Les journées sur l'analyse

Les journées sur l'analyse, organisées par l'Inspection Générale, se sont déroulées à Strasbourg les 26 et 27 novembre 1975; elles ont été animées par M. l'I.G. Ramis avec la participation de M. Glaeser, directeur de l'I.R.E.M., de M. Bronner I.P.R., de nos collègues Mle C. Kahn et M. Spenlé.Le programme de ce stage a été le suivant:

mercredi 26, matin – didactique de l'analyse par M. Glaeser. (le compte-rendu doit paraître dans un prochain bulletin national).

– quelques insuffisances de Q exposées par M. Spenlé, Mle C. Kahn et M. l'I.G. Ramis.

après-midi – à propos de l'unicité de R (cf l'article de P. Samuel, p 341 du bulletin n° 299), par M. l'I.G. Ramis.

– séance d'exercices par M.l'I.G. Ramis et M. Bronner.

jeudi 27, matin – fonctions continues par M. l'I.G. Ramis

retour sur la didactique de l'analyse avec M. Glaeser

après-midi – information sur les filtres par M. l'I.G. Ramis

– exercices par M. Bronner.

Bien entendu le but de ces journées n'était pas de donner un modèle de ce qui doit être enseigné dans les classes de lycée, même en Terminale,mais d'abord de provoquer une incitation à renouveler notre enseignement de l'analyse; si en effet l'algèbre a profité largement de la mise en application des nouveaux programmes, il n'en a pas été de même de l'analyse alors que c'est peut-être une partie des mathématiques susceptible de développer l'intuition de nos élèves, d'exciter et de provoquer leur curiosité, qualités qui étaient largement exploitées avec l'étude des figures géométriques, c'est la raison d'être d'un certain nombre d'exercices qu'on trouvera ci-après.
Ces journées ont encore permis d'apporter une information succinte, en général sous forme d'exercices, sur quelques questions d'analyse étudiées dans les classes post-baccalauréat; peut-être certains collègues pourront-ils y trouver matière à illustrer certains chapitres de l'étude de R.

1/ Quelques insuffisances de Q.

1- Rappels sur Q, espace topologique.

- On munit Q d'une structure topologique en prenant pour ensembles ouverts les intervalles ouverts et les réunions de tels intervalles.
- On dit qu'une partie V de Q est un voisinage du rationnel r lorsque V contient un ouvert contenant $\{r\}$.
- Soit Q' une partie non vide de Q, la topologie induite sur Q' est celle dont les ouverts sont les intersections avec Q' des ouverts de Q.
- Soit f une application de Q' ($Q' \subset Q$) dans Q et soit r un point de Q'; on dit que f est continue en r lorsque, quel que soit le voisinage V de f(r), il existe un voisinage U de r (pour la topologie induite sur Q') tel que f(U) soit inclus dans V.
- Les propriétés des applications continues d'une partie de R dans R sont bien connues, certaines d'entre elles restent valables dans Q; par exemple soit f une application de Q dans Q, continue en x_o et telle que $f(x_o) \neq 0$, il existe alors un voisinage U de x_o tel que f(x) ait le signe de $f(x_o)$, quel que soit x appartenant à U. Les exemples qui suivent montrent quelques insuffisances de Q vis à vis de propriétés topologiques qui semblent aller de soi dans R.

2- Valeurs intermédiaires.

On sait que toute application f de R dans R, continue, strictement monotone et telle qu'il existe $(a,b) \in R^2$ avec $f(a).f(b) < 0$, s'annule une fois et une fois seulement entre a et b. Dans Q considérons la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2$ si x est strictement positif et $f(x) = -x^2 - 2$ sinon.

La fonction f est continue (°), strictement croissante sur Q, $f(0) = -2$, $f(2) = 2$ mais elle ne s'annule pas entre -2 et 2.

(°) Soit $A > 0$, pour tout x et x' positifs et inférieurs à A on a:

$f(x) - f(x') = (x - x')(x + x')$, d'où $|f(x) - f(x')| \leqslant 2A.|x - x'|$ (i) ;

la continuité de f en tout point $x' > 0$ en résulte. L'inégalité (i) exprime que f est lipschitzienne de rapport 2A sur l'intervalle $]0,A]$, on déduit de là qu'elle est uniformément continue (donc continue) sur cet intervalle.

3- Etude d'une partie non vide et majorée de Q.

