Mathématiciens arabes du moyen âge

Quand on parle de mathématiciens arabes il faut comprendre : mathématiciens ayant écrit en arabe, car, à l'époque, l'arabe était une langue scientifique internationale à l'égal du latin en Europe chrétienne. Mais la plupart des savants sont des étrangers, des natifs des régions passées sous domination arabe.

Rappelons à ce propos quelques dates :

- 622 : c'est le début de l'Egire.
- 632 : c'est la mort du prophète Mahomet.
- 732 : c'est la bataille de Poitiers.

Entre ces deux dernières dates, c'est-à-dire pendant un siècle, les arabes vont aller de conquête en conquête. Cependant dans les pays conquis, ils n'imposeront que leur religion, adoptant et conservant les droits et les coutumes des vaincus (si ce n'était pas incompatible avec la religion). Malgré cela, le Coran devant être apris par coeur par tout pratiquant, l'arabisation ce fait rapidement.

D'autre part, l'arabe est très ouvert à la culture étrangère, et cette ouverture d'esprit permettra l'assimilation et la mise en valeur des connaissances scientifiques des différents peuples soumis.

La première période : Dès le 7^{e} siècle, au moment de la conquête par les arabes, la Perse possède déjà une tradition scientifique propre ; Bagdad est un centre culturel important où l'on traduit sans relâche des oeuvres grecques ou indiennes. La civilisation arabe est alors mise en contact avec de nombreux savants et elle commence à connaître, retraduit du persan ou du syrien, les mathématiciens grecs du 5^{e} siècle.

Cependant, c'est surtout au milieu du 8^{e} siècle que des progrès importants seront réalisés. C'est à cette époque (770) qu'est donné en cadeau au calif de Bagdad le "Siddhânta".par des voyageurs hindous. Le "Siddhânta" est surtout un livre d'astronomie et c'est à travers ce livre que les arabes feront connaissance avec les chiffres indiens et surtout avec le zéro permettant la numération de position. Ils y apprendront aussi un début de trigonométrie. (le mot "sinus" est la latinisation du mot arabe, lui même transcrit du sanskrit et signifiant : trou, cavité). C'est également dans le "Siddhânta" qu'ils découvriront le principe de la preuve par neuf.

Bien d'autres sciences ont commencé leur essort à la même époque ; surtout celles qui avaient un lien avec la religion : L'astronomie pour la fixation du calendrier lunaire (en liaison avec le Ramadan), la géodésie (pour connaître la direction de la Mecque),... A propos d'astronomie, c'est aussi à travers le persan que les arabes auront connaissance de la science babylonienne.

Vers la fin du 8^e siècle et le début du 9^e, vit le très célèbre Muhammad ibn Mûsâ al-Khwârizmî. Au service du calife al-Mamûn, on lui doit le traité : "al-jabr wal muqâbâlâ" (ce qui peut se traduire par : "sur le rétablissement et la réduction" c'est-à-dire tout simplement "le calcul en général"). Ce livre a eu un tel retentissement et une telle influence que le mot "al-jabr" a finit par donner "algèbre". Dans ce traité, faute d'avoir une écriture spéciale pour les nombres négatifs (qui étaient connus mais non mathématisés), Al-Khwârizmî propose la résolution de l'équation générale du second degré en six étapes :

$$\left.\begin{array}{r} a x^2 = b x \\ a x^2 = c \\ x^2 + b x = c \\ x^2 + c = b x \\ x^2 = b x + c \\ b x = c \end{array}\right\} \quad \text{en notation moderne}$$

Il ne s'intéresse d'ailleurs qu'aux racines positives de ces équations, faute de pouvoir noter, comme il a été dit, les racines négatives.

Du même auteur, on connaît aussi, mais seulement dans sa traduction latine : "Liber Algoarismi de practica arismeticae". Ce qui signifie : "livre d'Al-Khwârizmi sur la pratique de l'arithmétique". Le mot "Algoarismi" latinisation du nom du savant, a fini par donné "Algorithme", sa signification exacte ayant été perdu au cours des siècles.

Transition avec la deuxième période : Au neuvième siècle, on commence à se rendre compte des erreurs dans les tables numériques, ce qui fait prendre conscience de l'importance de la théorie.

Tabit ben Qurra traduit et commente les oeuvres grecques d'Appolonius, d'Archimède,... Son fils Sinan ben Tabit ben Qurra et son petit fils Ibrahim ben Sinan ben Tabit ben Qurra seront de grands mathématiciens qui continueront l'oeuvre de leur père et grand pére, l'enrichissant de nouvelles découvertes.

C'est à Bani Musa, qui vivait à la même époque, que l'on doit la construction de l'ellipse à la façon des jardiniers.

