Exercices d'analyse (compléments)

Les exercices qui suivent se rapportent au stage sur l'analyse des 26 et 27 novembre 1975, ils nous ont été obligeamment fournis par Monsieur Bronner, I.P.R.

1- Déterminer les fonctions f de R dans R vérifiant la propriété (P):

$$\forall a \in R \ , \ \forall x \in R \ , \quad | f(x+a) - f(x) | \leqslant a^2 \ .$$

Conditions nécessaires à l'existence d'une solution:

La propriété (P) est équivalente à: $\forall a > 0, \ \forall x \in R, \ \left| \frac{f(x+a) - f(x)}{a} \right| \leqslant a$, on en déduit que, s'il existe une fonction f vérifiant (P), f est dérivable en tout point $x \in R$ et $f'(x) = 0$ quel que soit x; autrement dit f est constante sur R.

Détermination des solutions:

Toute fonction constante sur R vérifie (P); les solutions sont les fonctions constantes sur R.

2- Déterminer les fonctions f de R dans R vérifiant la propriété (P):

$$\forall a \in R_+ \ , \ \forall x \in R \ , \quad f(x + a^2) \geqslant f(x) + a \ .$$

Conditions nécessaires à l'existence d'une solution:

Supposons qu'il existe une solution f, on a, quel que soit $n \in N^*$,

$f(1 + 1/n^2) \geqslant f(1) + 1/n$, $f(1 + 2/n^2) \geqslant f(1 + 1/n^2) + 1/n$, et plus généralement: $f(1 + p/n^2) \geqslant f(1 + (p-1)/n^2) + 1/n$, quel que soit $p \in N^*$, donc

$$\sum_{p=1}^{p=n^2} f(1 + p/n^2) \geqslant \sum_{p=1}^{p=n^2} f(1 + (p-1)/n^2) + n \ ,$$ soit après simplification: $f(2) - f(1) \geqslant n$, ce qui est impossible puisque n peut être choisi arbitrairement.

Il n'existe pas de fonction f vérifiant (P).

3- Etudier la fonction numérique d_1 déterminée par $d_1(x) = d(1 \ ; \ xZ)$. (voir N.B.)

La fonction d_1 est définie quel que soit $x \in R$, c'est une fonction paire, $d_1(0) = 1$.

Pour chaque $x > 0$, il existe un unique $p \in N$ tel que: $px \leqslant 1 < (p+1)x$ (p est la partie entière de $1/x$),

---

N.B. La notation $d(1 \ , \ xZ)$ désigne le plus petit élément de l'ensemble $|1 - xq|$ lorsque q décrit Z, le nombre réel x étant fixé.

si $(p + 1/2)x \geqslant 1$, $d_1(x) = 1 - px$

si $(p + 1/2)x \leqslant 1$, $d_1(x) = (p + 1)x - 1$

on en déduit:

a) Pour $x > 1$, $p = 0$ donc

$$\text{si } x \geqslant 2 \text{ , } d_1(x) = 1$$

$$\text{si } x \in \left]1 \text{ , } 2\right] \text{ , } d_1(x) = x - 1.$$

b) Pour $0 < x \leqslant 1$, $p \neq 0$ donc

$$\text{si } x \in \left[\frac{1}{p + 1/2} \text{ , } \frac{1}{p}\right] \text{ , } d_1(x) = 1 - px$$