Dans R toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure (c'est à dire un plus petit majorant). Reprenons l'application f de Q dans Q définie au §2 et posons $A = \{ x \in Q \; ; \; f(x) < 0 \}$. La partie A n'est pas vide ($0 \in A$) et elle est majorée (2 est un majorant); supposons qu'elle admette une borne supérieure a (hypothèse H); si on a $f(a) < 0$, alors il existe $h > 0$ tel que $\forall x \in]a-h, a+h[$ on ait $f(x) < 0$ (car f est continue en a), donc a n'est pas un majorant de A, ce qui est absurde; si on a $f(a) > 0$, alors il existe $h' > 0$ tel que $\forall x \in]a-h', a+h'[$ on ait $f(x) > 0$, donc a n'est pas le plus petit majorant de A, ce qui est absurde; finalement f(a) est nul, mais c'est impossible car f ne s'annule pas (sur Q); l'hypothèse H est à rejeter, A n'admet pas de borne supérieure. Il en résulte que A n'est pas un intervalle de Q, pourtant A est convexe (car quels que soient u et v dans A et w dans Q on a: $u < w < v \Rightarrow w \in Q$).

4- Intervalles emboîtés (Cantor).

Dans R soit une suite d'intervalles $[u_n, v_n]$ décroissante (au sens de l'inclusion) dont la longueur $v_n - u_n$ tend vers 0, on sait que ces intervalles ont un seul point commun w qui est la limite commune des suites (u_n) et (v_n). Dans Q considérons les suites (u_n) et (v_n) déterminées par: $u_n = \frac{a_n}{10^n}$, $v_n = \frac{a_n + 1}{10^n}$, $a_n \in N$, $a_n^2 < 2.10^{2n} < (a_n + 1)^2$; on a

$v_n - u_n = \frac{1}{10^n}$ donc $\lim (v_n - u_n) = 0$ et $u_n \leqslant u_{n+1} < v_{n+1} \leqslant v_n$, mais les intervalles $[u_n, v_n]$ n'ont aucun point commun (sinon soit w un tel point, pour tout n on a $u_n \leqslant w \leqslant v_n$ donc $u_n^2 \leqslant w^2 \leqslant v_n^2$ mais aussi $u_n^2 \leqslant 2 \leqslant v_n^2$ donc $v_n^2 - u_n^2 \geqslant |w^2 - 2|$ (1), or $v_n^2 - u_n^2 = (v_n + u_n)(v_n - u_n) = \frac{1}{10^n}(v_n + u_n)$ d'où $0 < v_n^2 - u_n^2 < \frac{4}{10^n}$ et $\lim (v_n^2 - u_n^2) = 0$ ce qui contredit (1)).

5- Suites de Cauchy dans Q.

On dit que la suite (u_n) est de Cauchy dans Q (resp.R) si, quel que soit le nombre strictement positif rationnel (resp. réel) ε il existe un entier naturel N tel que les inégalités $n > N$ et $p > N$ entraînent $|u_n - u_p| < \varepsilon$. Toute suite convergente est de Cauchy, la réciproque est vraie dans R, elle ne l'est pas dans Q comme le montre le contre-exemple $u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \cdots\cdots + \frac{1}{n!}$.

Soit $n > p$, on a $u_n - u_p = \frac{1}{(p+1)!} + \dots\dots + \frac{1}{n!}$ et successivement:

$$u_n - u_p < \frac{1}{(p+1)!} \left(1 + \frac{1}{p+1} + \dots\dots + \frac{1}{(p+1)^{n-p-1}} \right)$$

$$u_n - u_p < \frac{1}{(p+1)!} \frac{1 - \left(\frac{1}{p+1}\right)^{n-p}}{1 - \frac{1}{p+1}} < \frac{1}{(p+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{p+1}}$$ ou enfin

$u_n - u_p < \frac{1}{p(p!)}$. Quel que soit le rationnel $\varepsilon = \frac{h}{q}$ strictement positif, si $n > q$ et $p > q$ alors $|u_n - u_p| < \frac{1}{q(q!)} < \frac{h}{q}$, la suite (u_n) est donc de Cauchy dans Q, mais elle ne converge pas dans Q (Supposons en effet $\lim u_n = \frac{h}{q}$; pour $n > p$ on a $0 < u_n - u_p < \frac{1}{p(p!)}$, fixons p et faisons tendre n vers l'infini, il vient: $0 < \frac{h}{q} - u_p \leqslant \frac{1}{p(p!)}$, l'inégalité de gauche est stricte car la suite (u_n) est strictement croissante, mais $u_p = \frac{B}{p!}$, B entier, d'où $0 < \frac{h}{q} - \frac{B}{p!} \leqslant \frac{1}{p(p!)}$ et enfin $0 < h(p!) - Bq \leqslant \frac{q}{p}$; p ayant été fixé arbitrairement on peut prendre $p = 2q$ on obtient alors, A désignant un entier: $0 < A \leqslant 1/2$ ce qui est impossible).

6- Image continue d'un segment dans Q.

Dans R l'image continue d'un segment est un segment; cette propriété n'est pas vraie dans Q où l'image continue d'un segment peut ne pas être bornée (exemple 1), ou être majorée mais sans borne supérieure (exemple 2), ou admettre une borne supérieure non atteinte (exemple 3).

