étant fermée), et sa période T_{V_0} est fonction croissante de V_0.

Si $V_o = \sqrt{\frac{2}{r}}$, la particule P vient de $-\infty$, et va vers $+\infty$ sans repasser par l'origine ; sa vitesse tend vers 0 quand $t \to +\infty$. Si $V_o > \sqrt{\frac{2}{r}}$, le comportement de P est analogue mais elle s'éloigne avec une vitesse limite non nulle.

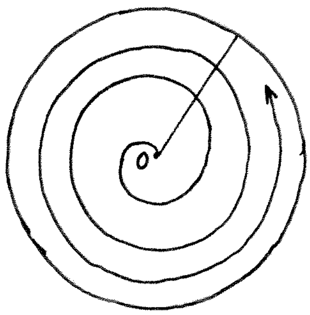
L'application ϕ de premier retour (voir 2.4) a donc les propriétés suivantes :

a) Elle est définie sur le disque ouvert Δ : $V_o < \sqrt{\frac{2}{r}}$, et a pour expression :



$$(t_o, V_o) \mapsto (t_1 = t_o + \frac{T_{V_o}}{2} , V_1 = V_o)$$

b) ϕ est donc, sur chaque cercle centré à l'origine, de rayon $V_o < \sqrt{\frac{2}{r}}$, une rotation d'angle $\frac{T_{V_o}}{2}$ (demi période de la solution correspondante) ; cet angle croit de 0 à $+\infty$ quand V_o croit de 0 à $\sqrt{\frac{2}{r}}$. Ceci signifie que ϕ transforme tout rayon du disque Δ en une spirale asymptote au bord de Δ.



Ces remarques, banales ici, vont jouer un rôle essentiel dans la suite

Conclusion :

La situation est très simple dans ce cas particulier :

- Si $V_o < \sqrt{\frac{2}{r}}$ la particule P oscille périodiquement autour de 0, et y passe périodiquement aux temps
$$t_o + n \frac{T_{V_o}}{2}, \ n \in \mathbb{Z}.$$
- Si $V_o \geq \sqrt{\frac{2}{r}}$ (vitesse de "libération"), P ne passe qu'une fois en 0 et va directement de $-\infty$ à $+\infty$.

4 CAS GENERAL (les primaires ont des orbites elliptiques, de faible excentricité)

4.1 Le résultat principal

Nous nous plaçons dans la situation suivante : les planètes primaires P_1 et P_2 décrivent des orbites elliptiques très voisines du cercle C du paragraphe précédent, donc d'excentricité ε assez petite.

Il existe alors un nombre entier c, ne dépendant que de ε, tel qu'on ait le spectaculaire

Théorème :

Soit une suite d'entiers S_n, $n \in \mathbb{Z}$, tels que $S_n \geq c$ pour tout n, et quelconques par ailleurs.
Il existe un état initial (t_o, V_o) de P tel que P passe par 0 en des temps t_n, $n \in \mathbb{Z}$, vérifiant la propriété :

$$0 \leqslant \frac{t_{n+1} - t_n}{2\pi} - S_n < 1$$

En d'autres termes, quelle que soit la suite $S_n \geq c$, il existe une solution de l'équation différentielle (1), donc un mouvement possible de P, tel que P passe une infinité de fois en 0, en des temps $< t_{-n} < \ldots < t_o < \ldots < t_n < \ldots$, de sorte que le temps entre le $n^{\text{ème}}$ passage (à partir du temps initial t_o) et le $(n+1)^{\text{ème}}$ passage, arrondi en années (une année étant évidemment la période de révolution de P_1 et P_2, soit 2π) soit exactement S_n.

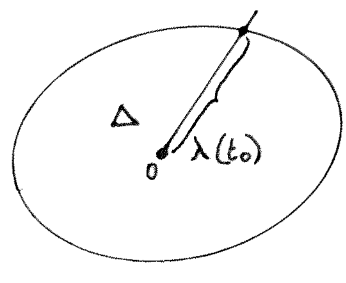
Autrement dit, si les astronomes de la planète P_1 ont noté au cours des âges les années de passage de P en 0, il leur sera impossible de prévoir le comportement futur (ou de déterminer le comportement "préhistorique") de la petite planète P !

