Compte rendu de la conférence du 4 décembre 1974 :
"Solutions périodiques de certaines équations différentielles" .

conférencier: Monsieur Bruno Schmitt, maître de conférence à l'université de Metz.

documents audio-visuels réalisés et présentés par monsieur Georges Ricco de l'université de Marseille II.

A. Deux interprétations physiques de l'équation différentielle de Duffing:

$$x'' + 2x^3 = \lambda \cos t \quad \text{(I)}$$

1°. Le mouvement d'un point matériel de masse unité qui se déplace sur une droite D et qui est attiré par un point fixe O de cette droite selon une force d'intensité $f(x) = 2x^3$ où x désigne l'abscisse du point, s'obtient en intégrant l'équation différentielle $x'' + 2x^3 = 0$; si en plus le point est soumis à une force dont la composante sur D a pour intensité $\lambda \cos t$ (λ constante réelle), le mouvement s'obtient en intégrant l'équation de Duffing (I).

2°. Dans (I) posons $x' = y$, alors $y' = -2x^3 + \lambda \cos t$; imaginons un plan d'eau horizontal muni d'un repère, la molécule d'eau de coordonnées (x,y) a pour vitesse le vecteur de coordonnées (x',y'). A chaque instant t on obtient un champ de vecteur vitesse, c'est d'ailleurs le même aux instants t_0 et $t_0+2\pi$ et son évolution dans l'intervalle $(t_0,t_0+2\pi)$est la même que dans l'intervalle $(t_0+2\pi, t_0+4\pi)$. Une solution de l'équation (I)est représentée dans le plan $(x;y)$ par la trajectoire d'une boulette de papier qu'on laisse tomber en un point (x_0,y_0)avec une certaine vitesse à un instant donné.

B. Etat des connaissances.

Très peu de résultats sont connus en ce qui concerne le comportement des équations à coefficients périodiques, même pour des équations d'apparence aussi anodine que l'équation de Duffing (I); supposons par exemple $-10 \leqslant x \leqslant 10$ et $-10 \leqslant y \leqslant 10$ l'intégration numérique avec ordinateur ne permet pas de répondre à la question: "à quel endroit et à quel instant doit-on lancer la boulette pour qu'elle ne sorte pas du cadre fixé?"

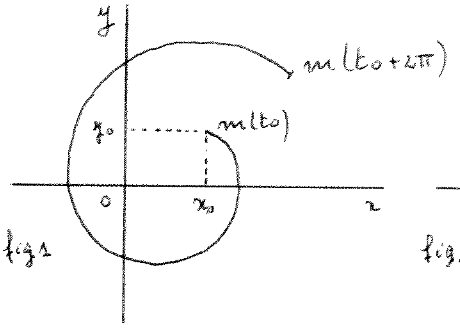
La recherche des conditions initiales pour que le mouvement soit périodique est un problème difficile, on peut chercher à le résoudre par tâtonnement avec un ordinateur mais l'à-peu-près obtenu n'est pas suffisant.

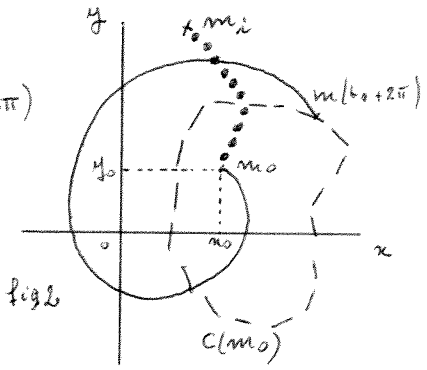
Morris en 1955 prouve que toutes les trajectoires coupent au moins une fois l'axe des abscisses $(y = 0)$, donc en particulier les trajectoires périodiques.

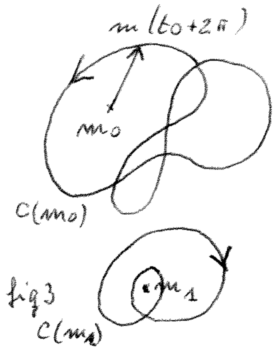
Césari en I963 montre que pour λ = 0,7 il existe dans le voisinage du point (I,I;0) une solution périodique à partir de t=0.

C. Méthode de l'index pour localiser les solutions périodiques. de période 2π.
(d'après un document de H. Seifert publié en I950).

Lançons la boulette à partir du point de coordonnées (x_0,y_0) à l'instant t_0 et notons $m(t)$ la position occupée par cette boulette à l'instant t. Si $m(t_0+2\pi) \neq m(t_0)$, lasolution n'est certainement pas périodique. (période 2π).







(figure I);si $m(t_0+2\pi) = m(t_0)$ alors les conditions initiales (position et vitesse) étant les mêmes aux instants t_0 et $t_0+2\pi$, le mouvement est périodique. Larecherche des solutions périodiques revient donc à déterminer les triplets (x_0,y_0,t_0) tels que $m(t_0+2\pi) = m(t_0)$; la méthode consiste à considérer pour m_0 donné de coordonnées (x_0,y_0) l'ensemble des points $m(t_0+2\pi)$ obtenus en faisant varier t_0: $0 \leq t_0 \leq 2\pi$ et $m_0 = m(t_0)$. La courbe obtenue (en tirets sur la figure 2) est l'indicatrice $c(m_0)$ associée à m_0; c'est une courbe continue fermée qui passe par le point m_0 si et seulement si une solution de période 2π est issue de ce point.

Supposons que l'indicatrice $c(m_0)$ associée à m_0 ne passe pas par m_0 et considérons un point m_i du plan tel que m_0 et m_i soient dans deux régions différentes délimitées par $c(m_0)$; si on imagine un point m variant continûment sur une courbe de m_0 à m_i, les déformations de l'indicatrice associée à m étant continues, il y a un moment où le point m se trouve sur son indicatrice, autrement dit sur n'importe quelle courbe joignant m_0 à m_i il y aura un point duquel part une solution périodique.

Index de Seifert: l'indicatrice $c(m_0)$ associée à m_0 étant paramétrée par t_0, l'index $i(m_0)$ est le nombre algébrique de tours que l'indicatrice $c(m_0)$ effectue autour du point m_0 (c'est à dire le nombre de tours effectués par le vecteur $\overrightarrow{m_0m(t_0+2\pi)}$) quand t_0 décrit l'intervalle $(0,2\pi)$. Sur la figure 3 on a: $i(m_0) = +I$ et $i(m_I) = -2$, puisque $i(m_0) \neq i(m_I)$, tout chemin continu qui joint m_0 et m_I contient au moins un point duquel est issu une solution périodique de période 2π ; comme les index sont aisément calculables à l'aide d'un ordinateur, on obtient ainsi une méthode simple de localisation des solutions périodiques.