Exemple 1 : soit f l'application du segment $[0,2]$ ($[0,2] \subset Q$) dans Q telle que $f(x) = \frac{1}{2 - x^2}$ quel que soit $x \in [0,2]$.

1° L'application f est continue sur $[0,2]$ en effet, posons $A = \{ x \in [0,2] \ ; \ x^2 < 2 \}$ et $B = \{ x \in [0,2] \ ; \ x^2 > 2 \}$.

Soit $a \in A$, il existe $m \in A$ tel que $a < m$ car $x \xrightarrow{\ } 2 - x^2$ est continue en a; pour tout $x \in [0,m]$ on a : $|f(a) - f(x)| = \frac{|a^2 - x^2|}{(2-a^2)(2-x^2)} \leqslant \frac{4}{(2 - m^2)^2} \cdot |a - x|$; sur $[0,m]$, l'application f étant lipschitzienne de rapport $\frac{4}{(2 - m^2)^2}$ est uniformément continue, donc f est continue en a.

Soit $b \in B$, il existe $m' \in B$ tel que $m' < b$; pour tout $x \in [m',2]$ on a: $|f(b) - f(x)| \leqslant \frac{4}{(m'^2 - 2)^2} \cdot |b - x|$; la continuité de f en b en résulte.

2° L'image par f du segment $[0,2]$ n'est pas bornée. Considérons en effet la suite (u_n) envisagée au §4; elle prouve l'existence de deux entiers positifs p et q tels que: (1) $p^2 < 2q^2 < (p + 1)^2$, $p > 1$, q aussi grand qu'on le veut. Les entiers p et q satisfaisant à (1) on a aussi $2p + 1 < 3q$ (car $2p + 1 < 3p$ donc $(2p + 1)^2 < 9p^2 < 18q^2 < (5q)^2$).

On en déduit l'inégalité (2) $2 - \frac{5}{q} < \left(\frac{p}{q}\right)^2 < 2$ (autrement dit $-2q^2 + 5q + p^2 > 0$ or on a $-2q^2 + 5q + p^2 > -2q^2 + (2p+1) + p^2 > (p+1)^2 - 2q^2 > 0$ d'après (1))

et d'une manière analogue: (3) $2 < \left(\frac{p+1}{q}\right)^2 < 2 + \frac{5}{q}$.

D'après (2) on a $f(\frac{p}{q}) > \frac{q}{5}$ donc $f(\,[0,2]\,)$ n'est pas majorée,

et aussi $f(\frac{p+1}{q}) < -\frac{q}{5}$ donc $f(\,[0,2]\,)$ n'est pas minorée.

Exemple 2 : soit f l'application du segment $[0,2] = I$ ($I \subset Q$) dans Q telle que $f(x) = \frac{1}{4}(6x - x^3)$ quel que soit $x \in I$ et $A = \{x \in I;\ x^2 < 2\}$, $B = \{x \in I;\ x^2 > 2\}$.

1° L'application f est croissante (resp décroissante) sur A (resp B) car $4\left[f(x) - f(x')\right] = (x - x')(6 - x^2 - x'^2 - xx') = (x - x')(2 - x^2 + 2 - x'^2 + 2 - xx')$

2° L'application f est (uniformément) continue sur I car $4\left|f(x) - f(x')\right| \leqslant |x - x'|\,(6 + 2^2 + 2^2 + 2^2)$ d'où $|f(x) - f(x')| \leqslant 5\,|x - x'|$ donc f est lipschitzienne et de rapport 5 sur I.

3° L'application f est majorée sur I en effet soit g l'application de I dans Q telle que $g(x) = [f(x)]^2$, quel que soit $x \in I$. On a $16\left[g(x) - 2\right] = (6x - x^3)^2 - 32 = (x^2 - 2)^2(x^2 - 8) < 0$, donc g est majorée sur I et $f(x)^2 < 2 < \frac{9}{4}$ donc $f(x) < \frac{3}{2}$ quel que soit $x \in I$.

4° L'ensemble f(I) n'admet pas de borne supérieure, sinon soit u cette borne alors u^2 est la borne supérieure de g(I) (°) et on a $u^2 < 2$ donc $u \in A$; mais $4\left[f(u) - u\right] = 2u - u^3 = u(2 - u^2) > 0$ d'où $f(u) > u$, c'est impossible puisque u est la borne supérieure de f(I).

Exemple 3 : soit f l'application du segment $I = [0,2]$ ($I \subset Q$) dans Q telle que $f(x) = 4x^2 - x^4$.

1° L'application f est (uniformément) continue sur I car lipschitzienne et de rapport 48 ($|f(x) - f(x')| \leqslant (x + x')(4 + x^2 + x'^2)|x - x'| \leqslant 48|x - x'|$).

2° Si on écrit $f(x) = 4 - (x^2 - 2)^2$ on voit que 4 est un majorant de f(I), que c'est la borne supérieure de f(I) enfin que cette borne supérieure n'est pas atteinte.