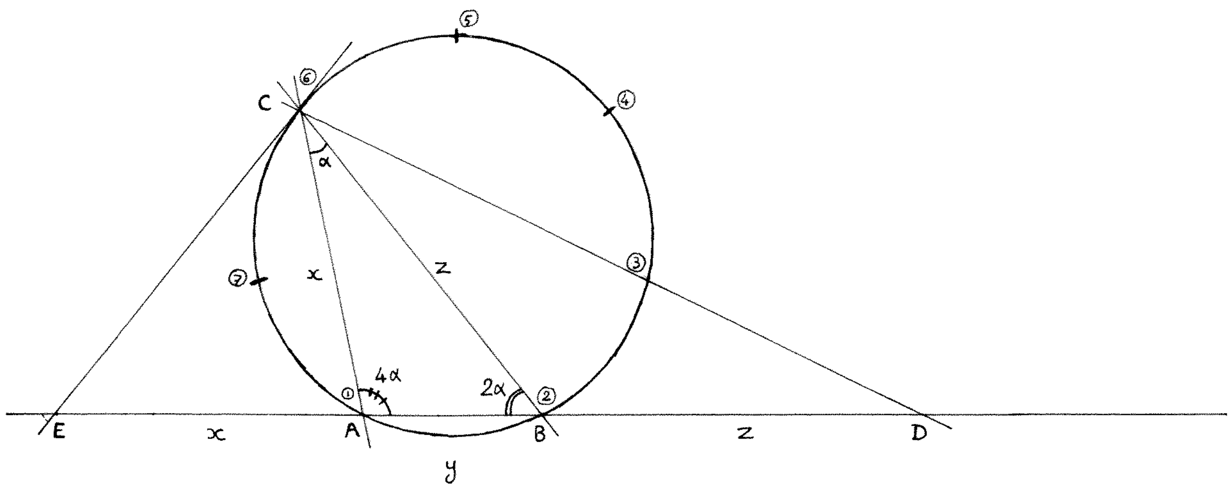
On commence à résoudre des équations à plusieurs inconnues ou de degré élevé (jusqu'au huitième degré, le septième étant exclu). On se rend alors compte de la notion d'irrationalité.

Toutes les oeuvres arabes de cette époque ne seront connues en Europe qu'au début du 13^e siècle, surtout grâce à Leonardo Fibonacci de Pisa qui en publiera une bonne partie en 1203.

<u>La deuxième période</u> : A partir du neuvième siècle, les mathématiciens arabes s'éloignent de plus en plus de la tradition grecque. En particulier on abandonne l'usage exclusif de la règle et du compas dans les constructions géométriques.

Au début du 10^e siècle, on découvre un procédé de résolution géométrique des équations du troisième degré au moyen d'intersection de coniques.

Dans la deuxième moitié du dixième siècle, Al-Qûhî donne la construction suivante de l'heptagone régulier :



Soit à calculer le côté y de l'heptagone. Considérons le triangle ABC formé par les sommets 1 , 2 et 6 de l'heptagone. Les angles de ce triangles valent respectivement 4α , 2α , et α (voir figure ci-dessus) et les côtés AB , BC et CA mesurent respectivement y , z et x . Soit D et E les points de la droite AB tels que $BD = z$ et $AE = x$; E,A,B,D dans cet ordre. Alors, on a successivement les résultats suivants :

1) Le triangle BCD est isocèle et les angles à la base ont pour mesure α . CD passe par le troisième sommet de l'heptagone.

2) Le triangle ACE est isocèle et les angles à la base ont pour mesure 2α . CE est tangente au cercle circonscrit à l'heptagone.

3) Le triangle CEB est isocèle et $CE = z$

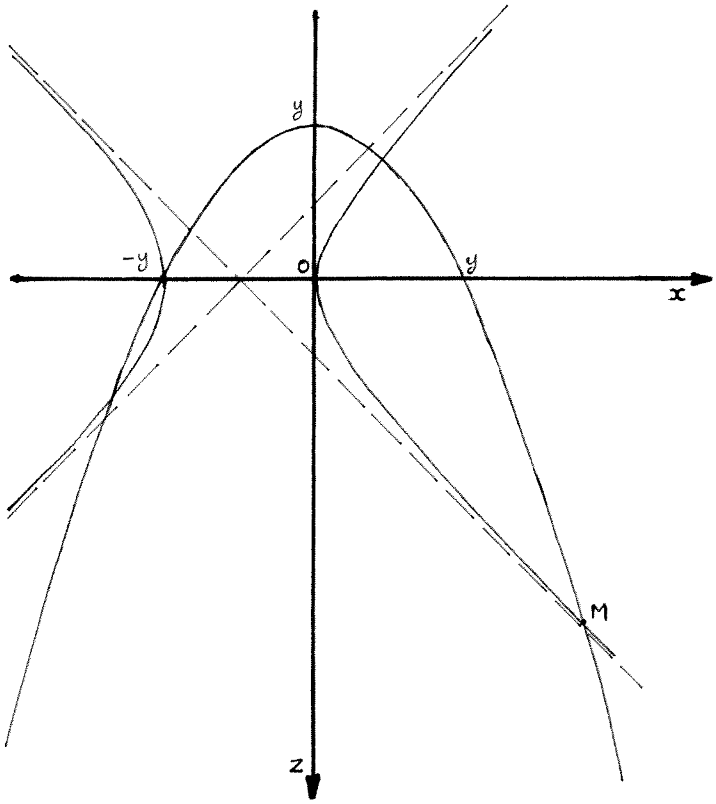
4) Les triangles CAB et DAC sont semblables et par conséquent :

