LE SYSTEME BINAIRE RÉFLÉCHI

Jean LEFORT

Introduction

On connaît les diagrammes en feuille de trèfle, comme celui ci-dessous, qui permettent les raisonnements ensemblistes quand le nombre d'ensembles ne dépasse pas trois. Ce diagramme envisage effectivement les huit cas possibles suivant l'appartenance ou la non appartenance d'un élément aux ensembles *A* , *B* ou *C*. A partir de quatre ensembles malheureusement, ce diagramme n'est guère lisible ; (cf. fig. 2). Il est cependant possible, comme l'a déjà proposé VENN, de faire des dessins assez lisibles dans le cas de quatre ou cinq ensembles (cf. fig. 3 et 4) en considérant cependant dans ce dernier cas que la petite ellipse centrale est extérieure à *C*.

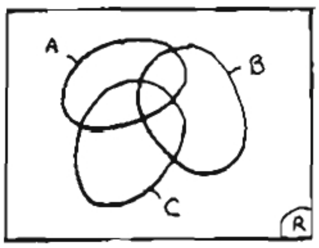

fig. 1

fig. 2

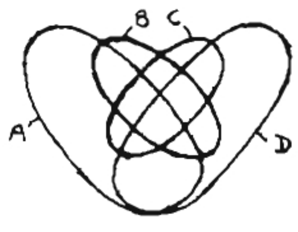

fig. 3

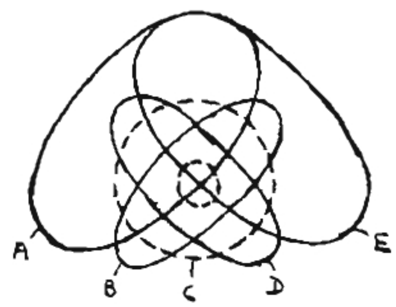

fig. 4

Mais VENN lui-même reconnaît que ce n'est pas très simple et de toute façon on est vite limité par le nombre d'ensembles ; c'est l'objet du paragraphe suivant que de donner une méthode de construction de diagrammes pour un nombre quelconque d'ensembles ; ce sont les diagrammes de VEITCH-KARNAUGH.

Diagrammes de VEITCH-KARNAUGH

Considérons les trois diagrammes ci-dessous (fig. 5, 6 et 7). Ils représentent respectivement des diagrammes de VEITCH pour trois, quatre et cinq ensembles. On comprend aisément comment ils sont générés et comment on peut construire un tel diagramme pour un nombre quelconque d'ensembles. Chaque petit carreau représente ce qu'on appelle un minterme (On choisit un terme dans tous les couples $\left(X,\overline{X}\right)$ et on en fait l'intersection). Il est clair qu'il y a 2^n mintermes où n est le nombre d'ensembles. Par exemple, sur la figure 7, le minterme noirci représente le sous-ensemble $\overline{A}\cap B\cap C\cap\overline{D}\cap E$. En respectant l'ordre alphabétique, par exemple, il est alors facile de numéroter les mintermes. Dans un diagramme à quatre ensembles le minterme $\overline{A} \cap B \cap C \cap \overline{D}$ portera le numéro 0110, (on met des 1 pour les ensembles et des 0 pour les complémentaires). Pour retrouver plus facilement la

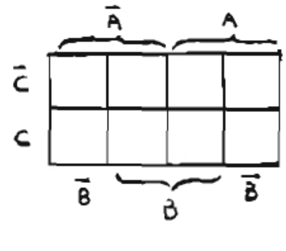

fig. 5

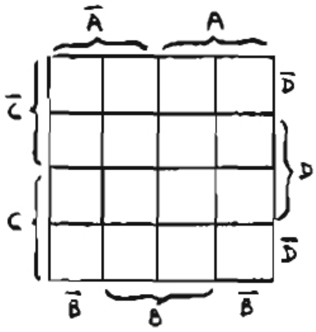

fig. 6

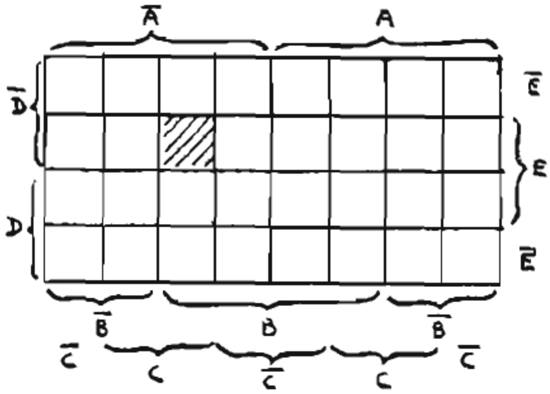

fig. 7

numérotation, on peut placer directement les nombres comme dans les exemples ci-dessous (fig. 8 et 9) :