(°) On a $0 \leqslant f(x) \leqslant u$ donc $g(x) \leqslant u^2$ quel que soit $x \in I$; u^2 est donc un majorant de g(I); d'autre part , quel que soit $\varepsilon > 0$, $u - \frac{\varepsilon}{3}$ n'est plus un majorant de f(I), autrement dit il existe $x \in I$ tel que $f(x) > u - \frac{\varepsilon}{3}$; puisque $1 < u < \frac{3}{2}$ choisissons ε tel que $\varepsilon < 3$ ce qui assure $u - \frac{\varepsilon}{3} > 0$, on a alors $g(x) > (u - \frac{\varepsilon}{3})^2 > u^2 - 2u\,\frac{\varepsilon}{3} > u^2 - \varepsilon$, ce qui prouve que $u^2 - \varepsilon$ n'est plus un majorant de g(I), donc u^2 est la borne supérieure de g(I).

II/ Exercices d'analyse.

1- Soit f une application de $I = [0;1]$ dans lui-même ($I \subset R$), existe-t-il $x \in I$ tel que $f(x) = x$? On supposera successivement f continue, f décroissante, f croissante.

1° L'application f est continue; posons $g(x) = f(x) - x$ quel que soit $x \in I$, g est continue sur I, $g(0) \geqslant 0$, $g(1) \leqslant 0$ donc g s'annule sur I (théorème des valeurs intermédiaires).

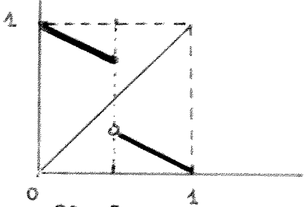


fig 1

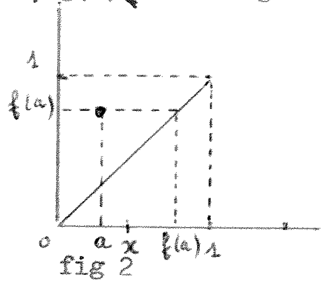


fig 2

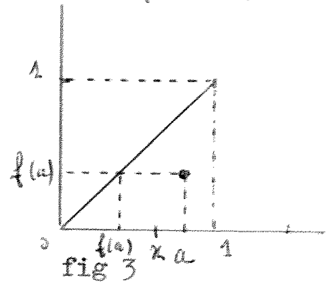


fig 3

2° L'application f est décroissante; pour la fonction f représentée fig1 on a $f(x) \neq x$, quel que soit $x \in I$.

3° L'application f est croissante; posons $A = \{ x \in I;\ f(x) \geqslant x \}$, A est une partie non vide ($0 \in A$) et majorée (1 est un majorant) de R, soit a sa borne supérieure, $0 \leqslant a \leqslant 1$, démontrons par l'absurde que $f(a) = a$.

- si on a $f(a) > a$ (fig 2), il existe $x \in R$ tel que $a < x < f(a)$ d'où $f(a) \leqslant f(x)$ puisque f est croissante, donc $x < f(x)$; ainsi $x \in A$ et $a < x$, c'est impossible.
- si on a $f(a) < a$ (fig 3), il existe $x \in R$ tel que $f(a) < x < a$ d'où $f(x) \leqslant f(a)$ puisque f est croissante, donc $f(x) < x$; ainsi $x \notin A$, sur l'intervalle $]f(a), a]$ il n'y a aucun point de A, c'est impossible.

On déduit de là $f(a) = a$.

2- Etude des couples (E,f), E désignant une partie non vide de R et f une bijection de E sur E, tel que $f(x) + f^{-1}(x) = 2x$, quel que soit $x \in E$.

1° Etude préliminaire.

- si (E,f) est une solution alors (E, f^{-1}) en est une aussi.
- le couple (E, Id_E) est solution quel que soit E. (Id_E désigne l'application identité dans E).
- soit f déterminée par $f(x) = x + k$ (k réel donné) et E une partie de R invariante par la translation $x \longmapsto x + k$, alors (E, f) est solution.
- soit (E,f) une solution, notons f^n ($n \in Z$) la bijection de E sur E, définie par récurrence pour $n \in N$ par $f^0 = Id_E$, $f^n = f.f^{n-1}$ (composée des deux applications) et $(f^{-1})^n = f^{-n}$.

