Addition et multiplication des fonctions polynômes à une variable

Le texte ci-dessous traite d'une certaine manière de calculer les additions et les multiplications des fonctions polynômes et de quelques applications (problèmes de B.E.P.C. ou autre).

J'ai pratiqué cette méthode dans deux classes de troisième où j'ai obtenu d'excellents résultats : calcul beaucoup plus rapide des produits de polynômes et risque d'erreurs très réduit.

Nous n'opérons que sur des fonctions polynômes ordonnés dans le sens des puissances croissantes.

I- LA LISTE DES COEFFICIENTS DE LA FONCTION POLYNOME

Soit $A(x)$ la fonction polynôme telle que :

$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_7x^7$

(a_0 est le coefficient de la fonction monôme a_0x^0 ; a_p est le coefficient de la fonction monôme a_px^p ; l'indice du coefficient a étant égal au degré de la fonction monôme correspondante.)

Une autre écriture de $A(x)$ qui fait apparaître tous les monômes depuis celui de degré 0 jusqu'à celui de degré le plus grand est :

$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + 0x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + 0x^6 + a_7x^7$

La liste des coefficients de $A(x)$ notée C_A est l'ensemble ordonné tel que :

$C_A = (a_0 , a_1 , a_2 , 0 , a_4 , a_5 , 0 , a_7)$

Remarque : Si une fonction polynôme P est de degré n, sa liste C_P a $(n+1)$ éléments.

II- ADDITION DES FONCTIONS POLYNOMES

Soient les trois fonctions polynômes telles que :

$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_8x^8$

$B(x) = b_0 + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_6x^6 + b_8x^8$

$C(x) = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_7x^7$

Nous avons les listes correspondantes C_A , C_B , C_C :

$C_A = (a_0 , a_1 , a_2 , 0 , 0 , a_5 , a_6 , 0 , a_8)$
$C_B = (b_0 , 0 , b_2 , b_3 , b_4 , 0 , b_6 , 0 , b_8)$
$C_C = (0 , c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , c_5 , 0 , c_7 , 0)$

Soit $S(x) = A(x) + B(x) + C(x)$; déterminons C_S :

Disposition pratique de l'opération somme :

C_A	a_0	a_1	a_2	0	0	a_5	a_6	0	a_8
C_B	b_0	0	b_2	b_3	b_4	0	b_6	0	b_8
C_C	0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	0	c_7	0
C_S	$a_0 + b_0$	$a_1 + c_1$	$a_2 + b_2 + c_2$	$b_3 + c_3$	$b_4 + c_4$	$a_5 + c_5$	$a_6 + b_6$	c_7	$a_8 + b_8$

La fonction polynôme associée à la liste C_S est :

$$S(x) = (a_0 +b_0) + (a_1+c_1)x + (a_2+b_2+c_2)x^2 + (b_3+c_3)x^3 + (b_4+c_4)x^4 + (a_5+c_5)x^5 + (a_6+b_6)x^6 + c_7x^7 + (a_8 +b_8)x^8$$

III- MULTIPLICATION D'UNE FONCTION POLYNOME PAR UNE FONCTION MONOME

Soit la fonction polynôme $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_4x^4$; on a $C_A = (a_0 , a_1 , a_2 , 0 , a_4)$.

Soient $b_0 , b_1 , b_2 , b_3 , b_m$ des réels quelconques et soient les fonctions monômes

$B_0(x) = b_0$	degré 0
$B_1(x) = b_1x$	degré 1
$B_2(x) = b_2x^2$	degré 2
$B_3(x) = b_3x^3$	degré 3
$B_m(x) = b_mx^m$	degré m

1) Soit $\underline{P_0(x) = B_0(x) \times A(x) = b_0 \times A(x)}$

On a $P_0(x) = b_oa_o + b_oa_1\ x + b_oa_2\ x^2 + b_oa_4\ x^4$

$$C_{P_o} = (b_oa_o , b_oa_1 , b_oa_2 , 0 , b_oa_4)$$

La liste des éléments de P_o a autant d'éléments que celle de A. Ses éléments sont les produits de b_o par les éléments correspondants de C_A.