$$\frac{CA}{AB} = \frac{AD}{AC} \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad x^2 = (y + z).y \qquad (1)$$

5) Les triangles CEA et BEC sont semblables et par conséquent :

$$\frac{EC}{EB} = \frac{CA}{EC} \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad z^2 = (x + y).x \qquad (2)$$

On reconnaît dans ces deux dernières équations, les représentations cartésiennes d'une parabole et d'une hyperbole en x et z , y étant considéré comme un paramètre.



Les deux coniques se coupent en 4 points, mais seul M convient car il donne des valeurs positives à x y et z. Le choix de y est arbitraire. Le triplet (x , y , z) obtenu pour le point M permet de construire un heptagone régulier et une homothétie convenable nous ramène aux dimensions voulues.

Réciproquement : Soit M le point d'intersection de coordonnées positives des deux coniques définies par les équations (1) et (2).

1) Il existe un triangle dont les côtés ont pour mesures x , y et z. En effet, d'après (1) $x^2 > y^2$ et d'après (2) $z^2 > x^2$; on a donc : $z > x > y$ et la condition d'existence du triangle s'écrit : $x + y - z > 0$ ce qui est équivalent à $(x + y)^2 - z^2 > 0$. Or en utilisant (2) on a successivement :

$$(x+y)^2 - z^2 = x^2 + y^2 + 2xy - z^2 = x^2 + y^2 + 2xy - (x^2 + xy) = y^2 + xy > 0$$

2) Le côté de mesure y est le côté de l'heptagone régulier inscrit dans le cercle circonscrit au triangle. En effet en remarquant que les sinus des angles d'un triangle sont proportionnels aux mesures des longueurs des côtés opposés, (1) et (2) s'écrivent :

$$\sin^2 B = \sin C \cdot (\sin C + \sin A) \qquad (1')$$

$$\sin^2 A = \sin B \cdot (\sin B + \sin C) \qquad (2')$$

(1') s'écrit aussi :

$$\sin^2 B - \sin^2 C = \sin A \cdot \sin C$$

soit : $(\sin B + \sin C).(\sin B - \sin C) = \sin A \cdot \sin C$

ou : $2 \sin\frac{B+C}{2} \cos\frac{B-C}{2} \cdot 2 \sin\frac{B-C}{2} \cos\frac{B+C}{2} = \sin A \cdot \sin C$

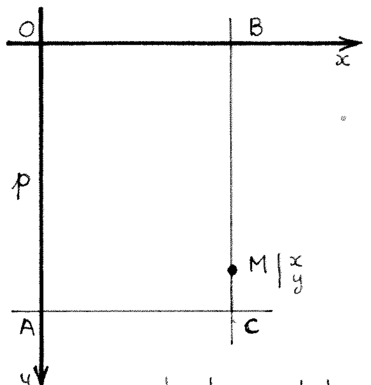
ou encore : $\sin(B+C) \cdot \sin(B-C) = \sin A \cdot \sin C$

enfin : $\sin(B-C) = \sin C$

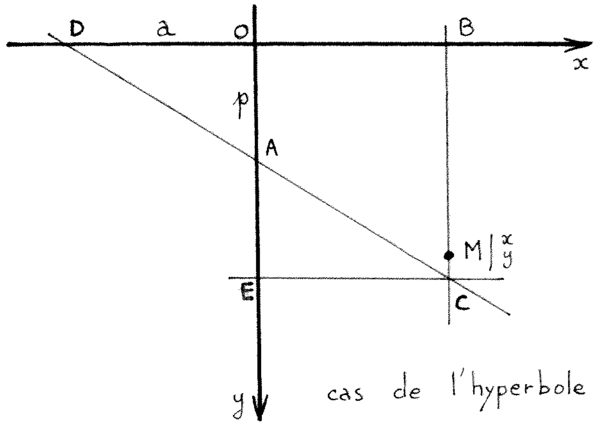
c'est-à-dire : $B-C = C$ ou bien $\underline{B = 2C}$