En effet, les nombres S_n peuvent être choisis indépendamment les uns des autres... Il n'en serait pas de même, bien sûr, si l'un de nos astronomes notait un instant précis de passage de P en 0, et la vitesse correspondante. Cependant, la discussion qui va suivre montrera qu'il ne serait pas nécessairement bien mieux renseigné !

4.2 Esquisse de la méthode

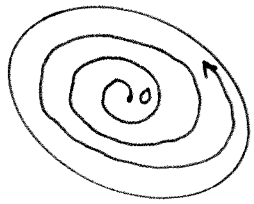
Tout repose sur les propriétés de l'application ϕ de premier retour.
On soupçonne qu'elle sera voisine de celle du paragraphe 3. C'est bien le cas, mais la preuve est très délicate, et repose sur des arguments analytico-géométriques difficiles.
Nous allons donc admettre les faits suivants :

1° ϕ est défini sur un domaine ouvert Δ symétrique par rapport à l'origine, limité par une courbe fermée analytique (qui remplace donc le cercle $V_o = \sqrt{\frac{2}{r}}$ du § 3).

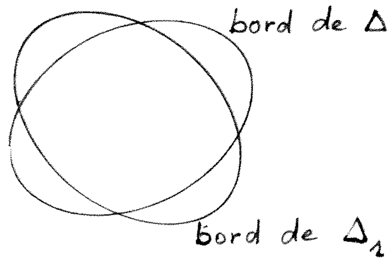


Ceci veut dire que pour chaque temps initial t_o, il y a une vitesse de libération $\lambda(t_o)$; si $V_o < \lambda(t_o)$, P reviendra au moins une fois en 0 ; si $V_o \geq \lambda(t_o)$, P s'éloignera indéfiniment de 0.

2) Si, à t_o fixé, la vitesse initiale de V_o tend en croissant vers $\lambda(t_o)$, le temps de 1er retour t_1 tend vers l'infini (comme dans le § 3).
Ceci signifie que l'image par ϕ d'un rayon de Δ est une courbe spirale, qui sera asymptote au bord de $\phi(\Delta) = \Delta_1$.



3) A la différence du cas particulier limite du § 3, l'image de Δ par ϕ est un domaine Δ_1 différent de Δ ; plus précisément, le bord de Δ et celui de Δ_1 sont disposés comme indiqué ci-contre, si l'excentricité ε de l'orbite des primaires est assez petite (et $\neq 0$).
Un point essentiel est que ces bords se coupent non tangentiellement.



Un état initial $x = (t_o, V_o)$ produira n retours (au moins) à l'origine si et seulement si :
$x \in \Delta$, $\phi(x) \in \Delta$, $\phi \circ \phi(x) = \phi^2(x) \in \Delta, \ldots, \phi^{n-1}(x) \in \Delta$

Ces propriétés définissent un ensemble $\Delta_{-n} \subset \Delta$; on fait apparaître une suite d'ensembles strictement décroissante

$\Delta = \Delta_o \supset \Delta_{-1} \supset \Delta_{-2} \supset \ldots \supset \Delta_{-n} \supset \ldots$

Un état initial $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_{-n}$ produira une suite infinie de retours en 0.

De même, un état x a été précédé de n passages à l'origine si $x \in \Delta_n$, où
$\Delta_1 = \phi(\Delta)$, $\Delta_2 = \phi(\Delta \cap \Delta_1)$, $\Delta_3 = \phi(\Delta \cap \Delta_2)$ etc....
On définit ainsi une suite décroissante d'ensembles :
$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$

Un état initial $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ a été précédé d'une infinité de passages en 0.

Un état initial $x \in \bigcap_{-\infty}^{+\infty} \Delta_n$ correspond à une solution oscillant indéfiniment autour de 0.

Remarquons que nous ne savons pas pour l'instant si les intersections

$\bigcap\limits_{0}^{-\infty} \Delta_n$, $\bigcap\limits_{1}^{\infty} \Delta_n$, $\bigcap\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta_n$ sont <u>non vides</u>.

Nous allons voir que c'est bien le cas, et prouver en même temps notre théorème, en considérant seulement les points d'un morceau bien choisi de Δ.