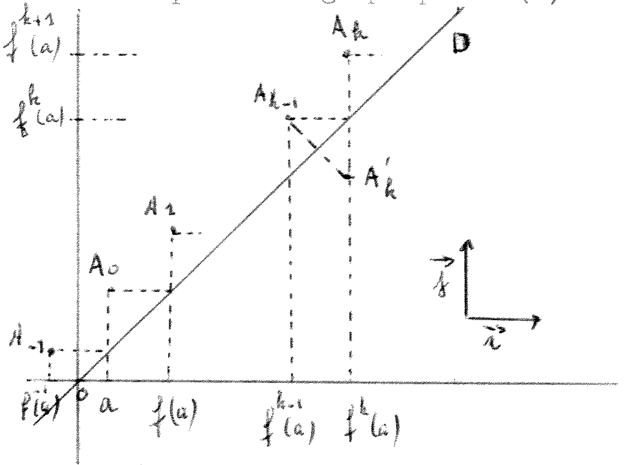
  Quel que soit $x \in E$ et $n \in Z$, $f^{n-1}(x) = y$ est dans E et on a:

  $f(y) + f^{-1}(y) = 2y$ soit $f^n(x) + f^{n-2}(x) = 2f^{n-1}(x)$ ou encore

  $f^n(x) - f^{n-1}(x) = f^{n-1}(x) - f^{n-2}(x)$, donc

  $f^k(x) - f^{k-1}(x) = f(x) - x$, quel que soit $k \in Z$ (1); les points $f^k(a)$ forment donc pour a fixé dans E une suite arithmétique, incluse dans E.

L'interprétation graphique de (1) est immédiate.



Soit D la droite d'équation $x - y = 0$, A_k se déduit de A_{k-1} par la composée des deux symétries d'axe D et de directions respectives $\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{j}$; tous les points A_k appartiennent à une parallèle à la droite D.

De (1_n) on déduit:

$$\sum_{k=1} \left[f^k(x) - f^{k-1}(x)\right] = f^n(x) - x = n\left[f(x) - x\right]$$

soit: $$f^n(x) = n\left[f(x) - x\right] + x \qquad (2)$$

en particulier s'il existe $a \in E$ tel que $f(a) \neq a$, (2) montre que E n'est pas borné.

2° Détermination de quelques solutions.

L'étude qui précède permet d'exhiber des solutions; on se donne une suite arithmétique $E = \{a + nr;\ n \in Z\}$ et f déterminée par $f(x) = x + kr$, k entier fixé, le couple (E,f) est solution.

Soit $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ une partition de E et les solutions $(E_i, f_i)_{i \in I}$, considérons f déterminée ainsi: pour tout $x \in E$, il existe $i \in I$ et un seul tel que $x \in E_i$, on pose $f(x) = f_i(x)$; le couple (E,f) est une solution.

En particulier si on veut des solutions avec $E = R$ il suffit de faire une partition de R en suites arithmétiques; par exemple soit $R = \bigcup_{i \in [0,1[} E_i$ avec $E_i = \{i + n;\ n \in Z\}$ et $f_i(x) = x + k_i$ où k_i est un entier qui ne dépend que de i; le couple (E_i, f_i) est solution; soit alors $f(x) = x + k_{x-E(x)}$, le couple (R,f) est solution. ($E(x)$ désigne la partie entière de x).

Autre exemple: posons $D = \bigcup_{n \in N} D_n$ avec $D_o = Z$ et pour $n \geqslant 1$, $D_n = \left\{\frac{p}{2^n}\ ;\ p \in Z \setminus 2Z\right\}$

il s'agit d'une partition de D en suites arithmétiques de raison $r_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ ($r_o = 1$); soit f déterminée par

$$f(x) = x + 1 \text{ si } x \in D_o\ ;\ f(x) = x + \frac{n}{2^{n-1}} \text{ si } x \in D_n\ ;\ f(x) = x \text{ si } x \in R \setminus D\ .$$

D'après ce qui précède (R,f) est une solution. Etudions la continuité de f; posons $g(x) = f(x) - x$, il suffit d'étudier g.

Si $a \notin D$, g est continue en a, en effet: $\lim \frac{n}{2^{n-1}} = 0$ donc $\forall \varepsilon \in R_+^*$, $\exists n_o \in N$, $\forall n > n_o$, $\frac{n}{2^{n-1}} < \varepsilon$. Pour chaque n tel que $1 \leqslant n \leqslant n_o$, D_n est une suite arithmétique qui ne contient pas a; posons $d_n = d(a, D_n)$ (distance de a à D_n) et soit $m = \min_{1 \leqslant n \leqslant n_o} (d_n)$ alors $|x - a| < m \Rightarrow |g(x)| < \varepsilon$.

Si $a \in D$, g n'est pas continue en a car tout intervalle ouvert contenant a contient au moins un nombre réel n'appartenant pas à D pour lequel $g(x) = 0$.