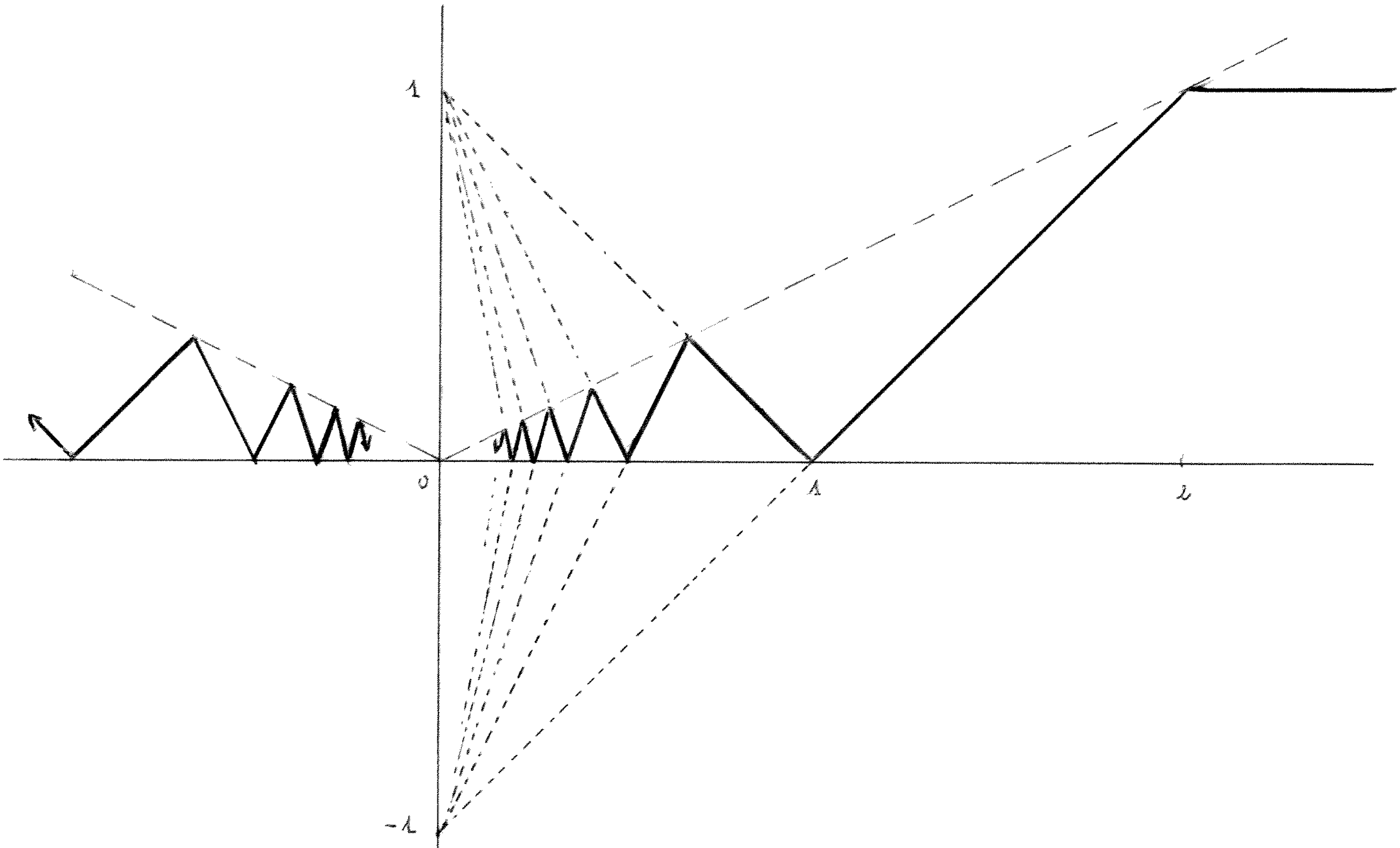
$$\text{si } x \in \left]\frac{1}{p + 1} \text{ , } \frac{1}{p + 1/2}\right] \text{ , } d_1(x) = (p + 1)x - 1$$

Tableau de variation de d_1 sur l'intervalle $\left[\frac{1}{p + 1} , \frac{1}{p}\right]$:

x	$\frac{1}{p+1}$		$\frac{1}{p+1/2}$		$\frac{1}{p}$
$d_1(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1/2}{p+1/2}$	$\searrow$	0

Lorsque p décrit N^* on obtient des segments de droite dont les supports passent alternativement par les points (0 , 1) et (0 , -1); les points anguleux appartiennent aux droites d'équations respectives $y = 0$ et $y = x/2$ (si $x > 0$).

La fonction d_1 est affine par morceaux, elle est continue sur R^*.



4- Etudier la fonction numérique d_2 déterminée par $d_2(x) = d(1\ ,2xZ)$.

La fonction d_2 est définie quel que soit $x \in R$, c'est une fonction paire, $d_2(0) = 1$.