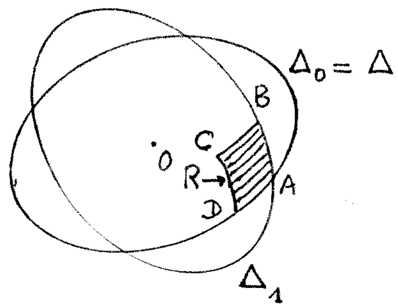
On notera qu'une bonne part de la difficulté de compréhension de la situation réside dans le fait suivant :

on étudie ici une application (bijection) d'un ensemble Δ dans un ensemble Δ_1, où Δ et Δ_1 sont <u>différents</u> mais $\Delta \cap \Delta_1$ est <u>non vide</u>.

D'habitude, on a affaire soit à des applications f : E → F, où les ensembles E et F sont considérés comme <u>disjoints</u>, soit à des applications d'un ensemble <u>dans lui-même</u>

4.3 Preuve du théorème

Nous allons considérer ici seulement les états initiaux appartenant à un "petit" quadrilatère curviligne R ayant un sommet A commun aux bords de Δ_o et Δ_1, un côté AB sur le bord de Δ_1, et un côté DA sur le bord de Δ_o.



Comment ϕ transforme-t-elle R ?

Le côté BA est d'après 4.2 2), transformé en une courbe spirale asymptote au bord de Δ_1 ; il en est de même pour le transformé de CD. Notre domaine R est donc transformé en une "bande" spiralant asymptotiquement au bord de Δ_1 (figure 1).

Il est commode pour la suite de décomposer la transformation ϕ appliquée à R en deux étapes, schématisées ainsi :

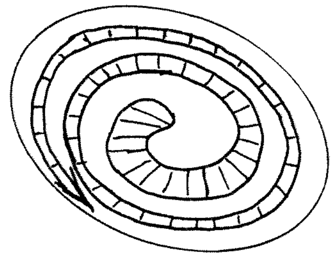


figure 1

- D'abord, une opération "d'étirement" infini :

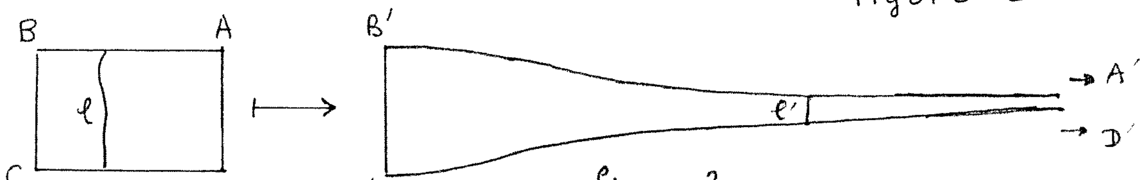
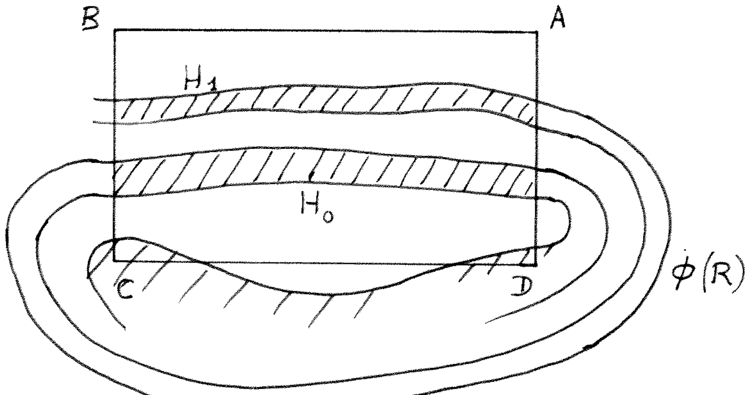


figure 2

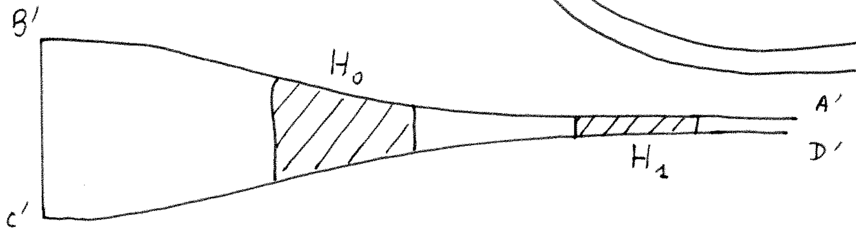
- Ensuite, on "enroule" la bande étirée à l'intérieur de Δ_1 comme indiqué dans la figure précédente.