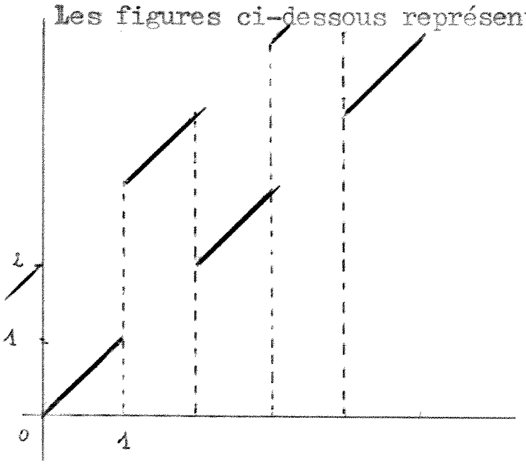
Recherche de solutions polynomiales.

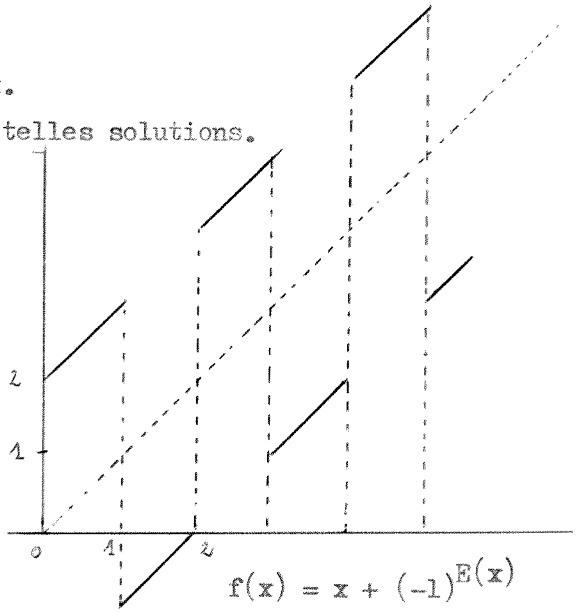
a) Solutions affines: (R,f) avec $f(x) = px + q$, $p \neq 0$, est une solution si, et seulement si $p = 1$ (q quelconque)

b) Il ne peut exister de solutions pour lesquelles le degré de $f(x)$ est supérieur ou égal à deux, sinon soit D' la droite d'équation $y - f(a) = x - a$ qui contient tous les points $A_k(f^k(a), f^{k+1}(a))$, alors l'équation $f(x) - x + a - f(a) = 0$ a une infinité de racines, c'est impossible puisque le premier membre est un polynome.

Recherche de solutions affines par morceaux.

Les figures ci-dessous représentent de telles solutions.





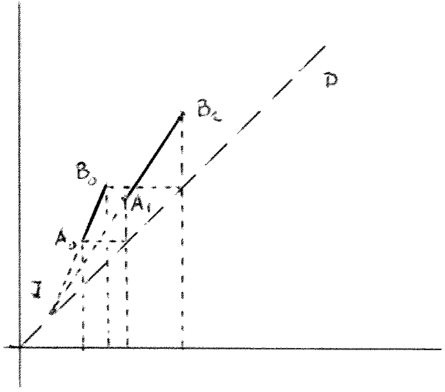
$f(x) = x + (-1)^{E(x)}$

3° Remarques.

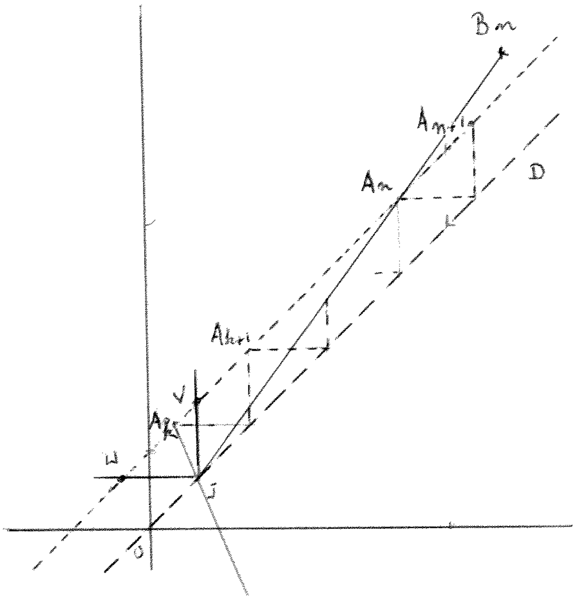
– Il ne peut exister de solutions affines par morceaux non parallèles à D $(x - y = 0)$, sinon soit A_oB_o un segment inclus dans le graphique de f; $A_o(a, f(a))$, $B_o(b, f(b))$; $\forall k \in Z$, $f^k(A_oB_o) = A_kB_k$ et tous ces segments coupent D en I; le graphique suggère que la longueur de l'intervalle $[f^n(a), f^n(b)]$ augmente avec n, on a en effet d'après (2):

$$f^n(b) - f^n(a) = b - a + n\left[f(b) - f(a) - (b - a)\right]$$

puisque le coefficient de n est différent de 0, le premier membre tend vers l'infini avec n, d'où la contradiction. car pour un n assez grand, $f^{n+1}(a)$ appartiendra à l'intervalle $[f^n(a), f^n(b)]$; sur la figure $n = 1$.