Pour chaque $x > 0$, il existe un unique $q \in N$ tel que $2qx \leq 1 < 2(q+1)x$ (q est la partie entière de $1/2x$), en outre

si $1 \leq (2q+1)x$, alors $d_2(x) = 1 - 2qx$

si $(2q+1)x \leq 1$, alors $d_2(x) = 2(q+1)x - 1$,

on en déduit:

a) Pour $x > 1/2$, $q = 0$ donc

si $x \geq 1$, $d_2(x) = 1$

si $x \in \left]1/2\ ,\ 1\right]$, $d_2(x) = 2x - 1$.

b) Pour $0 < x \leq 1/2$, $q \neq 0$ donc

si $x \in \left[\frac{1}{2q+1}\ ,\ \frac{1}{2q}\right]$, $d_2(x) = 1 - 2qx$

si $x \in \left]\frac{1}{2q+2}\ ,\ \frac{1}{2q+1}\right]$, $d_2(x) = 2(q+1)x - 1$.

Tableau de variation de d_2 sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2q+2}\ ,\ \frac{1}{2q}\right]$

x	$\frac{1}{2q+2}$		$\frac{1}{2q+1}$		$\frac{1}{2q}$
$d_2(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2q+1}$	$\searrow$	0

Lorsque q décrit N on obtient des segments de droite dont les supports passent alternativement par les points $(0,1)$ et $(0,-1)$, les points anguleux appartiennent aux droites d'équations respectives $y = 0$ et $y = x$ $(x > 0)$; la fonction d_2 est affine par morceaux, elle est continue sur R^*.

Remarque: si on compare les tableaux de variation des fonctions d_1 et d_2 on constate que les fonctions coïncident sur chaque intervalle $\left[\frac{2}{4q+1}\ ,\ \frac{2}{4q-1}\right]$ tandis que $d_1(x) + d_2(x) = x$ sur chaque intervalle $\left[\frac{2}{4q+3}\ ,\ \frac{2}{4q+1}\right]$,ce qu'on peut voir directement en se reportant à la définition de $d_1(x)$ et de $d_2(x)$.

On déduit encore de ce qui précède l'étude de toute combinaison linéaire de d_1 et de d_2, par exemple $f = 2d_1 - d_2$.

si $x \in \left[\frac{2}{4q+3}\ ,\ \frac{2}{4q+2}\right]$, $f(x) = 3d_1(x) - x$ soit $f(x) = 3 - (6q + 4)X$

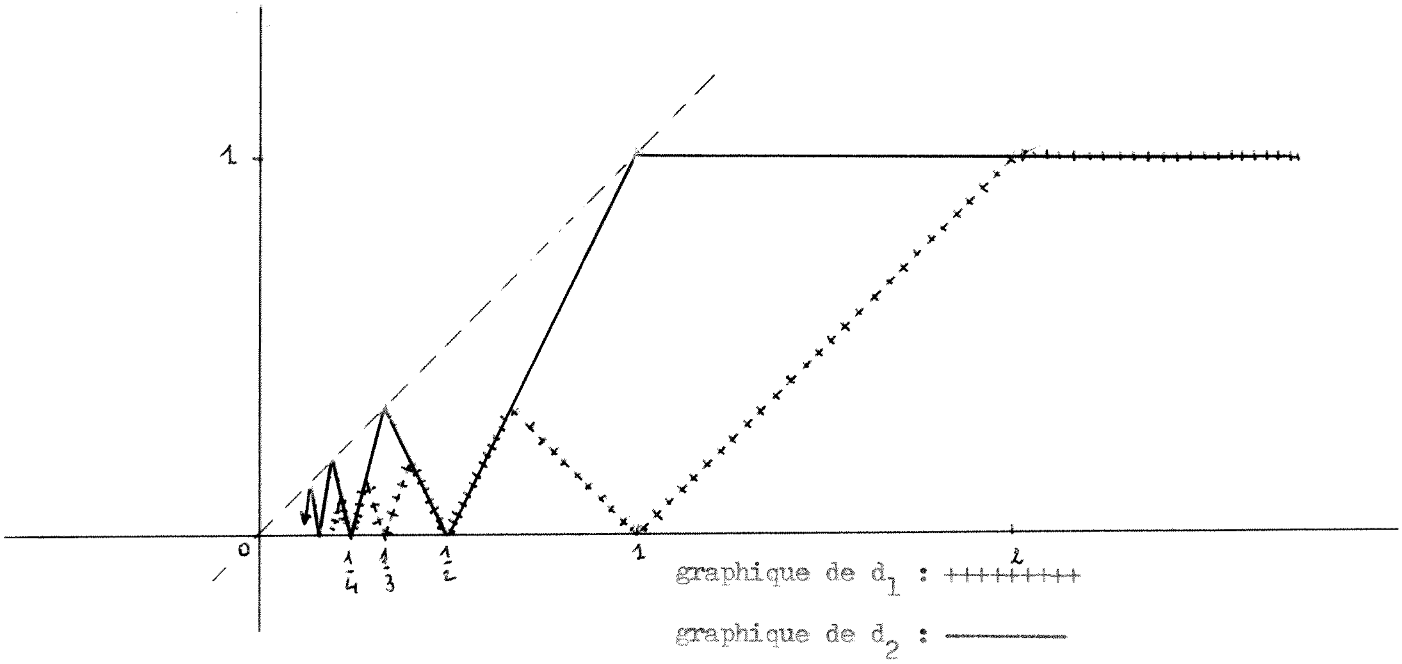
si $x \in \left[\frac{2}{4q+2}\ ,\ \frac{2}{4q+1}\right]$, $f(x) = 3d_1(x) - x$ soit $f(x) = -3 + (6q + 2)x$