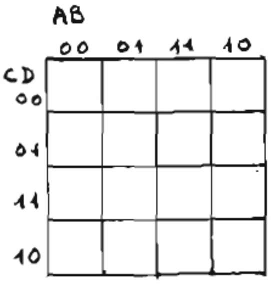

fig. 8

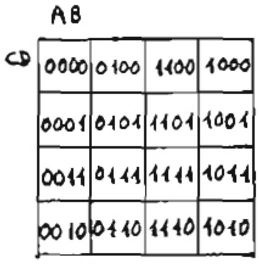

fig. 9

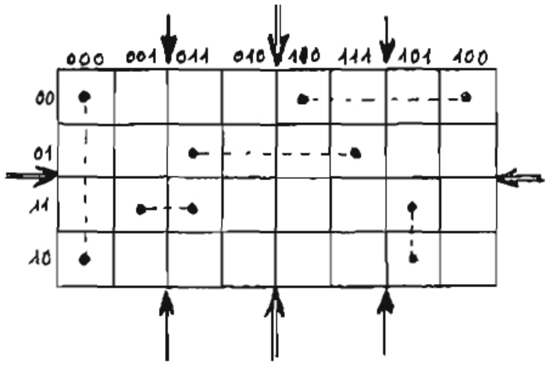

fig. 10

On obtient alors ce qu'on appelle un diagramme de VEITCH-KARNAUGH ou diagramme de KARNAUGH.

L'avantage de cette disposition est de faire intervenir une sorte de réflexion par rapport à certains axes : Deux mintermes représentés par des carrés symétriques par rapport à ces axes ne diffèrent que par une variable. La réunion de ces deux mintermes s'obtient donc en éliminant cette variable (cf. fig. 10). Un cas particulier de symétrie est celui où les deux mintermes sont contiguës.

Le système binaire réfléchi (SBR)

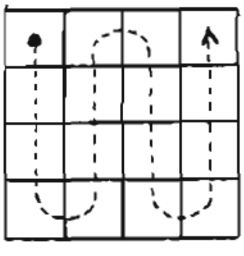

fig. 11

Reprenons la numération des mintermes : Elle s'interprète aisément en base deux. Le minterme portant le numéro 0100 sera noté m_4 ; le minterme 1011 sera noté m_{11}, etc.

Cependant l'ordre de succession des mintermes, quelque soit le cheminement continu choisi sur le diagramme de KARNAUGH, n'est pas l'ordre habituel. Nous allons nous intéresser à un ordre très particulier qui est donné par le cheminement de la figure 11 : On part du premier minterme en haut à gauche, on descend la première colonne, on monte la deuxième, on descend la troisième ... 11 est facile de voir qu'on obtient la séquence de la figure 12. Cet ordre de succession correspond au Système Binaire Réfléchi (SBR). On y retrouve en effet les mêmes réflexions que sur un diagramme de KARNAUGH

Ce système présente divers avantages dont :

1°) Dans de nombreux automatismes, il évite l'apparition de nombres intermédiaires. Par exemple en binaire quand on passe de 111 à 1 000 il risque d'apparaitre n'importe quel nombre si les quatre chiffres ne changent pas simultanément.

2°) C'est l'ordre de succession des nombres sur un côté d'un diagramme de KARNAUGH (cf. fig. 10).

0
1
1 1
1 0
1 1 0
1 1 1
1 0 1
1 0 0
1 1 0 0
1 1 0 1
1 1 1 1
1 1 1 0
1 0 1 0
1 0 1 1
1 0 0 1
1 0 0 0
1 1 0 0 0
1 1 0 0 1
1 1 0 1 1
....

fig. 12

Il faut cependant savoir passer du système binaire ordinaire au SBR et vice-versa. On remarque que :

1°) Dans les deux systèmes un nombre a le même nombre de chiffres.

2°) La parité d'un nombre dans le SBR est celle du nombre de ses chiffres 1.

