La vitesse en physique relativiste

Le texte ci-dessous est la partie finale d'une étude de la notion de vitesse réalisée par le groupe math-physique de l'I.R.E.M.. Un premier travail avait consisté à étudier deux ouvrages de Piaget :

1) Notion de mouvement et de vitesse chez l'enfant (P.U.F.)

2) Le développement de la notion de temps chez l'enfant (P.U.F.)

ouvrages qui montrent que la notion de vitesse s'élabore indépendamment et que c'est celle de temps qui se définit à partir de la vitesse.

Partant d'une discussion avec Einstein et Piaget, Abelé et Malvaux ont construit "axiomatiquement" le temps à partir de la longueur et de la vitesse. C'est leur ouvrage : "Vitesse et univers relativiste" (chez Sedes) qui a été le thème de travail suivant et dont le texte ci-dessous est un résumé.

---

a) <u>Grandeur repérable ; grandeur mesurable</u> :

Une grandeur est repérable si on sait définir sur l'ensemble de ses états une relation d'ordre total. Par exemple l'indicateur de dureté où l'on a du plus tendre au plus dur : 1) Talc ,2) Gypse 3) Calcite 4) Fluorine 5) Apalite 6) Orthose 7) Quartz 8) Topaze 9) Corindon 10) Diamant ; tout corps étant classé comme rayant tous les précédents et étant rayé par tous les suivants. L'indicateur de température est un autre exemple : longueur d'une colonne de mercure, valeur d'une résistance électrique, déviation d'un couple thermo-électrique .... le problème étant de relier entre-elle toutes ces indications.

Dans la pratique on se contente d'une application croissante de l'ensemble des états dans $\mathbb{R}$ et on parle alors par abus de langage de "mesure".

Une grandeur est mesurable si on a défini sur l'ensemble de ses états une opération qui munit cet ensemble d'une structure de groupe. Par exemple la mesure des longueurs, des masses...

Dans la pratique on se contente d'un isomorphisme de groupe entre l'ensemble des états muni de l'opération considérée et une partie de $\mathbb{R}$ muni d'une loi de groupe convenable. Voyons plusieurs cas :

1- La bijection a lieu sur $\mathbb{R}$ tout entier. On considère alors le groupe ($\mathbb{R}$, +) comme dans le cas des mesures de longueur ou de masse (généralisée).

2- La bijection a lieu sur l'ensemble des réels positifs. On considère alors le groupe multiplicatif des réels positifs. Un passage au logarithme permet de revenir au groupe additif. Un exemple important est fourni par la hauteur des sons :

> On sait que les sons musicaux sont ordonnés spontanément par notre ouie suivant une échelle de hauteur croissante dont l'unité est l'octave, elle-même divisée en douze demi-tons tempérés. A la composition des hauteurs de sons correspond l'addition des demi-tons. Mais par ailleurs, on sait, depuis Pythagore, qu'aux intervalles sonores jugés égaux correspondent des rapports de fréquence (la fréquence étant l'élément physique correspondant à la hauteur). Par conséquent physiquement, nous avons non pas une addition mais une multiplication. Le recourt aux logarithmes permet de faire la liaison. On multiplie par mille le logarithme décimal du rapport (pour une octave c'est 2), le demi-ton correspondant à $(1/12) . 1000 . \log 2 = 25$ savarts.

3- Dans le cas le plus général, il existe un théorème qui affirme qu'il existe un isomorphisme entre un groupe abélien continu ordonné connexe et le groupe additif des réels. (Un groupe I est ordonné si pour 3 éléments quelconques de I a, b, c on a $a \leqslant b \Longrightarrow a * c \leqslant b * c$). La démonstration ressemble à celle utilisée pour la construction des exponentielles.

b) <u>La vitesse, grandeur repérable</u> :

Piaget a montré que sur une trajectoire rectiligne commune, tout mobile en dépassant un autre est reconnu posséder une vitesse supérieure à celui-ci à l'instant du dépassement. On peut donc définir l'égalité des vitesses comme étant celle de deux mobiles avançant côte à côte sans se dépasser mutellement.

Il est clair alors que la vitesse le long du même trajet rectiligne apparaît comme une grandeur repérable au sens où nous l'avons définie puisque deux vitesses quelconques peuvent toujours être comparées et même, on peut imaginer un nombre quelconque de véhicules tels que chacun dépasse le précédent et est dépassé par le suivant, en attribuant correctement un numéro d'ordre à chaque véhicule.

Si nous faisons tendre le nombre de véhicules vers l'infini, on voit aisément qu'on peut trouver une application croissante de l'ensemble des vitesses dans $\mathbb{R}$. Essayons de fonder cette intuition sur une technique expériementale.