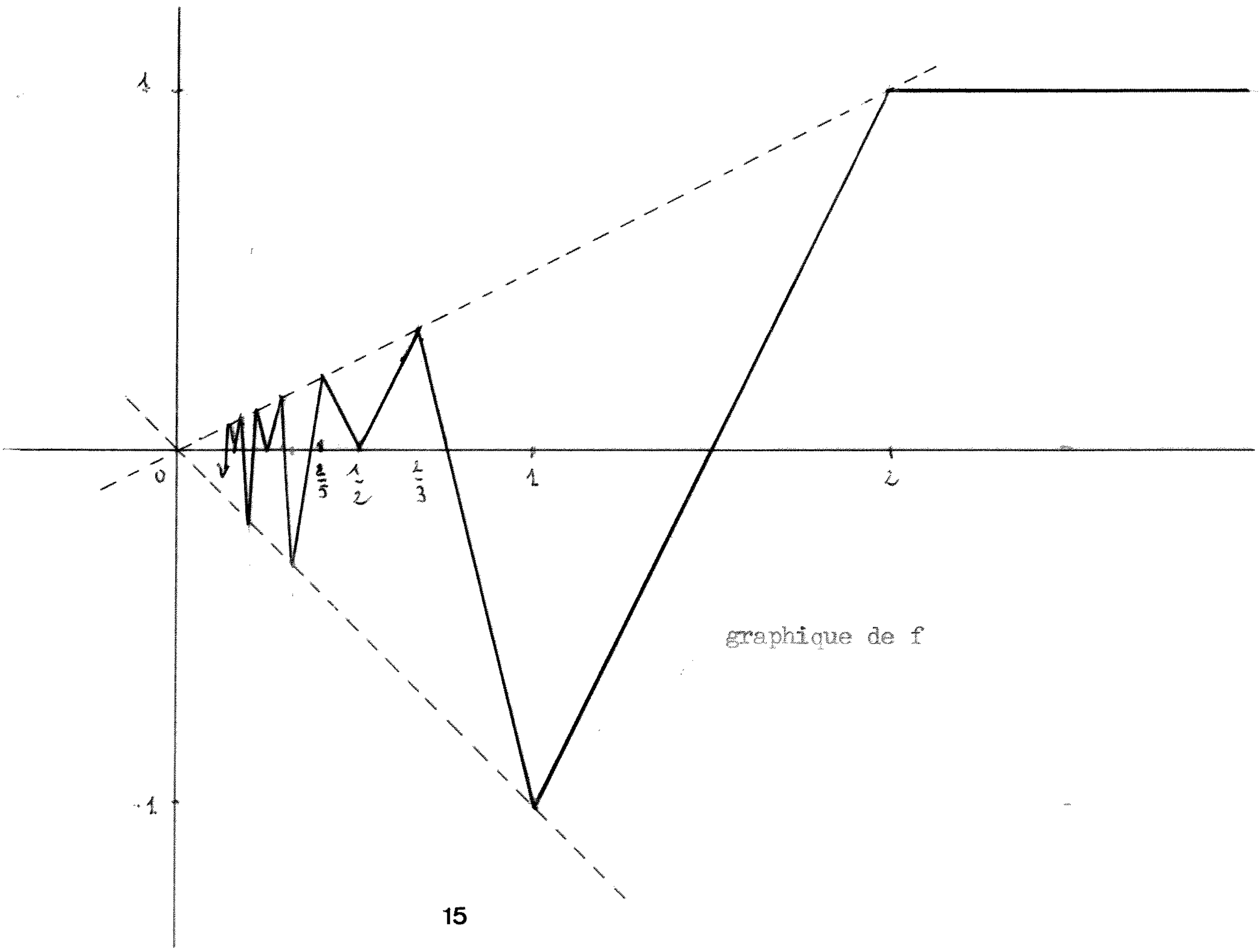
si $x \in \left[\frac{2}{4q+1}\ ,\ \frac{2}{4q}\right]$, $f(x) = d_1(x)$ soit $f(x) = 1 - 2qx$