De manière analogue avec (2') on trouve : $\underline{A = 2B}$

d'où le résultat.



cas de la parabole



cas de l'hyperbole

Il est à noter que dans la tradition d'Appolonius, parabole et hyperbole étaient construites point par point de la façon suivante :

- Pour la parabole, soit p le paramétre, et A le point de coordonnée (o,p). Le point M (x,y) est sur la parabole si le carré de son ordonnée $y^2 = BM^2$ est égal à l'aire du rectangle OACB ; en d'autres termes si : $y^2 = px$
- Pour l'hyperbole, soit a et p deux paramétres et les points A et D de coordonnées respectives $(0,p)$ et $(-a,0)$. Soit B le point de $(0x)$ d'abcisse x, C l'intersection de BM et de DA, E la projection de C sur (oy). Le point M (x,y) est sur l'hyperbole si le carré de son ordonnée est égal à l'aire du rectangle OBCE ; en d'autres termes si : $y^2 = (p/a)\, x\, (x + a)$

On doit à Al-Qûhî la résolution de bien d'autres problèmes, comme celui de la trisection d'un angle.

A la fin du 10e siècle, on commence à traduire Diophante. On publie également une table des sinus de demi-degré en demi-degré.

Nous devons encore mentionner pour cette période Al-Bîrûnî (973 - 1048), savant d'origine iranienne. Grand voyageur, il a beaucoup appris lors de ses voyages et il émaille ses récits et ses livres d'anecdoctes permettant de mieux comprendre la vie de ses compatriotes. Il présente un grand intérêt pour l'historien, car toutes ses citations sont référencées. Dans un de ses ouvrages, il ne donne pas moins de douze méthodes de trisections d'un angle. Dans un autre écrit il calcule un nombre impressionant de décimales de par une excellente méthode ; malheureusement pour lui, il fait une faute de calcul dès le début ; néanmoins il reconnaît l'irrationnalité de .

Citons encore, pour en terminer avec cette deuxième période, Ibn al-Haytham (965 - 1039) surnomé Alhazen ou Hazin et qui dût se faire passer pour fou pour avoir prétendu trop fortement et à tort qu'il pourrait régler le débit du Nil. On lui doit une compilation importante de manuscrits ainsi, entre autres, qu'un traité d'optique où il étudie les miroirs sphériques, cylindriques et à section conique.

<u>La troisième période</u> : C'est l'apogé de la culture scientifique arabe.

'Umar al-Khayyâm (1048-1132) est le premier à distinguer entre algèbre et géométrie. Il développe la théorie générale des équations du troisième degré en les classant en 25 types. (rappelons-nous que les nombres négatifs n'étaient toujours pas transcrit à cette époque). Il cherche à les résoudre et en résoud effectivement 14 types au moyen de section conique. Bien sûr, il ne s'intéresse qu'aux racines positives de ces équations. Il disserte sur les fondement des mathématiques, reprenant les postulats d'Euclide dont il étudiera longuement le cinquième (unicité de la parallèle). C'est lui qui crée les coordonnées rectangulaires, ou plus exactement qui utilise pour la première fois un même système cartésien pour étudier plusieurs équations. (Là encore, Descartes et l'Europe n'ont fait que copier la tradition arabe).

Au 13^{e} siècle Nasir-ed-dîn de Tus (1201 - 1274) créera la trigonométrie comme science indépendante. C'est de son oeuvre que s'inspirera Regiomontanus (1436 - 1475) quand il écrira son traité de trigonométrie, publié en 1533, introduisant en Europe le terme de sinus qui sera repris par Viète (1540 - 1603). On doit aussi à Nasir-ed-dîn de Tus le théorème dit de Lahire (si un cercle de rayon 1/2 roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon 1, tout point du petit cercle décrit un diamètre du grand). Ce mathématicien arabe fit également de nombreuses recherches historiques et écrivit un ouvrage didactique : "Les livres moyens" qui venaient dans l'étude des mathématiques après Euclide et avant l'Almageste considéré comme le summum.

Après cette période faste, l'influence arabe sur l'Europe scientifique diminuera. La division de l'empire entraînant un apauvrissement relatif des gouvernements et par suite une diminution du mécénat envers les savants.

D'ailleurs à partir du 13^{e} siècle, l'Europe développe elle même ses mathématiques. On peut toutefois noter un bref renouveau de la mathématique arabe au 15^{e} siècle.

Conférence de Mme Dold
Mardi 20 Mai 1975
d'après les notes de :
H. Silvestre & J. Lefort