Une méthode géométrique pour une classe de problèmes combinatoires

Conférence faite par M. EHRHART à la Régionale Parisienne.

Quelques exemples numériques simples seront, je pense, plus clairs qu'un exposé systématique. D'après leur difficulté, nous distinguerons deux sortes de problèmes, suivant que leur domaine polyédrique est entier ou seulement rationnel.

I. - Problèmes à domaines entiers

Problème d'échange de monnaie. - De combien de manières peut-on payer un montant de n francs en monnaie? (C'est à dire, par convention, en pièces de 10, 20, 50 et 100 centimes.)

Il s'agit de trouver le nombre j_n de solutions entières du système :

$$10X + 20Y + 50Z + 100T = 100n \ , \quad X, Y, Z, T \geqslant 0.$$

Géométriquement ce système définit un tétraèdre P_n dont j_n est le nombres de points entiers (c'est à dire dont les coordonnées appartiennent à Z). Le polyèdre P_n est l'image de P_1 dans l'homothétie $(0,n)$ centrée à l'origine.

On voit facilement que P_1 est entier(c'est à dire que ses sommets sont des points entiers). Or, d'après un de mes théorèmes, le j_n de tout polyèdre à 3 dimensions est un polynome du 3° degré. Notre j_n est donc donné par la formule d'interpolation de Newton :

$$j_n = \binom{n}{3}(j-1)^{(3)} + \binom{n}{2}(j-1)^{(2)} + \binom{n}{1}(j-1)^{(1)} + j_0 \ , \quad j^r \sim j_r$$

où la puissance symbolique signifie que, dans le développement tout j_r est à remplacer par j_r. Or, pour n = 0, 1, 2, 3 on compte par le système ou dans P_n j_n = 1, 11, 40, 98. La formule précédente fournit alors :

$$j_n = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)(5n+6).$$

Maintenant un fait qui est, je crois, intéressant. Si l'on veut que chaque espèce de pièces figure dans le paiement, il faut remplacer dans le système $\geqslant$ par $>$, et donc le j_n du polyèdre fermé par le dénombrant i_n du polyèdre ouvert. D'après un de mes théorèmes, il suffit alors de changer dans le polynome j_n le signe de la variable d'homogénéité, ce qui donne instantanément :

$$i_n = \frac{1}{6}(n - 1)(2n - 1)(5n + 6).$$

Ce problème illustre le théorème suivant :

Théorème des polyèdres entiers. - Pour tout polyèdre fermé entier homothétique P_n (n entier positif) de dimension d, quelle que soit sa nature topologique :

1° le dénombrant j_n des points entiers est un polynome de degré d ;

2° la formule de Newton donne ce polynome à l'aide de quelques valeurs initiales ;

3° les polynomes dénombrants i_n et j_n du polyèdre, respectivement ouvert ou fermé, vérifient la loi de réciprocité : $i(n) = (-1)^d j(-n)$.

Signalons déjà que cette curieuse, simple et utile loi de réciprocité s'applique aussi aux polyèdres rationnels. Pour les polyèdres entiers de moins de quatre dimensions, on peut remplacer la formule de Newton par des formules géométriques. En voici deux exemples.

~~Prob~~lème de sous-réseau. - Le quadrilatère P_1 de la figure 1 est entier dans un réseau centimétrique. Question : Quel est le nombre de ses points internes ou périphériques qui sont entiers dans le sous-réseau millimétrique?

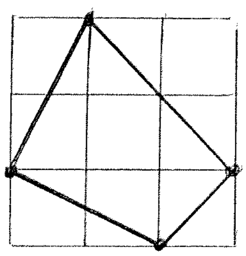
Cela revient à chercher le dénombrant j_{10} du quadrilatère fermé P_{10}, image de P_1 dans l'homothétie (0, 10). Or pour tout polygone entier :

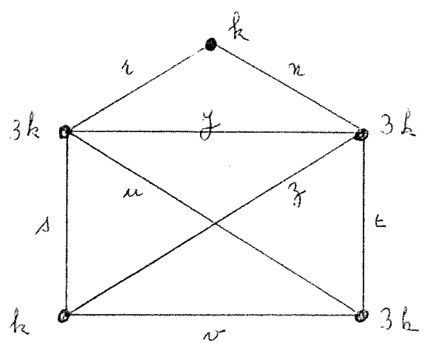
$$j_n = Sn^2 + \frac{l}{2} n + 1.$$

Ici l'aire "réticulaire" de P_1 est $S = 9/2$ (l'unité d'aire est celle du carré de base du réseau) et son périmètre réticulaire est $l = 5$ (les points entiers de chaque droite-côté forment un sous-réseau dont la maille est l'unité de longueur sur ce côté). D'où :

$$j_{10} = \frac{9}{2} 100 + \frac{5}{2} 10 + 1 = 476.$$

Problème de valuations d'un graphe. - Considérons le graphe de la figure 2, valuer ce graphe c'est doter chaque sommet ou arc d'un nombre entier non négatif, sa valeur.