si $x \in \left[\frac{2}{4q}\ ,\ \frac{2}{4q-1}\right]$, $f(x) = d_1(x)$ soit $f(x) = 2qx - 1$.

Tableau de variation de f sur l'intervalle $\left[\frac{2}{4q+3}\ ,\ \frac{2}{4q-1}\right]$.

x	$\frac{2}{4q+3}$		$\frac{2}{4q+2}$		$\frac{2}{4q+1}$		$\frac{2}{4q}$		$\frac{2}{4q-1}$
$f(x)$	$\frac{1}{4q+3}$	$\searrow$	$\frac{-2}{4q+2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4q+1}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4q-1}$





5- Etudier la fonction numérique g déterminée par $g(x) = \frac{1}{2}(x + d(x,2Z))$.

a) La fonction g est définie sur R; puisque $d(x+2,2Z) = d(x,2Z)$ on a $g(x+2) = g(x) + 1$, le graphique G de g se déduit du graphique G' de la restriction de g à l'intervalle $[0,2]$ par les translations de vecteur $k\vec{V}$, $k \in Z$, $\vec{V}$ ayant pour composantes (2 ,1).

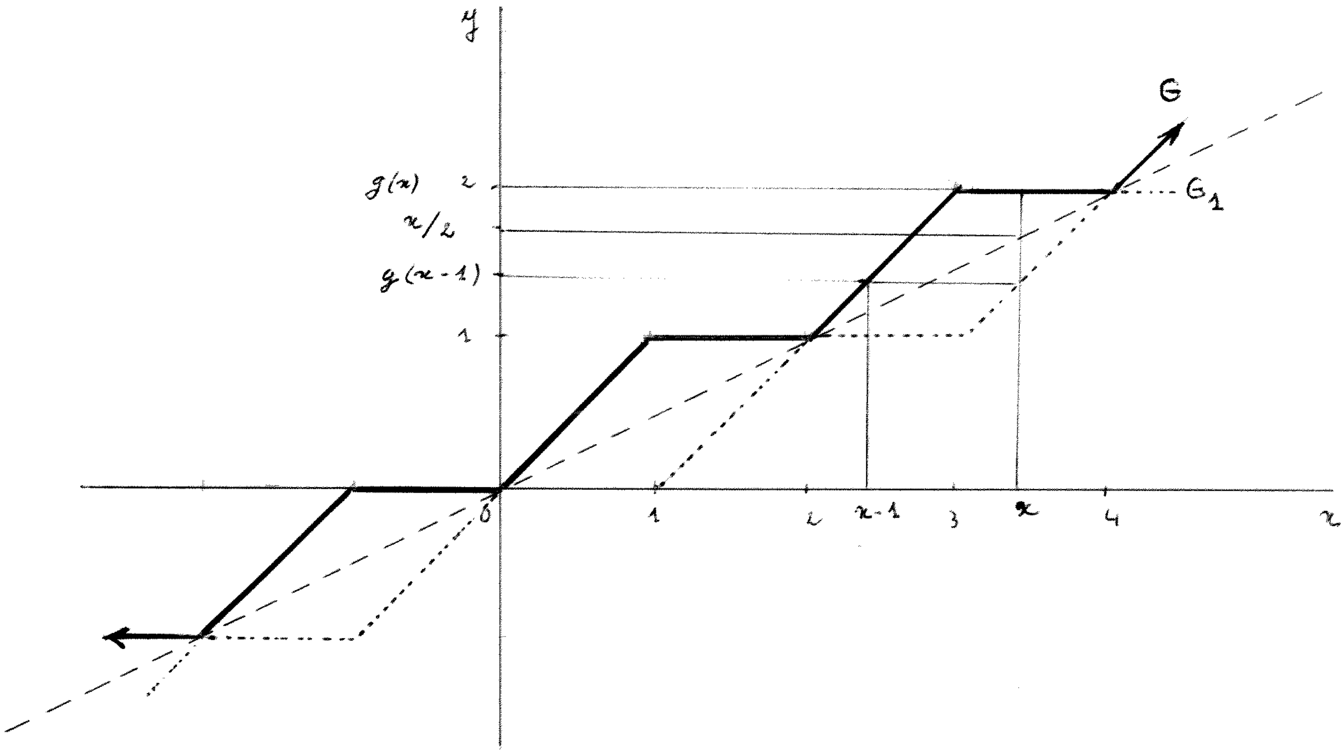
si $x \in [0,1]$, $d(x,2Z) = x$ et $g(x) = x$,