Considérons les indicateurs de vitesses des autos ou les cinémomètres de la police de la route ou tout autre appareil qui permettent une graduation purement ordinal (c-à-d respectant seulement l'ordre induit par les dépassements) et satisfaisant aux conditions suivantes :

1º) L'aiguille de chaque indicateur est en face du zéro quand la voiture est immobile et y revient fidèlement à chaque arrêt.

2º) Il y a identité de fonctionnement de tous les appareils ; c-à-d que deux quelconque de ces indicateurs de vitesse placés sur un même véhicule indiquent un même nombre à tout moment quelque soit la vitesse du véhicule.

3º) Au cours d'expérience de dépassement on vérifie que le chiffre indiqué par l'appareil de la voiture qui dépasse est toujours supérieur au chiffre indiqué par l'appareil de la voiture dépassée.

La comparaison de vitesses non simultanées par l'intermédiaire d'un indicateur de vitesse suppose que :

1º) Il y a identité de répétition au cours du temps.

2º) L'appareil utilisé est fidèle.

Nous remarquons enfin que la seule existence des indicateurs de vitesse permet de définir le mouvement rectiligne et uniforme par la permanence de l'aiguille en face d'une position déterminée de l'appareil ; (donc plus de cercle vicieux pour la définition du mouvement uniforme).

c) Limite supérieure de la vitesse :

Ayant ainsi étalonné différents indicateurs de vitesse, il est possible pour un étalonnage donné de parler de limite supérieure de la vitesse. L'expérience montre que la vitesse de la lumière dans le vide représente une telle limite - et je ne reviendrai pas sur la description des expériences de Michelson et d'autres -. Nous conviendrons que l'étalonnage adopté donne une vitesse finie à la vitesse de la lumière, soit c . Dans la suite il nous arrivera de prendre $c = 1$. Cet étalonnage est conforme au sens commun puisque la transmission d'un signal lumineux n'est pas instantannée.

d) La vitesse, grandeur mesurable :

Soient deux points A et B tels que A et B échangent leur position au cours du mouvement. Nous pouvons supposer A fixe et B mobile ou le contraire. Des indicateurs de vitesse tels que les cinémomètres de la police routière montreraient que la vitesse de A dans le repère de B et celle de

B dans le repère de A sont les mêmes en valeur absolue ; que si la vitesse de A est constante il en est de même de celle de B et que le sens de variation de la distance entre A et B est indépendant du repère. Nous admettrons comme principe cette réciprocité des vitesses.

Cette remarque étant faite, nous allons définir une loi de composition interne dans l'ensemble des vitesses. L'expérience nous fournit de nombreux exemples de "compositions" des mouvements :

- Mouvement de la Lune autour de la Terre et mouvement de la Terre autour du Soleil.
- Mouvement d'un nageur dans une rivière et écoulement de la rivière par rapport à la rive.

Nous sommes donc amenés à considérer la composition physique de la vitesse et à rechercher une certaine loi telle que : $v_{A/C} = f(v_{A/B}, v_{B/C})$

et c'est la nature de la fonction f qui nous intéresse.

Vérifions que la composition des vitesses donne bien à l'ensemble des vitesses une structure de groupe abélien.

1º) En reprenant l'exemple du nageur on peut lui associer un observateur qui reste à sa hauteur sur la rive et qui possède par rapport à cette rive une certaine vitesse qui sera la composée de celle de l'écoulement de l'eau (vitesse d'un flotteur) et de celle du nageur.

2º) Remplaçons le nageur par un bateau sur le pont duquel marche un bonhomme. En se rapportant à un observateur sur la rive, on vérifie l'associativité.

3º) Si le nageur se laisse flotter, il a une vitesse nulle qui apparaît comme l'élément neutre.

4º) Le principe de réciprocité nous permet d'affirmer l'existence d'une vitesse symétrique d'une vitesse donnée.

5º) la commutativité se démontre comme l'associativité.

Nous avons donc un groupe commutatif et comme nous sommes en mesure grâce à notre indicateur de vitesse de considérer des vitesses arbitraires entre $-c$ et $+c$, l'alinéa (a) nous démontre l'existence d'une fonction F telle que :

si $\alpha = f(\beta, \gamma)$

alors $F(\alpha) = F(\beta) + F(\gamma)$

α, β et γ étant des vitesses. Le but de l'alinéa suivant étant de calculer l'une des deux fonctions f ou F (l'autre en résultant).

e) <u>La mesure des vitesses</u> :

Deux expériences, celle de Michelson qui donne une vitesse limite c pour l'ensemble des vitesses et celle de Fizeau qui donne dans certaines conditions une expression approchée de la relation $\alpha = f(\beta, \gamma)$ nous permettent une approche de la solution.