2) Soit $\underline{P_1(x) = B_1(x) \times A(x) = b_1 x \times A(x)}$

On a $P_1(x) = b_1 a_o\, x + b_1 a_1\, x^2 + b_1 a_2\, x^3 + b_1 a_4\, x^5$

$C_{P_1} = (0 , b_1 a_o , b_1 a_1 , b_1 a_2 , 0 , b_1 a_4)$

La liste des éléments de P_1 a un élément de plus que celle de A , le premier élément étant nul, les usivants étant les produits de b_1 par les éléments de C_A.

3) Soit $\underline{P_2(x) = B_2(x) \times A(x) = b_2 x^2 \times A(x)}$

On a $P_2(x) = b_2 a_o\, x^2 + b_2 a_1\, x^3 + b_2 a_2\, x^4 + b_2 a_4\, x^6$

$C_{P_2} = (0 , 0 , b_2 a_o , b_2 a_1 , b_2 a_2 , 0 , b_2 a_4)$

La liste des éléments de P_2 a deux éléments de plus que celle de A , les 2 premiersétant nuls, les autres étant les produits de b_2 par les éléments de C_A.

4) Soit $\underline{P_3(x) = B_3(x) \times A(x) = b_3 x^3 \times A(x)}$

On a $C_{P_3} = (0 , 0 , 0 , b_3 a_o , b_3 a_1 , b_3 a_2 , 0 , b_3 a_4)$

La liste des éléments de P_3 a trois éléments de plus que celle de A , les 3 premiers étant nuls, les autres étant les produits de b_3 par les éléments de C_A.

5) Soit $\underline{P_m(x) = B_m(x) \times A(x) = b_m x^m \times A(x)}$

On a $C_{P_m} = (0 , 0 , 0 , \ldots\ldots , b_m a_o , b_m a_1 , b_m a_2 , 0 , b_m a_4)$

La liste des éléments de P_m a m éléments de plus que celle de A , les m premiers étant nuls, les autres étant les produits de b_m par les éléments de C_A .

6) Soit $\underline{p(x) = 0 \times A(x)}$

$C_p = (0 , 0 , 0 , 0 , 0)$ ou plus simplement $C_p = (0)$.

IV - MULTIPLICATION DE DEUX FONCTIONS POLYNOMES

Soient $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_4 x^4$

$B(x) = b_0 + b_1 x + b_3 x^3 + b_5 x^5$

On a $C_A = (a_0 , a_1 , a_2 , 0 , a_4)$

$C_B = (b_0 , b_1 , 0 , b_3 , 0 , b_5)$

On a $A(x) \times B(x) = P(x)$

$P(x) = b_0 A(x) + b_1 x . A(x) + 0.A(x) + b_3 x^3 . A(x) + 0.A(x) + b_5 x^5 . A(x)$

Disposition pratique de la multiplication :

$C_B \backslash C_A$	a_0	a_1	a_2	0	a_4					
b_0	b_0a_0	b_0a_1	b_0a_2	0	b_0a_4					
b_1	0	b_1a_0	b_1a_1	b_1a_2	0	b_1a_4				
0	0	0								
b_3	0	0	0	b_3a_0	b_3a_1	b_3a_2	0	b_3a_4		
0	0	0	0	0						
b_5	0	0	0	0	0	b_5a_0	b_5a_1	b_5a_2	0	b_5a_4
C_P	b_0a_0	$b_0a_1 + b_1a_0$	$b_0a_2 + b_1a_1$	$b_1a_2 + b_3a_0$	$b_0a_4 + b_3a_1$	$b_1a_4 + b_3a_2 + b_5a_0$	b_5a_1	$b_3a_4 + b_5a_2$	0	b_5a_4

$$P(x) = b_oa_o + (b_oa_1 + b_1a_o)x + (b_oa_2 + b_1a_1)x^2 + (b_1a_2 + b_3a_0)x^3 + (b_0a_4 + b_3a_1)x^4$$
$$(b_1a_4 + b_3a_2 + b_5a_0)x^5 + (b_5a_1)x^6 + (b_3a_4 + b_5a_2)x^7 + (b_5a_4)x^9$$

Explication de la disposition : On dispose C_A en haut, horizontalement ; on dispose C_B à gauche, verticalement. On écrit les premiers 0 du produit (escalier aux marches en tireté) ; on écrit les autres coefficients. On effectue la somme des coefficients de chaque colonne pour obtenir la liste du polynôme produit $P(x)$.