si $x \in [1,2]$, $d(x,2Z) = 2 - x$ et $g(x) = 1$;

plus généralement, soit $p \in Z$,

si $x \in [2p,2p+1]$, $d(x,2Z) = x - 2p$ et $g(x) = x - p$,

si $x \in [2p+1,2p+2]$, $d(x,2Z) = 2p +2 - x$ et $g(x) = p + 1$.



b) Quelques propriétés de la fonction g.

Soit $x \in [2p,2p+1]$ on a $g(x) = x - p$ et $g(x-1) = p$,

soit $x \in [2p+1,2p+2]$ on a $g(x) = p + 1$ et $g(x-1) = x - 1 - p$;

on en déduit (1) $g(x-1) + g(x) = x$ quel que soit x réel.

Soit G_1 l'ensemble déduit de G par la translation de vecteur V_1 (1,0), la formule (1) traduit le fait que G_1 se déduit aussi de G par la symétrie oblique dont l'axe est la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$ et dont la direction est celle de Oy.

Comparons maintenant $g(x+h)$ et $g(x) + g(h)$ (x et h réels quelconques), on a

$g(x+h) - g(x) - g(h) = \frac{1}{2}(d(x+h,2Z) - d(x,2Z) - d(h,2Z))$, notons D le second membre; pour étudier le signe de D on est amené à envisager les divers cas:

1. $x \in [2p,2p+1]$ et $h \in [2q, 2q+1]$

si $x + h \in [2(p+q)+1 \ , \ 2(p+q+1)]$ on a $D = 2p+2q+1-(x+h) \leqslant 0$

si $x + h \in [2(p+q) \ , \ 2(p+q)+1]$ on a $D = 0$

2. $x \in [2p,2p+1]$ et $h \in [2q+1, 2q+2]$

si $x + h \in [2(p+q)+1 \ , \ 2(p+q+1)]$ on a $D = 2p - x \leqslant 0$

si $x + h \in [2(p+q+1) \ , \ 2(p+q)+3]$ on a $D = h - 2q - 2 \leqslant 0$

3. $x \in [2p+1,2p+2]$ et $h \in [2q,2q+1]$, D étant symétrique en x et h on a les mêmes résultats qu'en 2.

4. $x \in [2p+1,2p+2]$ et $h \in [2q+1,2q+2]$

si $x + h \in [2p+2q+2, \ 2p+2q+3]$ on a $D = x + h - 2p - 2q - 3 \leqslant 0$

si $x + h \in [2p+2q+3, \ 2p+2q+4]$ on a $D = 0$.

On en déduit $D \leqslant 0$, quels que soient les réels x et h et compte tenu de la formule (1) on obtient l'encadrement : $g(h-1) \leqslant g(x+h) - g(x) \leqslant g(h)$ dont l'interprétation graphique est immédiate.

6- Exemple de distance sur R^2 non associée à une norme.

Soit h l'application de R dans R^+ déterminée par

$$h(x) = |x| \quad \text{si} \quad |x| \leqslant 1$$
$$h(x) = \sqrt{2|x| - 1} \quad \text{si} \quad |x| > 1 .$$

1° Démontrer que $h(x+x') \leqslant h(x) + h(x')$, quels que soient les réels x et x'.

La fonction h est paire, on envisage les différents cas:

a) $xx' > 0$, d'après la parité on peut supposer $x > 0$ et $x' > 0$.