Considérons maintenant l'intersection de R avec $\phi(R)$ (voir figure ci contre).

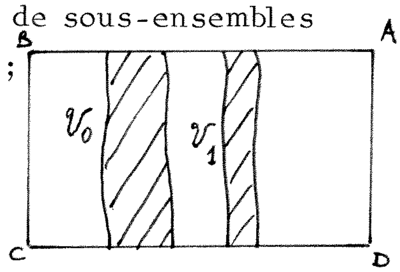
Il est clair qu'elle va contenir une suite infinie de bandes H_0, H_1, ..., H_n, ... se rapprochant du côté AB.



Ces bandes se représentent ainsi sur la figure 2.



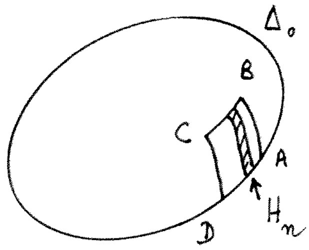
Elles sont donc les images par ϕ d'une suite infinie de sous-ensembles $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_1$, ..., $\mathcal{V}_n$, ... de R, figurés ci-dessous ; les bandes $\mathcal{V}_n$ (dites <u>verticales</u>) tendent vers le côté AD, bord de Δ_0.



Soit un état initial $(t_0, V_0) \in \mathcal{V}_0$; $\phi(t_0, V_0) \in H_0$ et le premier retour s'effectue donc au bout d'un nombre d'années **c** qui ne dépend pas du point déjà choisi dans $\mathcal{V}_0$ (au moins à une année près) car R est petit.

Si nous prenons $(t_0, V_0) \in \mathcal{V}_1$, le premier retour se place dans H_1 ; il s'effectue donc au bout de **c** + 1 années, puisqu'on va de H_0 en H_1, dans $\phi(R)$, en faisant un <u>tour</u> de plus par rapport à l'origine.
De même, si $(t_0, V_0) \in \mathcal{V}_n$, le premier retour s'effectuera au bout de c + n années.

Etudions maintenant le 2[e] retour, à partir d'un point $x_0 \in \mathcal{V}_n$; on a $x_1 = \phi(x) \in H_n$; il nous faut étudier $\phi(x_1)$; mais $H_n \subset R$ est transformé par ϕ comme l'est R, c'est à dire :



- Etirement.

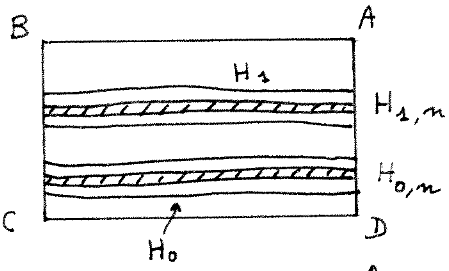
- Enroulement à l'intérieur de $\phi(R)$, en un ruban plus mince.

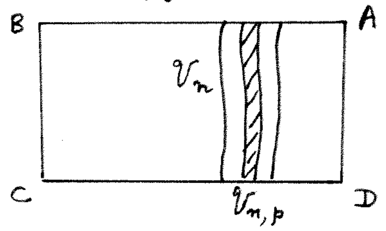
On posera $H_{p,n} = H_p \cap \phi(H_n)$ pour tout $p \geq 0$. Il est clair que $H_{p,n} \subset H_p$ est une bande "horizontale".

On pose maintenant :

$\mathcal{V}_{n,p} = \{ x \in R \mid \phi^2(x) \in H_{p,n} \}$

Il est clair que $\mathcal{V}_{n,p}$ est une bande "verticale" de $\mathcal{V}_n$.





Soit alors $x \in \mathcal{V}_{n,p}$; comme $\phi(x) \in H_n$, on aura un premier retour au bout de $c + n$ années ; $\phi^2(x) \in H_{p,n} \subset H_p$, on aura un second retour à l'origine au bout d'un temps supplémentaire de $c + p$ années.

On définit maintenant par récurrence :

$$H_{S_n, \ldots S_2, S_1} = H_{S_n} \cap \phi(H_{S_{n-1}, \ldots, S_1})$$

Cet ensemble est une bande "horizontale" incluse dans H_{S_n}.