Les valeurs paramétrées des sommets étant imposées comme l'indique la figure, on demande : quel est le nombre de valuations des arcs, telle que la valeur de tout sommet soit égale à la somme des valeurs des arcs incidents?

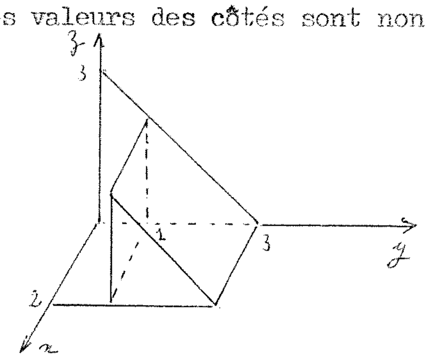
Les 8 valeurs inconnues des arcs étant liées par 5 relations linéaires d'incidence, on peut les exprimer en fonction de trois d'entre elles, soient x, y, z :

$r = k - x, \quad t = 3k - x - y - z, \quad u = \frac{k}{2} + x + z, \quad s = \frac{3k}{2} - y - z, \quad v = \frac{-k}{2} + y.$

1° k impair : le problème est impossible comme le montre la dernière équation.

2° k pair : on pose k = 2n. En écrivant que les valeurs des côtés sont non négatives, on obtient alors le système :

$$(1) \quad \left\| \begin{array}{l} x, y, z \geqslant 0 \\ x \leqslant 2n , \; y \geqslant n \\ y + z \leqslant 3n \\ x + y + z \leqslant 6n \end{array} \right.$$



Le domaine P_n de ce système est pour n = 1 le prisme entier fermé P_1 ci-dessus. Or, d'après un de mes théorèmes, le dénombrant j_n de tout polyèdre homothétique P_n entier, fermé et homéomorphe à une sphère est :

$$(2) \qquad j_n = Vn^3 + \frac{S}{2} n^2 + \Delta . n + 1.$$

V est le volume réticulaire de P_1 (le volume du cube de base du réseau sert d'unité), donc ici V = 4. Le S désigne l'aire réticulaire de P_1 (dans chaque plan-face les points entiers forment un sous-réseau, dont la maille donne l'unité d'aire pour cette face). Or, d'après un de mes théorèmes, pour tout polyèdre entier homéomorphe à une sphère : S = b − 2, b étant le nombre de points entiers du bord de P_1. Donc ici S = 18 − 2 = 16. Par définition, Δ ("excès" de P_1) est :

$\Delta = i + \frac{b}{2} - V$, où i désigne le nombre de points entiers internes de P_1. Donc ici, $\Delta = 0 + \frac{18}{2} - 4 = 5$. La formule (2) donne alors :

$$j_n = (n + 1)(2n + 1)^2.$$

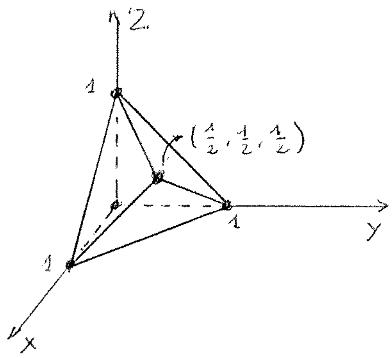
Et si les valeurs desarcs du graphe doivent être strictement positives ? Dans le système (1) le signe $\geqslant$ est remplacé par $>$. Donc j_n est remplacé par le dénombrant i_n des points entiers internes de P_1. La loi de réciprocité donne immédiatement : $i_n = (n - 1)(2n - 1)^2$.

Remarque. – La méthode des polyèdres ne donne pas seulement le nombre des solutions. Pour une valeur numérique du paramètre, elle fournit aussi toutes les solutions. Dans le problème précédent par exemple, il suffit de prendre dans le prisme P_n les points entiers l'un après l'autre et de porter chaque fois dans (1) le triplet x, y, z correspondant.