Supposons en effet la fonction f analytique, ce qui semble une hypothèse licite en sciences expérimentales, la formule de Taylor donne :

$$\alpha = f(\beta, 0) + \gamma f'_{\gamma}(\beta, 0) + (\gamma^2/2) f''_{\gamma^2}(\beta, 0)$$

et l'expérience de Fizeau donne :

$$\alpha = \beta + \gamma(1 - \beta^2)$$

aux erreurs d'expériences près, avec γ petit devant β et $1 - \beta^2$. On suppose ici $c = 1$.

Or en revenant à la structure de groupe des vitesses et en différentiant par rapport à γ on a :

$$F(\alpha) = F(\beta) + F(\gamma) \qquad \text{et} \qquad \alpha = f(\beta, \gamma)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma} = f'_{\gamma}(\beta, \gamma) = \frac{F'(\gamma)}{F'(\alpha)}$$

Par ailleurs si $\gamma = 0$ alors $\alpha = \beta$

On en déduit : $F'(\beta) = \dfrac{F'(0)}{1 - \beta^2}$

Ce qui montre l'existance d'une vitesse limite.

Intégrons maintenant cette équation et reportons dans l'équation en F : après simplification par $F'(0)/2$:

$$\mathrm{Log}\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \mathrm{Log}\frac{1+\beta}{1-\beta} + \mathrm{Log}\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$$

Soit encore : $\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha} = \dfrac{1+\beta}{1-\beta} \cdot \dfrac{1+\gamma}{1-\gamma}$

d'où : $\alpha = f(\beta, \gamma) = \dfrac{\beta + \gamma}{1 + \beta\gamma}$

f) Retour sur la notion de temps :

On définit le temps à partir de l'équation $t = x/v$ et on veut que cette équation soit conservée par des changements de repère en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.

Nous nous placerons dansun cas particulier : La vitesse du repère O'x'y'z' se fait sur l'axe ox du repère Oxyz . Nous supposons que les deux repères sont inertiels, c-à-d qu'ils conservent les mouvements rectilignes uniformes, ce qui implique que les équations de changement de base sont linéaires. Nous avons vu le caractère relatif et réciproque des vitesses de O et O' . Si on suppose que c'est O' qui a une vitesse v positive par rapport à O , on peut écrire : $\alpha x' = x - vt$ et $\beta x = x' + vt'$

où α et β dépendent à priori de v. Mais à cause du principe de réciprocité ces deux équations doivent se changer l'une en l'autre si on échange x en x', t en t' et v en $-v$. Donc :

$$\beta(v) = \alpha(-v)$$

De même si on change l'orientation de x et x' à la fois alors v est remplacé par $-v$ et $\alpha(-v)$ par $\alpha(v)$; et on remarque que $\alpha(v) = \alpha(-v)$ et par conséquent $\alpha = \beta$. D'où les équations :

$$\begin{cases} x' = (1/\alpha)(x - vt) \\ x = (1/\alpha)(x' + vt') \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} t' = (1/\alpha)(t - \frac{1-\alpha^2}{v} x) \\ t = (1/\alpha)(t' + \frac{1-\alpha^2}{v} x') \end{cases}$$

Il reste à calculer . On peut le faire de deux manières. Soit en introduisant un mobile animé de la vitesse u' sur $O'x'$ et en calculant sa vitesse u sur Ox par la loi de composition des vitesses ; soit en utilisant la vitesse limite c qui est la même dans les deux repères (ce qui est un cas particulier de la méthode précédente): $x'/t' = x/t = c$

$$\frac{x'}{t'} = \frac{x - vt}{t - \frac{1-\alpha^2}{v} x} = \frac{\frac{x}{t} - v}{1 - \frac{1-\alpha^2}{v}\frac{x}{t}} \Longrightarrow c = \frac{c - v}{1 - \frac{1-\alpha^2}{v} c}$$

D'où il vient : $\alpha^2 = 1 - (v^2/c^2)$

Ce qui donne finalement les équations de Lorenz :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\[2ex] t' = \dfrac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

On est ainsi ramené à l'étude d'un changement de base . On vérifie que ces matrices de changement de base forment un groupe commutatif. On peut rechercher les formes bilinéaires symétriques conservées par de tels changements de base. On retrouvera facilement celle donnée dans "l'Ouvert nº5" au chapitre "Aspects mathématiques de la relativité".