RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE

On trouvera ci-après les sujets et corrigés du Rallye mathématique d'Alsace au rapport technique duquel on se reportera pour avoir plus de détails et de renseignements sur l'analyse des copies. (le demander à l'I.R.E.M.)
Ce rallye s'adresse à des élèves de première ou de terminale qui peuvent éventuellement se grouper en binômes. Il y a eu cette année 332 candidats se répartissant ainsi :

Classe de Première :	83 binômes et 13 individuels
Classe de Terminale :	70 binômes et 13 individuels

Le jury a donc eu à examiner 179 copies.

CLASSE DE PREMIERE

Premier problème :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\sqrt{x + 4 - 4\sqrt{x}} + \sqrt{x + 9 - 6\sqrt{x}} = 1$$

+++
++
+

Deuxième problème :

Une usine textile stocke de la moquette par rouleaux. Les bandes de moquette sont enroulées sur des cylindres en bois de 20 cm de diamètre. L'épaisseur de la moquette est 1 cm. Donner (en cm) un encadrement de la longueur d'une bande de moquette pour que le rayon du rouleau correspondant soit 50 cm à 0,5 cm près : on indiquera l'erreur maximum que l'on peut se permettre en mesurant la longueur de la bande.

+++
++
+

Troisième problème :

(Ce problème concerne un plan affine euclidien).

On donne quatre points du plan, non cocycliques et tels que toute droite contienne au plus deux de ces quatre points.

Trouver les cercles équidistants de ces quatre points.

(La distance d'un cercle Γ à un point A est la plus courte des longueurs AM lorsque M parcourt Γ).

+++
++
+

CLASSE TERMINALE

Premier problème :

Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}^*$ l'équation :

$$1 + \cos^2 ax = \cos 2\pi x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

admet-elle une infinité de solutions ?

+++
++
+

Deuxième problème :

Démontrer que, parmi sept entiers non nuls consécutifs, il en existe toujours au moins un qui est premier avec chacun des six autres.

+++
++
+

Troisième problème :

(Ce problème concerne l'espace affine euclidien usuel de dimension trois).

Soit A et B deux points d'une sphère dont D_1 et D_2 sont deux diamètres distincts.

Imaginer un cas de figure où il n'est pas possible de passer de A à B par deux rotations seulement, l'une d'axe D_1, l'autre d'axe D_2.

Montrer que l'on peut passer de A à B par une suite finie de rotations effectuées alternativement autour de D_1 et D_2.

(Autrement dit : montrer qu'il existe des points $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$ tels que pour tout i, on passe de A_i à A_{i+1} par une rotation convenable d'axe D_1 ou D_2).

+++
++
+

CORRIGE DES EXERCICES PROPOSES

Une solution des problèmes du Rallye Mathématique 1975 paraîtra dans le "Petit Archimède", au cours de l'année scolaire 1975-76.

Voici quelques brèves indications générales :

Classe de Première :

- Premier problème :

  Il faut mettre l'équation proposée sous la forme :

  $$|\sqrt{x} - 2| + |\sqrt{x} - 3| = 1 \; ;$$

  l'analyse des cas montre alors que l'ensemble des solutions est l'intervalle $[4,9]$.

- Deuxième problème :(moquette)

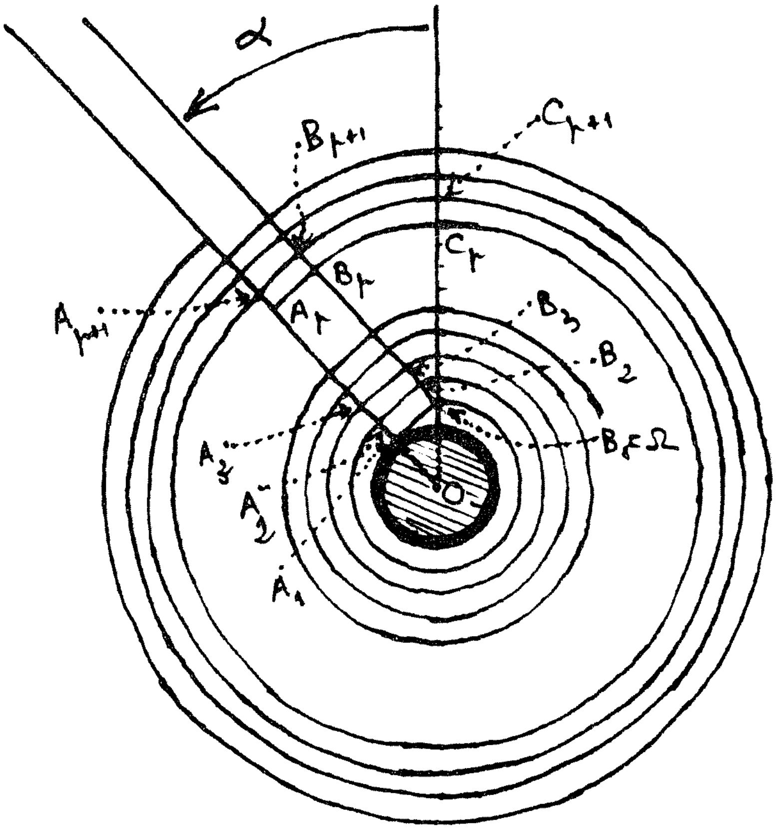
  Deux modèles mathématiques sont possibles :

  a) Empiler des cylindres d'épaisseur 1 cm ; on se ramène alors à calculer la somme d'une certaine progression arithmétique.

  b) Le modèle suivant, qui tient compte du mécanisme d'enroulement, (voir figure page suivante) :

Les hachures représentent le cylindre de bois ; les portions $A_1B_1, \ldots\ldots, A_pB_p$ sont rectilignes. Les arcs de cercles $\overset{\frown}{B_1C_1}, \ldots, \overset{\frown}{B_pC_p}$, ont pour centre Ω. Les arcs de cercle $\overset{\frown}{\Omega A_2}, \ldots, \overset{\frown}{C_pA_{p+1}}$ ont pour centre O. L'angle α vaut environ 25 degrés.

