Le jeu de Nim

Le jeu de Nim est souvent connu en France sous le nom de jeu de Marienbad, depuis le film "l'année dernière à Marienbad" où l'on y voit un joueur acharné. [*]

D'une façon générale le jeu de Nim se joue comme suit :

Un nombre quelconque d'allumettes sont mises en plusieurs tas, le nombre des tas et celui des allumettes dans chaque tas étant arbitraire. On joue à deux : A et B . Le premier joueur A prend un nombre quelconque d'allumettes dans un tas ; il peut n'en prendre qu'une, ou un nombre quelconque jusqu'à la totalité du tas, mais il ne doit toucher qu'à un seul tas. B alors joue de la même façon et les joueurs continuent à tour de rôle. Le joueur qui prend la dernière allumette gagne.

Il existe une théorie mathématique précise du jeu, et l'un ou l'autre des joueurs peut toujours s'arranger pour gagner.

On définit une position _gagnante_ comme une position telle que si l'un des joueurs J (A ou B) y arrive par son jeu laissant son adversaire K (B ou A) jouer ensuite, alors, quoique fasse K , J peut jouer de façon à gagner. Toute autre position sera appelée position _perdante_.

Par exemple, la position ../.. ou (2,2) est une position gagnante. Si A laisse cette position à B , B doit prendre une des allumettes d'un tas ou les deux. Si B en prend deux, A prendra les deux restantes ; si B en prend une, A en prendra une dans l'autre tas ; dans les deux cas A gagne. De la même façon le lecteur vérifiera aisément que ./../... ou (1,2,3) est une position gagnante.

On définit ensuite une position _correcte_. Pour cela, on exprime le nombre d'allumettes de chaque tas dans le système binaire et on forme le tableau T en les écrivant les uns au dessous des autres. Ainsi (2,2) , (1,2,3) et (2,3,6,7) donnent les tableaux :

$$\begin{array}{c} 10 \\ 10 \\ \hline 20 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 01 \\ 10 \\ 11 \\ \hline 22 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 010 \\ 011 \\ 110 \\ 111 \\ \hline 242 \end{array}$$

---

[*] Il s'agit toutefois d'une variante du jeu expliqué ici. Voir à ce propos le dernier paragraphe de l'article.

Il est plus agréable d'écrire, 01 , 010 ,... pour 1 , 10 ,... afin d'égaliser le nombre de chiffres de chaque ligne. Ensuite on additionne les colonnes comme indiqué dans le tableau (sans faire de retenues). Si la somme de chaque colonne est paire (comme dans les exemples ci-dessus) la position est dite correcte. Dans le cas contraire, la position est dite incorrecte. Ainsi (1,3,4) est incorrecte.

Théorème : Une position du jeu de Nim est une position gagnante si et seulement si c'est une position correcte.

1) Considérons d'abord le cas particulier dans lequel aucun tas ne contient plus d'une allumette. Il est évident que la position est gagnante si le nombre d'allumettes laissées est pair et perdante s'il est impair ; et les mêmes conditions définissent les positions correctes et incorrectes.

2) Supposons que J doive jouer à partir d'une position correcte. Il doit remplacer un nombre définissant une ligne de T par un nombre plus petit. Si on remplace un nombre quelconque écrit dans le système binaire, par un nombre plus petit, on change la parité d'au moins un de ses chiffres. Par conséquent, si J joue à partir d'une position correcte, il la transformera nécessairement en une position incorrecte.

3) Si une position est incorrecte, alors la somme d'au moins une colonne de T est impaire. Supposons pour fixer les idées que les sommes soient :

paire, paire, impaire, paire, impaire, paire.

Alors il y a au moins un 1 dans la troisième colonne, (la première ayant une somme impaire). Supposons (à nouveau pour fixer les idées) qu'une ligne dans laquelle cela se produit soit :

$$0\ 1\ \overset{*}{1}\ 1\ \overset{*}{0}\ 1$$

les astérisques indiquant que les nombres en dessous appartiennent à une colonne dont la somme est impaire. On peut remplacer ce nombre par le nombre plus petit :

$$0\ 1\ \overset{*}{0}\ 1\ \overset{*}{1}\ 1$$

dans lequel les chiffres sous astérisques et ceux-là seulement ont été changés. Effectivement, cette modification correspond à un jeu possible et rend la somme de chaque colonne paire. Cette démonstration s'étend sans peine au cas général. Finalement J s'il se trouve devant une position incorrecte peut toujours la transformer en une position correcte.

4) Si A laisse une position correcte à B , ce dernier est obligé de la transformer en une position incorrecte, et A peut alors jouer pour retrouver une position correcte. Ce processus continuera jusqu'à ce que chaque tas soit éliminé

ou qu'il ne contienne plus qu'une seule allumette. Le théorème est ainsi ramené au cas particulier déjà démontré.

La fin du jeu est maintenant claire. En général, la position initiale est incorrecte et le premier joueur gagne s'il joue soigneusement, mais il perd si la position initiale est correcte et que le deuxième joueur joue soigneusement.*

Il existe une variante dans laquelle le joueur qui prend la dernière allumette <u>perd</u>. La théorie est la même aussi longtemps qu'il reste un tas contenant plus d'une allumette. Ainsi (2,2) et (1,2,3) sont encore des positions gagnantes. Le lecteur réfléchira lui-même aux petites variations de tactique à apporter à la fin du jeu.

Extrait de "An introduction to the theory of numbers" par Hardy et Wright
Traduction de J. Lefort.

---

* Quand on joue contre un adversaire qui ne connaît pas la théorie du jeu, on n'a pas besoin de jouer strictement suivant la règle. Le joueur expérimenté peut jouer au hasard jusqu'à ce qu'il reconnaisse une position gagnante d'un type relativement simple. Il est facile de savoir que :

$$(1,2n,2n+1) \quad , \quad (n,7-n,7) \quad , \quad (2,3,4,5)$$

sont des positions gagnantes ; que $(1,2n+1,2n+2)$ est une position perdante et que la combinaison de deux positions gagnantes est une position gagnante.

La façon de gagner n'est pas toujours unique. La seule façon de rendre correcte la position incorrecte (1,3,9,27) est d'ôter 16 de 27. La position (3,5,7,8,11) est aussi incorrecte, mais on peut la rendre correcte en ôtant 2 de 3, de 7 ou de 11.