V- EXEMPLE DE CALCUL DU PRODUIT DE DEUX FONCTIONS POLYNOMES

Soit $f(x) = 2 + 3x - 5x^3 + x^4 - 9x^5$; calculons $(f(x))^2$:

$C_f \backslash C_f$	2	3	0	-5	1	-9					
2	4	6	0	-10	2	-18					
3	0	6	9	0	-15	3	-27				
0	0	0									
-5	0	0	0	-10	-15	0	25	-5	45		
1	0	0	0	0	2	3	0	-5	1	-9	
-9	0	0	0	0	0	-18	-27	0	45	-9	81
C_f2	4	12	9	-20	-24	-30	-29	-10	91	-18	81

$(f(x))^2 = 4 + 12x + 9x^2 - 20x^3 - 26x^4 - 30x^5 - 29x^6 - 10x^7 + 91x^8 - 18x^9 + 81x^{10}$

VI- FACTORISATION D' UN TRINOME DU DEUXIEME DEGRE (sujet de B.E.P.C.)

Soit $p(x) = (2x+3)^2 - (7-5x)(6+4x) + 18 - 8x^2$

1º) Développer, réduire et ordonner $p(x)$.

2º) Factoriser $p(x)$.

1º) $p(x) = -15 + 14x + 16x^2$

2º) Si la factorisation de $p(x)$ est possible, alors l'un des facteurs, binôme du premier degré est $(2x+3)$. Cherchons le deuxième facteur sous la forme $(ax+b)$:

On a : $p_1(x) \text{ X } p_2(x) = p(x)$

avec : $p_1(x) = 3 + 2x$ et $C_{p_1} = (3, 2)$

$p_2(x) = b + ax$ et $C_{p_2} = (b, a)$

$C_p = (-15, 14, 16)$

C_{p_2} \ C_{p_1}	3	2	
b	3 b	2 b	
a	0	3 a	2 a
C_p	3 b = -15	(2b+3a) = 14	2 a = 16

Donc $p(x) = (3 + 2x)(-5 + 8x)$

VII- DETERMINER LA FONCTION POLYNOME B(x) TELLE QUE A(x).B(x) = P(x)

$A(x) = 2 + 3x + 5x^2$

$P(x) = 14 + 23x + 46x^2 + 29x^3 + 56x^4 + 57x^5 + 45x^6$

$A(x)$ est de degré deux, $P(x)$ est de degré six, donc $B(x)$ sera de degré quatre. Soit $B(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$.

On a : $C_A = (2, 3, 5)$

$C_B = (a, b, c, d, e)$

$C_P = (14, 23, 46, 29, 56, 57, 45)$

$C_A \backslash C_B$	a	b	c	d	e		
2	2 a	2 b	2 c	2 d	2 e		
3	0	3 a	3 b	3 c	3 d	3 e	
5	0	0	5 a	5 b	5 c	5 d	5 e
C_p	14	23	46	29	56	57	45

Ce qui donne le système suivant :

$$\left.\begin{array}{rcl} 2a & = & 14 \\ 2b + 3a & = & 23 \\ 2c + 3b + 5a & = & 46 \\ 2d + 3c + 5b & = & 29 \\ 2e + 3d + 5c & = & 56 \\ 3e + 5d & = & 57 \\ 5e & = & 45 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 7 \\ b & = & 1 \\ c & = & 4 \\ d & = & 6 \\ e & = & 9 \end{array}\right.$$

D'où $C_B = (7, 1, 4, 6, 9)$

$$B(x) = 7 + x + 4x^2 + 6x^3 + 9x^4$$

Lucien HAEGELIN, professeur
au C.E.G. d'Orbey.