(N.B : Ce modèle a été imaginé par deux binômes, qui ont calculé l'angle α correctement).



Cependant, la différence des longueurs de moquette trouvées dans les modèles a) et b) est négligeable devant l'erreur que l'on peut se permettre sur cette longueur, (comme l'ont indiqué les copies citées).

- Troisième problème :

Une analyse de la question montre que si les points sont "en position générale", il y a sept solutions évidentes :
Soit O le centre d'un cercle Γ passant par trois des points et R_1 le rayon de Γ ; soit R_2 la distance de O au point restant : le cercle C de centre O et de rayon $R = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ convient.

On obtient ainsi quatre cercles solutions. Soit ω le point commun (il existe en général) aux médiatrices de deux segments $[A_1, B_1]$, $[A_2, B_2]$ obtenus en groupant les 4 points donnés deux par deux ; si $r_1 = \omega A_1$ et $r_2 = \omega A_2$, le cercle de centre ω et de rayon $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ convient ; on obtient ainsi trois autres cercles solutions.
On montre que tout cercle solution est nécessairement l'un de ceux-là. D'où en général 7 cercles colutions. Les cas d'exception sont :

- Le trapèze non isocèle et non parallélogramme (six solutions)
- Le parallélogramme (cinq solutions).

Classe de Terminale :

- Premier problème :

Avant de se lancer dans des calculs échevelés, on peut remarquer que les deux membres doivent être égaux à 1. Il faut alors voir que l'équation admet une infinité de solutions si et seulement si elle en admet au moins une.

Un raisonnement d'arithmétique montre alors que les valeurs de a qui conviennent sont les

$$\frac{\pi(2k+1)}{2k'} \quad \text{où } (k,k') \text{ parcourt } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$$

(N.B : très peu de candidats ont donné et justifié le résultat complet).

- Deuxième problème :

Tout revient à voir que parmi ces sept entiers, il en existe au moins un qui n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

Soit $(n + k)$ $k \in [\![0,6]\!]$ ces sept entiers. Traitons le cas où n est pair (le cas où n est impair se traite de même).

Alors $n + 1$, $n + 3$ et $n + 5$ sont impairs ; parmi ces trois nombres, deux au moins sont non divisibles par 3, soit p et q ; on a donc (si $p < q$), $q - p = 2$ ou 4, et p et q impairs : il en résulte que l'un au moins de ces nombres est non divisible par 5. D'où le résultat.

- Troisième problème :

Ce problème était difficile, largement du niveau des Olympiades Internationales. (Aucun candidat n'a donné de démonstration, mais quelques-uns ont bien compris la situation).

Soit $\{A_1, B_1\}$ et $\{A_2, B_2\}$ les intersections respectives de D_1 et D_2 avec la sphère.

Voici quelques idées qu'il s'agit de justifier :

- Il suffit de résoudre la question lorsque $A = A_1$

- En faisant tourner A_1 autour de D_2, on obtient un cercle Γ_1.

En faisant tourner Γ_1 autour de D_1, on obtient une calotte sphérique C_1 de centre A_1. En faisant tourner C_1 autour de D_2, on obtient une calotte sphérique C'_1 de centre A_2.

Par récurrence, on définit des calottes sphériques C_n de centre A_1 et C'_n de centre $A_2 (n \geq 1)$ telles que pour $n \geq 1$, C'_n s'obtient en faisant tourner C_n autour de D_2, et pour $n \geq 2$, C_n s'obtient en faisant tourner C'_{n-1} autour de D_1.

Les méridiennes des calottes successives sont des arcs, dont la mesure augmente du double de l'angle des droites D_1 et D_2 à chaque pas. Cela permet de justifier que C_n est la sphère entière pour n assez grand.

L'OUVERT est et doit rester le journal des professeurs de mathématiques de l'académie. L'OUVERT ne peut donc exister que si ces professeurs lui donne vie, c'est-à-dire fournissent son contenu. Vous qui avez essayé telle ou telle chose dans votre classe, que l'expérience ait réussie ou échoué, faites nous en part. L'OUVERT se veut aussi un lieu d'échange ; posez des questions, des collègues y répondront.

Le numéro 9 de l'OUVERT, dont la parution est prévue pour le mois de Mai 1976, contiendra des articles sur l'oeuvre de Piaget. Nous espérons que des collègues déjà bien informés, pourront nous en fournir d'autres : Bibliographie, biographie, résumés d'ouvrage, ... Ecrivez-nous sans plus attendre :

Jean Lefort, 27 route de Neuf-Brisach, 68000 Colmar.

L' OUVERT : responsable de la publication : J. Lefort, 27 route de Neuf-Brisach, 68000 Colmar. Impression : I.R.E.M. de Strasbourg, rue du général Zimmer, 67000 Strasbourg.