11. - Problèmes à domaines rationnels

Nous appelons ici carré magique (3, n) toute matrice 3×3 dont les éléments sont des entiers non négatifs, tels que la somme des éléments de chaque ligne ou colonne soit égale à n. (Contrairement à ce qui se passe pour les carrés magiques historiques , on ne considère pas la somme des éléments d'une diagonale, et on n'exige pas que les éléments soient les entiers de 1 à 9.)

Problème des carrés magiques (3, n), symétriques par rapport à la première diagonale. Combien y en a-t-il ?



Toute matrice de cette famille est de la forme :

$$\begin{Vmatrix} n - X - Y & X & Y \\ X & n - X - Z & Z \\ Y & Z & n - Y - Z \end{Vmatrix}$$

En écrivant que ses éléments sont non négatifs, on obtient le système : $X, Y, Z \geqslant 0, \quad X + Y, Y + Z, Z + X \leqslant n.$

Le nombre cherché j_n est donc le dénombrant du polyèdre fermé P_n défini par ce système, image de l'hexaèdre P_1 ci-dessus dans l'homothétie (0, n). Or P_1 est rationnel (ses sommets sont des points rationnels, c'est à dire à coordonnées rationnelles).

Pour la suite nous avons besoin de deux définitions :

Définitions :

1° Le dénominateur d'un point rationnel est le plus petit commun multiple des dénominateurs de ses coordonnées irréductibles.

2° Le produit sommital d'un polyèdre rationnel P_1 est :

$$\pi(t) = (1 - t^{a_1})(1 - t^{a_2})\dots(1 - t^{a_n})$$

où les a_i sont les dénominateurs des sommets de P_1 (c'est un produit formel, t n'ayant pas de signification).

Dans notre exemple les dénominateurs des sommets de P_1 sont 1, 1, 1, 1, 2 et donc : $\quad \Pi(t) = (1-t)^4(1-t^2)$.

Un théorème de réduction, que nous n'énoncerons pas ici, permet d'y supprimer un facteur $1-t$, ce qui donne le produit sommital réduit :

$$\Pi'(t) = (1-t)^4(1+t) = 1 - 3t + 2t^2 + 2t^3 - 3t^4 + t^5.$$

D'où immédiatement, par un de mes théorèmes, une relation de récurrence linéaire pour j_n :

$$\{\Pi'(j)\} = 0 \qquad j^r \sim j_{n-r}$$

les accolades signifiant que, dans le polynome $\Pi'(t)$ effectué, on remplace toute puissance j^r par j_{n-r} ; donc ici

$$j_n - 3j_{n-1} + 2j_{n-2} + 2j_{n-3} - 3j_{n-4} + j_{n-5} = 0,$$

On en déduit que j_n a une fraction rationnelle génératrice :

$$F(t) = \frac{f(t)}{\Pi'(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} j_n t^n$$

où le polynome $f(t)$ est de moindre degré que $\Pi'(t)$. Comme pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$, on compte dans P_n respectivement $j_n = 1, 4, 11, 23, 42$, on a :

$$f(t) = (1+4t+11t^2+23t^3+42t^4+\ldots)(1-3t+2t^2+2t^3-3t^4+\ldots) = 1 + t + t^2$$

en ne formant que les termes de degré inférieur à 5. Par suite :

$$F(t) = \frac{1+t+t^2}{(1-t)^4(1+t)} = \frac{3}{2(1-t)^4} - \frac{3}{4(1-t)^3} + \frac{1}{8(1-t)^2} + \frac{1}{16(1-t)} + \frac{1}{16(1+t)}$$

En considérant le terme en t dans le développement en série de chaque élément, on obtient donc :

$$j_n = \frac{3}{2}\binom{n+3}{3} - \frac{3}{4}\binom{n+2}{2} + \frac{n+1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{[-1,\ 1]}{16}$$

où $[-1,\ 1]$ est par définition égal à (-1) ou à 1, suivant que n est impair ou pair.

Ou encore :

$$(3) \quad j_n = \frac{2n^3 + 9n^2 + 14n + [7,\ 8]}{8} = \left\| \frac{(n+1)(2n^2+7n+7)}{8} \right\|$$

les doubles barres désignant l'entier le plus proche. (La différence entre les deux fractions est en effet inférieure à $\frac{1}{2}$).

<u>Problème des carrés magiques (3, n) positifs</u> (c'est à dire à éléments positifs), <u>symétriques par rapport à la première diagonale</u>. Combien y en a-t-il ?