3°) Si a est pair, le suivant de a s'obtient en modifiant le premier chiffre à droite de a. Si a est impair, le suivant de a s'obtient en modifiant le premier chiffre à gauche du 1 le plus à droite :

Exemples :			
	1 111	pair ; suivant	1 110
	1 110	impair ; suivant	1 010
	110	pair ; suivant	111
	1 101	impair ; suivant	1 111

Soit alors $\overline{dcba}$ un nombre écrit en binaire ordinaire et $\overline{\delta\gamma\beta\alpha}$ le même nombre en SBR. On a les relations suivantes dont on laisse la démonstration au soin du lecteur :

$$\begin{cases} \alpha = a \oplus b \\ \beta = b \oplus c \\ \gamma = c \oplus d \\ \delta = d \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

L'opération ⊕ donnant une structure de groupe abélien à l'ensemble {0,1} il est facile de résoudre le système précédent en :

$$\begin{cases} d = \delta \\ c = \delta \oplus \gamma \\ b = \delta \oplus \gamma \oplus \beta \\ a = \delta \oplus \gamma \oplus \beta \oplus \alpha \end{cases}$$

Il est alors simple de trouver un procédé systématique de passage du SBR au binaire ordinaire. Dans un nombre écrit en SBR on remplace alternativement en partant de la gauche les 1 par 1 puis 0 puis 1 … et on complète les chiffres intermédiaires par l'image du dernier 1 de droite : exemple : 110 010 110 en SBR donne 10. .1. 01. puis 100 011 011 en binaire.

Application au baguenaudier

La figure 13 représente un exemple de baguenaudier à quatre anneaux. Dans le commerce on en trouve généralement à sept anneaux. Le dessin ci-contre montre un baguenaudier monté ;

le problème est d'ôter la navette N ou, une fois ôtée de la remonter. On dira qu'un anneau est monté si la navette passe en son intérieur, démonté dans le cas contraire. En dehors des deux premiers anneaux qui peuvent être montés ou démontés simultanément, un anneau ne peut être déplacé que s'il se trouve immédiatement à gauche (position de la fig. 13) d'un anneau monté et que celui-ci soit le seul anneau monté à la droite de l'anneau considéré.

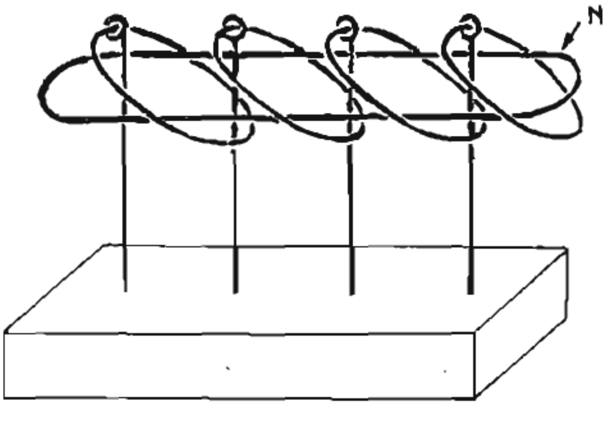

fig. 13

On reconnaît ici l'analogie avec le comptage en SBR ; en notant par 1 un anneau monté et par 0 un anneau démonté, une position quelconque du baguenaudier apparaît comme un nombre du SBR et la marche du baguenaudier se fait suivant l'ordre SBR.

Pour sept anneaux, un baguenaudier complètement monté est noté 1 111 111 et complètement démonté 0 000 000. Or 1 111 111 en SBR vaut, en binaire 1 010 101 soit 85. Il faut donc 85 opérations pour démonter un baguenaudier de sept anneaux. En fait il faut tenir compte de la marche accélérée que permet le déplacement simultané des deux premiers anneaux. Le nombre d'opérations est alors de 64.

On remarque par ailleurs que la position 1 111 111 n'est pas la plus compliquée, puisqu'avec sept chiffres on peut représenter 128 nombres.

La position la plus longue à démonter est donc celle notée 1 000 000 qui nécessite 127 opérations (ou 95 en marche accélérée).

BIBLIOGRAPHIE;

1°) Récréations mathématiques par LUCAS chez BLANCHARD
2°) La mathématiques et ses applications par GALION chez CEDIC
Dans ce dernier ouvrage on trouvera aussi une description du jeu du Loony Loop. On pourra vérifier que sa manipulation est basée sur le système ternaire réfléchi.
3°) Tout ouvrage sur les bases mathématiques pour l'étude des automatismes.