- pour $x \leqslant 1$ et $x' \leqslant 1$:

si $x+x' \leqslant 1$, $h(x+x') = x+x' = h(x) + h(x')$.

si $x+x' > 1$, $h(x+x') = \sqrt{2(x+x') - 1}$ et $h(x) + h(x') = x + x'$

comparons les carrés, ce qui revient à étudier le signe de

$D = (x+x')^2-2(x+x')+1$ soit $D = (x+x'-1)^2$, donc $D > 0$ c'est à dire $h(x) + h(x') > h(x+x')$.

- pour $x \leqslant 1$ et $x' > 1$ (donc $x+x' > 1$):

$h(x+x') = \sqrt{2(x+x') - 1}$ et $h(x) + h(x') = x+\sqrt{2x'-1}$

la comparaison des carrés conduit à étudier le signe de

$D = (x+\sqrt{2x'-1})^2 - 2(x+x') + 1$ soit $D = x^2+2x(\sqrt{2x'-1} -1)$

l'expression entre parenthèses est positive puisque $x' > 1$ donc $D > 0$.

- pour $x > 1$ et $x' \leqslant 1$ on a le même résultat.

- pour $x > 1$ et $x' > 1$ (donc $x+x' > 1$) :

$h(x+x') = \sqrt{2(x+x') - 1}$ et $h(x) + h(x') = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x'-1}$, on étudie encore le signe de $D = (\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x'-1})^2 - 2(x+x') + 1$

soit $D = 2\sqrt{(2x-1)(2x'-1)} - 1$ d'où $D > 0$ car $2x-1$ et $2x'-1$ sont supérieurs à 1.

b) $xx' < 0$, par exemple $x > 0$ et $x' < 0$, on pose $x'' = -x'$, on a successivement

$h(x+x') = h(x-x'') = h(|x-x''|)$ puisque h est paire,

$h(|x-x''|) < h(x+x'')$ puisque h est croissante sur R^+,

$h(x+x'') \leqslant h(x) + h(x'')$ d'après a) d'où $h(x+x'') \leqslant h(x) + h(x')$.

c) $xx' = 0$, par exemple $x = 0$, on a $h(x) = 0$ et $h(x+x') = h(x) + h(x')$.

En résumé : $h(x+x') \leqslant h(x) + h(x')$, quels que soient x et x' réels.

2° On pose $l(P) = \sqrt{\dfrac{h^2(x) + h^2(y)}{2}}$ quel que soit $P = (x,y) \in R^2$ et on considère l'application d de $R^2 \times R^2$ dans R^+ déterminée par $d(M,M') = l(M'-M)$, quel que soit $(M,M') \in R^2 \times R^2$. Démontrer que d est une distance sur R^2.

Posons $M = (x,y)$, $M' = (x',y')$ d'où $M'-M = (x'-x,y'-y)$.

a) On a $d(M,M') = 0 \Leftrightarrow h^2(x'-x)+h^2(y'-y) = 0 \Leftrightarrow x'-x = 0$ et $y'-y = 0$, autrement dit $M = M'$.

b) On a $d(M,M') = d(M',M)$.

c) Pour démontrer l'inégalité triangulaire $d(M,M'') \leqslant d(M,M') + d(M',M'')$ posons $x'-x = u$, $y'-y = v$, $x''-x' = u'$, $y''-y' = v'$, et comparons les carrés des deux membres, ce qui revient à étudier le signe de

$$D = h^2(u)+h^2(v)+h^2(u')+h^2(v')+2\sqrt{[h^2(u)+h^2(v)][h^2(u')+h^2(v')]} - h^2(u+u')-h^2(v+v') .$$