Puis $\mathcal{V}_{S_1, \ldots, S_n} = \{ x \in R \mid \phi^n(x) \in H_{S_n, \ldots, S_1} \}$

Il s'agit d'une bande "verticale" incluse dans $\mathcal{V}_{S_1, \ldots, S_{n-1}}$

Un état initial $x \in \mathcal{V}_{S_1, \ldots, S_n}$ sera suivi de n retours à l'origine (au moins) à des intervalles de temps successifs de $c + S_1, \ldots, c + S_n$ années.

Suit alors une suite de nombres entiers $S_n \geq 0$, où $n = 0, 1, 2, \ldots$
Considérons la suite d'ensembles emboîtés

$$\mathcal{V}_{S_1} \supset \mathcal{V}_{S_1, S_2} \supset \ldots \supset \mathcal{V}_{S_1, S_2, \ldots, S_n} \supset \ldots$$

Il s'agit d'une suite infinie d'ensembles compacts emboîtés.
On est donc assuré que l'intersection $\mathcal{V}_S$ de cette famille d'ensembles est non vide ; en fait, on peut démontrer que cette intersection est une courbe (la "largeur" des bandes $\mathcal{V}_{S_1, \ldots, S_n}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$).

Si l'on prend un état initial dans $\mathcal{V}_S$, il sera suivi d'une infinité de retours en 0, à des intervalles de temps successifs de $c + S_1$, $c + S_2, \ldots$, $c + S_n$, ... années.
Ceci établit "la moitié" de notre théorème.

Observons maintenant que, si l'état initial est choisi dans $H_{S_0, \dots, S_n}$, ceci signifie qu'il a été précédé de (n + 1 passages (au moins) à l'origine, le dernier ayant eu lieu $c + S_0$ années auparavant, l'avant dernier $c + S_1$ années avant le dernier, etc...

Si nous nous donnons une suite d'entiers positifs $S_0, S_{-1}, S_{-2}, \dots, S_{-n}, \dots$ il suffira de prendre $x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} H_{S_0, S_{-1}, \dots, S_{-n}}$ pour que cet état ait été précédé d'une infinité de passages en 0, à des intervalles de temps successifs (en remontant en arrière) de $c + S_0$ années, $c + S_{-1}$ années, etc... L'intersection considérée est non vide, car définie par une suite de compacts emboîtés ; en fait elle constitue une courbe H_S $(S = (S_0, S_{-1}, \dots))$

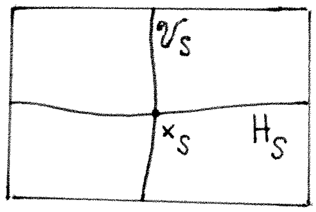
Donnons-nous maintenant une suite doublement infinie (S_n), $n \in \mathbb{Z}$, de nombres entiers positifs. Les courbes

$$\mathcal{V}_S = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_{S_1, S_2, \dots, S_n} \quad \text{et} \quad H_S = \bigcap_{n=0}^{\infty} H_{S_0, S_{-1}, \dots, S_{-n}}$$

se coupent en un point (et un seul) $x_S \in R$.

L'état initial x_S répond clairement à l'énoncé du théorème

C.Q.F.D.



Remarque finale

La discussion précédente mérite d'être résumée comme suit :

Soit E l'ensemble des suites $S = (S_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, d'entiers ≥ 0.

L'application $S \mapsto x_S = \mathcal{V}_S \cap H_S$ définit une bijection de E sur un sous-ensemble Σ du quadrilatère R ; on identifiera chaque point de Σ à la suite qui le définit.

L'application ϕ de premier retour définit une bijection de l'ensemble Σ sur lui-même. On vérifie aisément que dans le langage des suites, ϕ a pour expression :

$S = (S_n) \mapsto S' = (S'_n)$ où $S'_n = S_{n-1}$

Ceci signifie que ϕ représente un décalage d'un rang vers la droite de chaque suite.

Donnons-nous alors une suite périodique, on a donc $\phi^p(S) = S$ pour un certain entier p.

L'état initial correspondant à la suite S définira donc une solution périodique de l'équation différentielle.

On voit donc que l'ensemble des états Σ offre une infinie variété de comportements : solutions périodiques de périodes à peu près arbitraires, et solutions "erratiques".

On comprend aussi qu'une faible perturbation de l'état initial peut avoir des effets très importants sur le mouvement ultérieur.

J. MARTINET