- Il ne peut exister de solutions monotones sur R, autres que les solutions affines sinon, considérons les deux suites de points $A_n(f^n(a), f^{n+1}(a))$, $B_n(f^n(b), f^{n+1}(b))$ du graphique de f, A_nB_n coupant D en I; d'après (1) on a $\overrightarrow{A_nA_{n+1}} = \overrightarrow{UV}$, il existe donc un point et un seul de la suite de points A_n entre U et V, notons le A_k. Soit t_n le taux d'accroissement de f entre $f^n(a)$ et $f^n(b)$, c'est aussi le coefficient directeur de la droite IA_n; on voit alors que t_n est positif pour tout $n \neq k$ et t_k est négatif, d'où la contradiction.



3- Déterminer les fonctions f de R dans R vérifiant la propriété (P):

$$\forall (x', x'') \in R^2, \quad \left[x' < x'' \Longrightarrow E(x') \leqslant \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} \leqslant E(x') \right] .$$

(E(x) désigne la partie entière de x).

Conditions nécessaires à l'existence d'une solution.

Supposons qu'il existe une solution f, prenons $x' = p$, p entier, et $x'' = p + s$, $s \in]0,1[$; on a $p \leqslant \dfrac{f(p+s) - f(p)}{s} \leqslant p$ soit

(1) $f(p+s) = f(p) + ps$,l'égalité ayant lieu aussi pour $s = 0$, (1) est vraie quel que soit p entier ($p \in Z$) et quel que soit $s \in [0,1[$; donc sur chaque intervalle $[p, p+1[$, f est une fonction affine.

Appliquons la propriété (P) avec $x' = p + s$, $p \in Z$, $s \in [0,1[$ et $x'' = p + 1$, on obtient compte tenu de (1): $p \leqslant f(p+1) - f(p) \leqslant p+1-s$; faisons tendre s vers 1 il vient $p \leqslant f(p+1) - f(p) \leqslant p$ donc quel que soit $p \in Z$, $f(p+1) - f(p) = p$.

On en déduit pour $n \in N$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[f(k+1) - f(k) \right] = f(n) - f(0) = \frac{(n-1)n}{2} \quad (2)$$

et le résultat est le même si n est un entier négatif. En bref, s'il existe une fonction f satisfaisant à (P) on a nécessairement d'après (1) et (2):

$$f(x) = k + \frac{1}{2} E(x) \left[E(x) - 1 \right] + E(x) \left[x - E(x) \right] , \ k \in R \quad (3).$$

Détermination des solutions.

Pour tout choix de $k \in R$, la formule (3) détermine une fonction f qui satisfait à la propriété (P), en effet:

Posons $E(x') = p'$, $x' = p' + s'$; $E(x'') = p''$, $x'' = p'' + s''$; $t_{x',x''} = \dfrac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}$

On a

$$t_{x',x''} - p' = \frac{p'' - p'}{x'' - x'} \left[\frac{1}{2}(p'' - p' - 1) + s'' \right]$$

supposons $x' < x''$

- si $p' = p''$, le second membre est nul.
- si $p' < p''$ alors $p'' - p' - 1 \geqslant 0$ et le second membre est positif ou nul.

dans tous les cas: $t_{x',x''} - p' \geqslant 0$.

On a de même

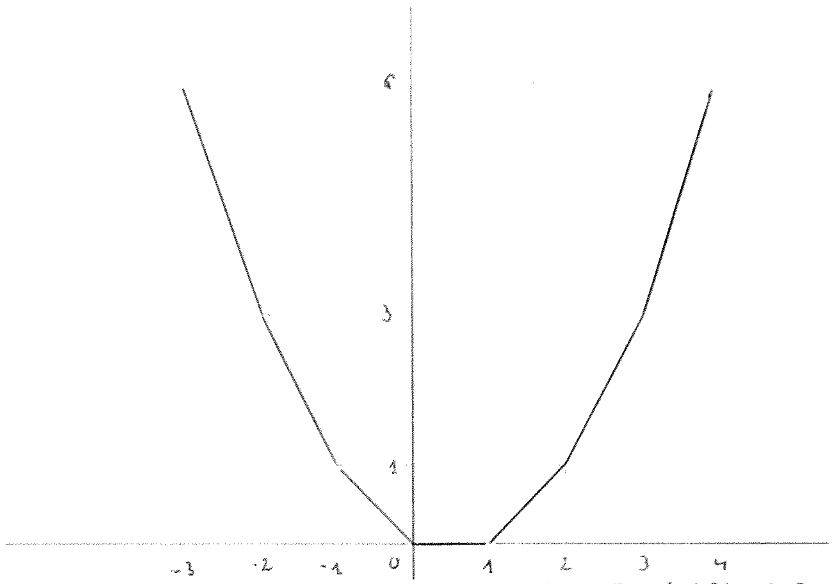
$$t_{x',x''} - p'' = \frac{p'' - p'}{x'' - x'} \left[\frac{1}{2}(p' - p'' - 1) + s' \right]$$

supposons $x' < x''$

- si $p' = p''$, le second membre est nul.
- si $p' < p''$ alors $p' - p'' \leqslant -1$ donc $\frac{1}{2}(p' - p'' - 1) \leqslant -1$ et le second membre est négatif.

dans tous les cas: $t_{x',x''} - p'' \leqslant 0$.