La loi de réciprocité donne immédiatement leur nombre à partir de (3) :

$$i_n = \left\| \frac{(n-1)(2n^2 -7n +7)}{8} \right\|$$

Pour pouvoir énoncer des résultats généraux, il nous faut au préalable poser encore deux définitions :

Définitions :

1° Un nombre périodique $u_n = \left[a_1, a_2, \ldots, a_k\right]$ est le nième terme d'une suite périodique, dont on a écrit la première vague dans les crochets (la période est donc k).

exemple : pour les valeurs entières de n, $\cos \frac{2\pi n}{3} = \frac{[-1, -1, 2]}{2}$.

2° Un polynome mixte diffère d'un vrai polynome en ce que certains coefficients sont des nombres périodiques de la variable. (Un polynome mixte j_n est donc une suite, puisqu'il n'est défini que pour n entier. Nous l'appelons mixte, parce qu'il prend ses valeurs à l'aide de plusieurs polynomes.)

Le problème précédent est une application du théorème général suivant.

Théorème des polyèdres rationnels.- Pour tout polyèdre fermé rationnel homothétique P_n de dimension d et de produit sommital $\pi(t)$, quelle que soit sa nature topologique :

1° le dénombrant j_n des points entiers vérifie la relation de récurrence linéaire : $\left\{\pi(j)\right\} = 0, \quad j^r \sim j_{n-r}$;

2° j_n est un polynome mixte de degré d (réduit à un vrai polynome si P est entier);

3° on en déduit la fonction j(n) explicitement par une fraction rationnelle génératrice, à l'aidede quelques valeurs initiales ;

4° les dénombrants i_n et j_n du polyèdre, respectivement ouvert ou fermé, vérifient la loi de réciprocité : $i_n = (-1)^d\, j(-n)$.

Remarques :

1° Le calcul de j_n par le développement en série de sa fraction génératrice, décomposée en éléments simples, peut être pénible. Heureusement, nous avons pu mettre au point une autre décomposition, qui évite dans ce calcul tout recours aux nombres complexes et à la trigonométrie. Voir E. Ehrhart, "Polynomes arithmétiques et méthodes des polyèdres en combinatoire", brochure de 150 pages imprimées en 1975 à Strasbourg par l'I.R.M.A. (Institut de Recherche de Mathématique Avancée).

2° Par la méthode des polyèdres, on trouve le nombre des carrés magiques suivants : carrés magiques (3, n), $j_n = \frac{1}{8}(n+1)(n+2)(n^2 + 3n + 4)$; carrés magiques (c, n) , j_n est un polynome de degré $(c-1)^2$; carrés magiques (3, n) symétriques par rapport aux deux diagonales : $j_n = \frac{1}{8}(n + [1, 2])(3n + [5, 4])$; carrés magiques positifs (4, n) symétriques par rapport aux deux diagonales, $i_n = \binom{n}{4}$; carrés pseudo-magiques (2, n) c'est à dire matrices 2×2 à éléments entiers non négatifs, tels que la somme des éléments de chaque ligne ou colonne soit au plus n : $j_n = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n^2 + 3n + 3)$; carrés magiques (3, n) où la somme des éléments de chaque diagonale vaut aussi n : si $n \neq 3k$ il n'y a pas de solution, si $n = 3k$ $j_n = 2k^2 + 2k + 1$; carrés magiques historiques (3, 15) (la somme des éléments de chaque diagonale vaut aussi 15, et les éléments sont juste les entiers de 1 à 9) : à une symétrie et des rotations près, il n'y en a qu'un seul :

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Il est connu en Chine depuis 4000 ans !

"L'Ouvert" : Responsable de la publication : Jean Lefort , 22 rue A. Schweitzer Wintzenheim, 68000 Colmar.
Impression : IREM de Strasbourg, 10 rue du Général Zimmer, 67084 Strasbourg.

A partir de cet année, un comité de rédaction s'occupe de l'Ouvert. Ce comité est composé de : Michel CAMBAS, Michel de COINTET, Jean-Luc GUIARD, jean LEFORT Charles MORITZ, Jean-Claude SIDLER .

Dès le 15 Novembre 1976, une permanence de l'Ouvert sera tenu au Département de mathématique de l' U.L.P, bureau 216, 6 rue Descartes à Strasbourg. La permanence sera ouverte les mercredis de 14 heures à 16 heures.