D'après la première question on a : $\dfrac{D}{2} \geqslant E - F$ en posant

$$E = \sqrt{[h^2(u)+h^2(v)][h^2(u')+h^2(v')]}$$

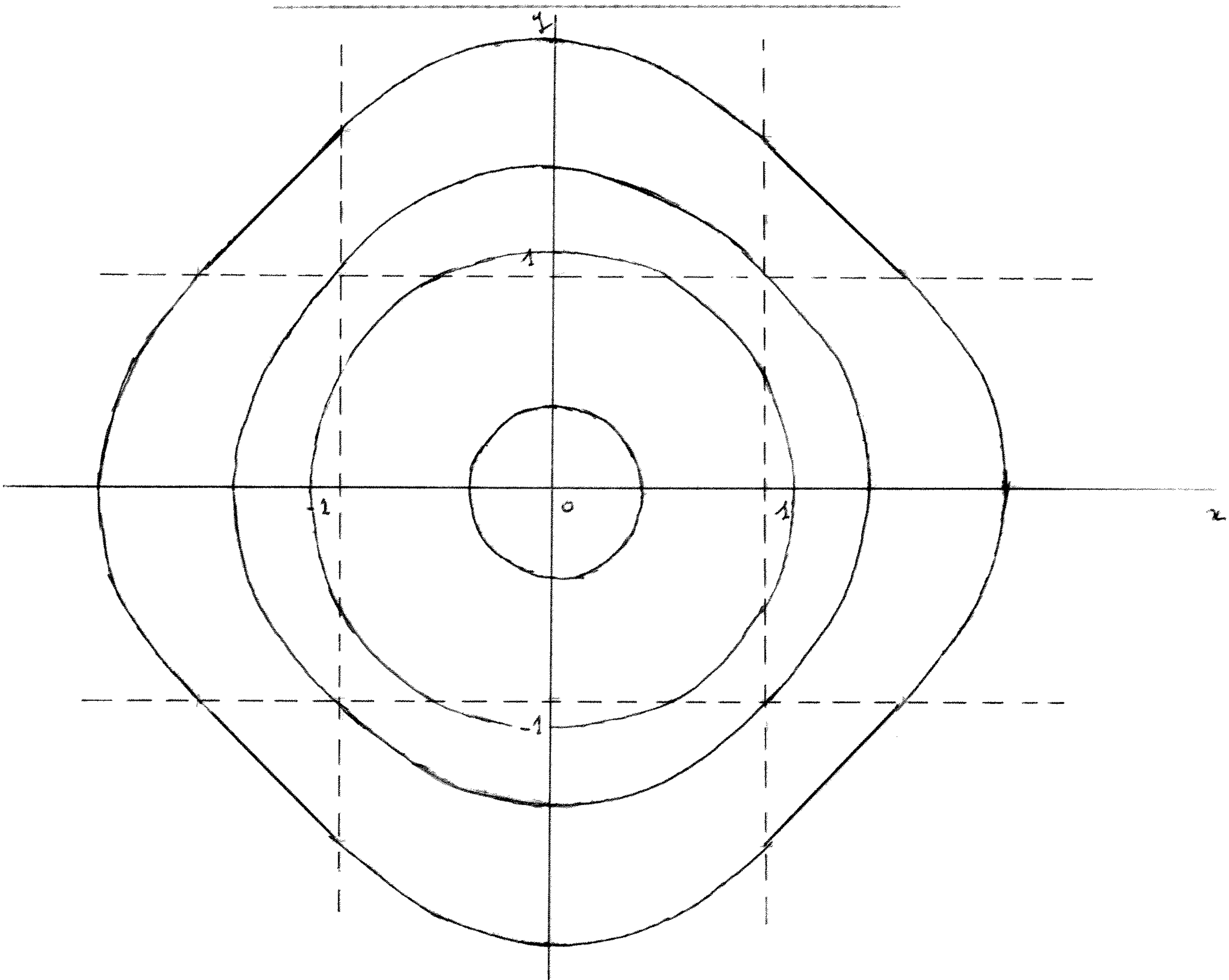
$$F = h(u)h(u') + h(v)h(v')$$

Puisque $E^2-F^2 = h^2(u)h^2(v')+h^2(v)h^2(u')-2h(u)h(u')h(v)h(v')$

soit $h(u)h(v')-h(v)h(u')$ ^{2}, on a $E \geqslant F$ donc $D \geqslant 0$.

Il en résulte que d est une distance sur R^2.

Remarque: d'après sa définition cette distance est invariante par translation mais l'application l de R^2 dans R^+ (cf énoncé de la 2° question) n'est pas une norme comme on le constate à l'aide du contre-exemple : $P = (3,2)$ et $k = 2$, $l(2P) = 3$ alors que $2l(P) = 4$. La distance d n'est donc pas associée à une norme.



Représentation des ensembles $E_r = \{M \in R^2,\ d(0,M) = r\}$, de l'intérieur vers l'extérieur, respectivement pour $r \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant r < 1$, $r = 1$, $r > 1$.

(Les courbes situées à l'intérieur du carré $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$ sont des arcs de cercles, à l'extérieur il s'agit de segments de droites ou d'arcs de paraboles).