Représentation graphique de la solution f pour $k = 0$.



Les points anguleux sont sur la parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2}$.

4- Déterminer les fonctions f de R dans R vérifiant la propriété (P):

$$\forall\ (x',x'') \in R^2 , \quad \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = |\, x'' - x' \,| \ .$$

Conditions nécessaires à l'existence d'une solution.

Supposons qu'il existe une solution f, prenons $x' = 0$, $x'' \neq 0$ on a $f(x'') - f(0) = x'' \,|x''|$ (1), l'égalité ayant lieu aussi pour $x'' = 0$, on a donc nécessairement $f(x) = k + x\,|\,x|$, quel que soit $x \in R$, $k \in R$.

Détermination des solutions.

k étant fixé on a $\dfrac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = \dfrac{x''\,|x''| - x'\,|x'|}{x'' - x'}$, par exemple pour $x'' = 2$, $x' = 1$, le second membre vaut $3 \neq |2 - 1|$.

Il n'existe pas de fonctions satisfaisant à (P).

5- Soient a et b deux nombres réels donnés, déterminer les fonctions f de R dans R vérifiant la propriété (P): $\forall\ (x',x'') \in R^2, \left[\dfrac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = ax' + bx'' \quad \text{ou } x'' \leqslant x'\right]$.

Conditions nécessaires à l'existence d'une solution.

Supposons qu'il existe une solution f et soit x un réel positif $(x > 0)$, appliquons (P) en prenant:

$x' = 0$, $x'' = x$, alors $f(x) = bx^2 + f(0)$ (1)

$x' = -x$, $x'' = 0$, alors $f(-x) = ax^2 + f(0)$ (2)

$x' = -x$, $x'' = x$, alors $f(x) - f(-x) = 2(b-a)x^2$ (3)

mais d'après (1) et (2): $f(x) - f(-x) = (b-a)x^2$,

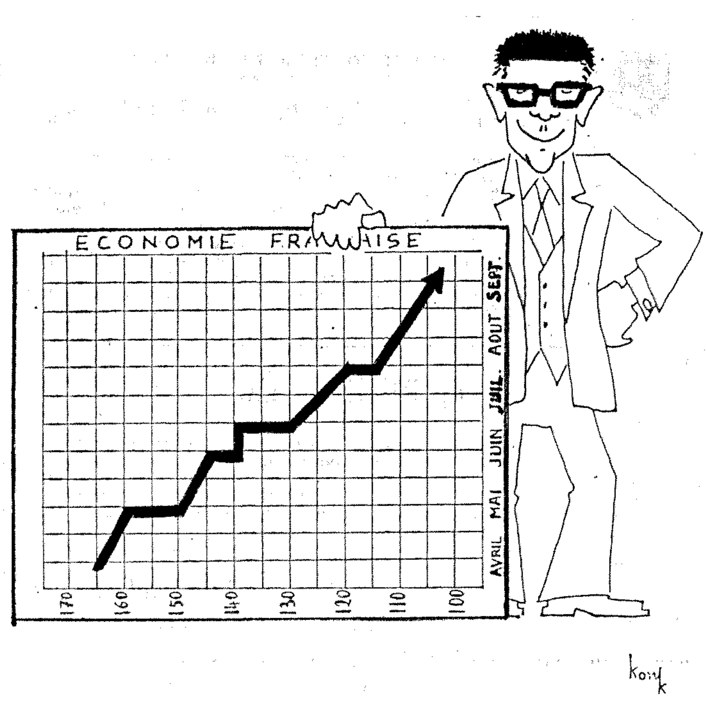
on déduit de là

- si $b \neq a$, il n'existe pas de fonction f satisfaisant à (P).
- si $b = a$, d'après (1) et (2) on a nécessairement $f(x) = ax^2 + k$ quel que soit $x \in R$, k réel donné.

Détermination des solutions.

le réel k étant fixé, on a $\dfrac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = \dfrac{(ax''^2 + k) - (ax'^2 + k)}{x'' - x'} = ax' + ax''$, quels que soient x' et x''.

Pour tout choix de $k \in R$, la formule $f(x) = ax^2 + k$ détermine une fonction f qui satisfait à la propriété (P).



dessin de Konk
"Le Monde" du
22 Octobre 75

<u>fonction décroissante</u> ?